

## DETERMINÁNSOK

2004. szeptember 20.

### IRODALOM

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:

Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003, 3. fejezet (Az  $n$ -edrendű determináns);

#### további ajánlott irodalom:

D. K. Fagyjev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000; 2. fejezet, (127. a)–c), f)–m), 128. a)–d), 147., 160.–179., 221., 240., 289.–291. feladat

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;

A Determinánsok c. fejezetben (fogalmak, jelölések a 7. o.-tól),

Kidolgozott feladatok:

I./1. szakasz, 10. – 11. oldal, 1. – 5. feladat

I./2. szakasz, 19. – 31. oldal, 1. – 9., 19. – 21. feladat

I./3. szakasz, 33. – 35. oldal, 1. – 5. feladat

II. szakasz, 41. – 60. oldal, 1. – 13., 19. – 20., 28. – 32. feladat

III. szakasz, 64. – 67. oldal, 2. – 4. feladat

### KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

**1. Példa.** Számítsa ki a következő determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

*Megoldás:*

(a) A determináns definíciója (3.1. Def.) után tett megjegyzés szerint a másodrendű determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzatának és a mellékátlóbeli elemek szorzatának különbsége:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) = 5$$

(b) *1. megoldás:* A determinánst a definíció szerint a következőképpen számítjuk ki:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (4 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1)) - 5 \cdot (3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1)) + 2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 4) = \\ &= -15 + 50 - 10 = 25 \end{aligned}$$

*2. megoldás:* Harmadrendű (és csak harmadrendű!!) determinánsok esetén alkalmazható az ún. Sarrus-szabály: a determináns első két oszlopát az utolsó oszlop után írjuk, majd képezzük a főátlóban, illetve a vele párhuzamos másik két átlóban lévő elemek szorzatát és ezeket összeadjuk. Hasonlóan járunk el a mellékátlóban, illetve a vele párhuzamosan elhelyezkedő átlókban szereplő elemekkel, de ennek az összegnek a (-1)-szeresét vesszük. Az így keletkező számok összege a determináns értékét adja (ld. a 3.1. Definíció utáni megjegyzést a jegyzetben):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} &= \\ &= (1 \cdot 4 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1) - (2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 5) = \\ &= (-16 + (-10) + 6) - (16 + (-1) + (-60)) = 25 \end{aligned}$$

(c) A determináns értékét megkaphatjuk pl. a 3. oszlopa szerint kifejtve:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} &= \\ &= (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \\ &+ (-2) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ezután meg kellene határozni a négy harmadrendű determináns értékét, ami elég sok számolással járna. Ha „jobb” (több 0-t tartalmazó) oszlopot vagy sort választottunk volna a kifejtéshez (pl. 2. oszlop), akkor kicsit könnyebb lenne a dolgunk. A 0-val való szorzás miatt ugyanis a kifejtés egyik tagja 0, eggyel kevesebb al-determinánst kellene meghatározni.

A számolás még egyszerűbbé tehető, fölhasználva a determinánsok 3.5.5. Tulajdonságát illetve annak duálisát. Ha ugyanis először az első oszlop elemeinek (-3)-szorosát hozzáadjuk a harmadik oszlop megfelelő elemeihez (rövidebben: az első oszlop (-3)-szorosát hozzáadjuk a harmadik oszlophoz), illetve az első oszlop elemeit hozzáadjuk a negyedik oszlop megfelelő elemeihez (rövidebben: az első oszlopot hozzáadjuk a negyedik oszlophoz), akkor a negyedik sorban az első elem kivételével minden elem 0 lesz, így a kapott

determinánst az utolsó sora szerint kifejtve már csak egy harmadrendű (al)determinánst kell meghatározni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & -14 & 13 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & -14 & 13 \end{vmatrix} =$$

Ennek értékét már a Saruss-módszerrel is kiszámíthatjuk, de most talán célszerű tovább alakítani:

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & -14 & 13 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = 19$$

### TOVÁBBI AJÁNLOTT FELADATOK

**1. Feladat.** Számítsa ki (minél ügyesebben!) a következő determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (f) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix} \quad (h) \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix} \quad (i) \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

**2. Feladat.** Számítsa ki a következő kifejezések értékét a determinánsok kiszámítása nélkül (felhasználva a determináns tulajdonságait és a determinánsok szorzástételét):

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -14 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

*Megoldás:*

(a) Fölhasználva a determinánsok szorzástételét (3.16. Tétel), az első tagban szereplő két  $3 \times 3$ -as mátrix determinánsának szorzata egyenlő a szorzatuk determinánsával; a szorzás elvégzésével a kifejezés a következő alakba írható:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -14 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Észrevehetjük, hogy az első két determináns csak a harmadik sorban tér el egymástól, ezért alkalmazzuk a jegyzetben található 3.5.4. tulajdonságot:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -14 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Az említett tulajdonságot újra alkalmazva:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez utóbbi determináns értéke pedig a két azonos sora (3.5.3. tulajdonság!) miatt zérus.

**3. Feladat.** Határozza meg a következő determinánsok értékét:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} & \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \\ \text{(c)} \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + d_1 & \dots & a_1 + (n-1)d_1 \\ a_2 & a_2 + d_2 & \dots & a_2 + (n-1)d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n + d_n & \dots & a_n + (n-1)d_n \end{vmatrix} & \text{(d)} \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \end{array}$$

*Megoldás:*

(b) Adjuk hozzá az első sort a másodikhoz, majd a harmadikhoz, ..., az  $n$ -edikhez, a következőt kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

Trianguláris mátrix értéke megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával:

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n (= n!)$$