

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

2004. október 12.

IRODALOM

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:

Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003, 5. fejezet (Lineáris egyenletrendszerek);

további ajánlott irodalom:

Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos:

Matematika III. (fakultatív B változat), (gimnáziumi tankönyv);

VIII. fejezet (366. oldaltól - 377. oldalig, feladatok is!)

D. K. Fagyejev – I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;

3. fejezet, 1. szakasz (A Cramer-szabály): 335. - 354. feladat

3. fejezet, 4. szakasz (Lineáris egyenletrendszerek): 398. - 420. feladat

Különösen ajánlott feladatok: 335., 342., 346., 353., 398., 400.-401., 403.-404., 406.-407., 411., 416.

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;

A Lineáris egyenletrendszerek vizsgálata c. fejezetben (a 212. oldaltól): 1. - 3., 7. - 8.

A Mátrixok c. fejezetben a Négyzetes mátrix adjungáltja és inverze c. szakaszban (a 167. oldaltól, feladatok a 178. oldaltól): 17. - 20. feladat

PÉLDÁK

1. Példa. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

(a)

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25$$

(b)

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10$$

(c)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 &= 2 \\-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 10x_4 + 3x_5 &= -8 \\2x_1 - x_2 - 5x_3 + 9x_4 - 2x_5 &= 3 \\-x_1 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 &= -1\end{aligned}$$

Megoldás: Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, majd a jegyzetben (ill. az előadáson) ismertetett módszer* segítségével alakítsuk lépcsős alakúra. A lépcsős alakról a megoldhatóság és, amennyiben az egyenletrendszer megoldható, a megoldások leolvashatók.

(a) *Első megoldás:* Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix}$$

Adjuk hozzá az első sor (-1) -szeresét a második sorhoz, majd az első sor (-3) -szorosát a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix}$$

Adjuk hozzá a második sor (-4) -szeresét a harmadikhoz, valamint a második sor $(\frac{2}{3})$ -szorosát az első sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Szorozzuk meg a második sort $(-\frac{1}{3})$ -dal, a harmadikat pedig $(-\frac{1}{8})$ -dal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Végül adjuk hozzá a harmadik sor $(-\frac{2}{3})$ -szorosát a második sorhoz, illetve $(-\frac{11}{3})$ -szorosát az első sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A mátrixnak megfelelő egyenletrendszer és egyben a megoldás:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3 \quad x_3 = -1.$$

*Másik megoldás:*** Kevesebbet kell a mátrixszal számolni (viszont a végén nem adódnak közvetlenül a megoldások), ha az alábbi módszert követjük: adjuk hozzá az első sor (-1) -szeresét a második sorhoz, majd az első sor (-3) -szorosát a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix}$$

*Gauss-eliminációnak, vagy gyakran Gauss-Jordan-eliminációnak is nevezik.

**A jegyzettel ellentétben a matematikai irodalomban ezt szokás Gauss-eliminációnak nevezni.

Adjuk hozzá a második sor (-4) -szeresét a harmadikhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

A kapott mátrixnak megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ -3x_2 - 2x_3 &= 11 \\ -8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $x_3 = -1$ adódik. A második egyenletből kifejezhető x_2 az x_3 segítségével:

$$x_2 = \frac{11 + 2x_3}{-3}$$

Ebbe behelyettesítve x_3 imént kapott értékét: $x_2 = -3$. Az első egyenletből pedig x_1 fejezhető ki x_2 -vel és x_3 -mal:

$$x_1 = -9 - 2x_2 - 5x_3$$

Kapjuk, hogy $x_1 = 2$.

(b) Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

A Gauss-elimináció lépései:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A kapott mátrixhoz tartozó egyenletrendszer utolsó egyenlete $0 = 1$, így az egyenletrendszer ellentmondó (nincs megoldása).

(c) Hajtsunk végre egy Gauss-Jordan-eliminációt a rendszer mátrixán:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -10 & 3 & -8 \\ 2 & -1 & -5 & 9 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A kapott mátrix lépcsős alakú és leolvasható róla, hogy az egyenletrendszer megoldható. Az ismeretlenek közül x_1 és x_2 kötött, míg a másik három szabad; mivel van szabad ismeretlen, a megoldások száma végtelen. Ilyen esetben a megoldások megadása nem más, mint a kötött ismeretlenek kifejezése a szabadokkal:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 \\x_2 &= -1 + x_3 - x_4\end{aligned}$$

ahol x_3, x_4, x_5 tetszőleges valós számok.

Alkalmazás. Valamely A mátrix inverzének megkeresése az $AX = E$ mátrixegyenlet megoldását jelenti, ahol E az A -val azonos típusú egységmátrix. Egyszerűen belátható, hogy ez ekvivalens az alábbi egyenletrendszerekkel:

$$A\underline{x}_i = \underline{e}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ahol \underline{x}_i a keresett X mátrix i -edik oszlopvektora, \underline{e}_i pedig az E mátrix i -edik oszlopvektora. Az A -nak pontosan akkor van inverze, ha determinánusa nem nulla, ebben az esetben viszont a Cramer-szabály alapján a fenti egyenletrendszerek *mindegyike* megoldható. A megoldáshoz azonban nem érdemes a Cramer-szabályt alkalmazni.

Mivel ezen egyenletrendszerek együtthatómátrixa azonos (ti. A), ezért ezeket egyszerre is megoldhatjuk. Célszerű Gauss-Jordan eliminációval dolgozni, akkor ugyanis — amennyiben van megoldás — a jobboldali konstans-oszlopok helyén „kirajzolódik” az A mátrix inverze. A módszert egy példán mutatjuk be:

2. Példa. Gauss-Jordan elimináció segítségével számítsa ki a következő mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás Írjuk fel a mátrixot és a vele azonos típusú egységmátrixot egymás mellé (a jobb áttekinthetőség érdekében függőleges vonallal elválasztva). Gauss-Jordan eliminációval alakítsuk ki a bal oldalon (a mátrixunk helyén) az egységmátrixot (természetesen minden elemi átalakítást a vonaltól jobbra is elvégezzünk). Amennyiben ez sikerül, akkor a mátrixnak van inverze és a jobb oldalon megjelenik a mátrix inverze.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 11 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -10 & -10 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -8 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -10 & -10 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 & 10 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & -\frac{7}{2} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

A baloldalon E_4 áll, a mátrixnak tehát van inverze, mégpedig:

$$\begin{pmatrix} -15 & 10 & -8 & 5 \\ 6 & -\frac{7}{2} & 3 & -2 \\ \frac{9}{2} & -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

TOVÁBBI AJÁNLOTT FELADATOK

1. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{12} \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = -\frac{9}{4} \end{cases} & \text{(b)} & \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 36,5 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 27 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{z}{7} = 18 \end{cases} \\ \text{(c)} & \begin{cases} x - 2y + 3z - u = 5 \\ y - 2z + 3u - x = 0 \\ z - 2u + 3x - y = 0 \\ u - 2x + 3y - z = 5 \end{cases} & \text{(d)} & \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \end{array}$$

2. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + 9x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - \frac{3}{2}x_4 &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása. Módosítsuk a negyedik egyenlet jobboldalát olyképpen, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

3. Feladat. Határozza meg az a értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszereknek egyetlen megoldása legyen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 4 \\ x + y = a \end{cases} & \text{(b)} & \begin{cases} x + 2y = 8 \\ (a + 1)x + y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \end{array}$$

4. Feladat. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ha a valós paraméter:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

5. Feladat. Az a , b valós paraméter mely értékeire szabályos az alábbi egyenletrendszer? Ezen értékekre oldja meg a rendszert a Cramer-szabály segítségével. A többi esetben pedig Gauss-eliminációval határozza meg a megoldást.

$$\begin{aligned}ax + y + z &= 4 \\x + by + z &= 3 \\x + 2by + z &= 4\end{aligned}$$

6. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ha d valós paraméter:

$$\begin{aligned}dx + (2d - 1)y + (d + 2)z &= 1 \\(d - 1)y + (d - 3)z &= 1 + d \\dx + (3d - 2)y + (3d + 1)z &= 2 - d\end{aligned}$$

7. Feladat. A 2. Példában bemutatott módszer segítségével (is) számítsa ki az Inverz mátrix c. feladatsor 1. feladatában szereplő mátrixok inverzeit.