

Bolyongásokról

Kevei Péter

Egyetemi tavasz(??) a Bolyai Intézetben
2017. április 22.

A valószínűségszámítás

„A **valószínűségszámítás** a matematika egyik ága. Eredeti motivációját a *véletlen (más szóval indeterminisztikus) tömegjelenségek*, röviden kísérletek vizsgálata adta. Ezek a kísérletek tetszőlegesen sokszor ismétlődhetnek (ettől tömegjelenségek), minden megismétlődésük többféle kimenetellel járhat, ugyanakkor nem tudjuk pontosan előre megmondani, hogy melyik ismétlődés alkalmával melyik kimenetel következik be (ettől indeterminisztikusak). Kísérlet például egy pénzérme feldobása: elvileg akárhányszor feldobhatjuk, de általában nem tudjuk határozottan megjósolni, melyik oldalára esik.” – Wikipédia

Érmedobás

Szabályos érmét dobálunk $\rightarrow (X_1, X_2, \dots)$ végtelen sorozat, ahol $X_i = +1$ vagy $X_i = -1$, $i = 1, 2, \dots$

Minden egyes dobásnál annak a valószínűsége, hogy $+1$ -et kapunk az $1/2$, és annak valószínűsége, hogy -1 -et kapunk $1/2$.

Érmedobás

Szabályos érmét dobálunk $\rightarrow (X_1, X_2, \dots)$ végtelen sorozat, ahol $X_i = +1$ vagy $X_i = -1$, $i = 1, 2, \dots$

Minden egyes dobásnál annak a valószínűsége, hogy $+1$ -et kapunk az $1/2$, és annak valószínűsége, hogy -1 -et kapunk $1/2$.

Jelölés

„annak a valószínűsége, hogy valami bekövetkezik” = $P(\text{valami})$.

„annak a valószínűsége, hogy az első dobás $+1$ ” =

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

Jelölés

„annak a valószínűsége, hogy valami bekövetkezik” = $P(\text{valami})$.

„annak a valószínűsége, hogy az első dobás +1” =

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

Érmedobás

Szabályos érmét dobálunk $\rightarrow (X_1, X_2, \dots)$ végtelen sorozat,
ahol $X_i = +1$ vagy $X_i = -1$, $i = 1, 2, \dots$,
 $P(X = +1) = P(X = -1) = 1/2$.

Részletösszeg-sorozat: $S_0 = 0$, $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2$, $\dots$,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n, \dots$
egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen

Érmedobás

Szabályos érmét dobálunk $\rightarrow (X_1, X_2, \dots)$ végtelen sorozat, ahol $X_i = +1$ vagy $X_i = -1$, $i = 1, 2, \dots$,

$$P(X = +1) = P(X = -1) = 1/2.$$

Részletösszeg-sorozat: $S_0 = 0$, $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2$, $\dots$,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n, \dots$

egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen

Érmedobás

Szabályos érmét dobálunk $\rightarrow (X_1, X_2, \dots)$ végtelen sorozat,
ahol $X_i = +1$ vagy $X_i = -1$, $i = 1, 2, \dots$,

$$P(X = +1) = P(X = -1) = 1/2.$$

Részletösszeg-sorozat: $S_0 = 0$, $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2$, $\dots$,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n, \dots$

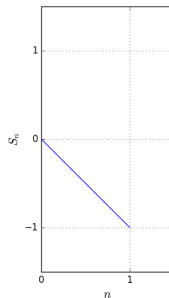
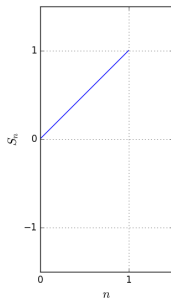
egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen

Bemelegítés

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_1 lehetséges értékei: $-1, +1$. $P(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$,

$$P(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

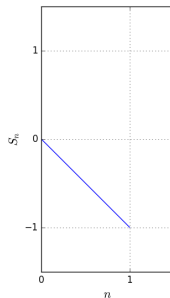
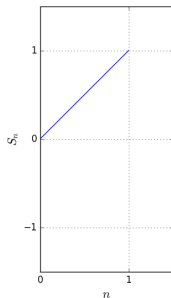


Bemelegítés

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_1 lehetséges értékei: $-1, +1$. $P(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$,

$$P(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

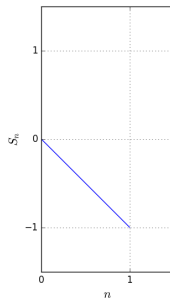
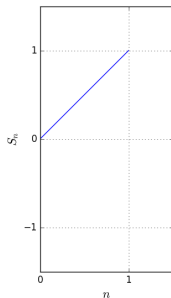


Bemelegítés

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_1 lehetséges értékei: $-1, +1$. $P(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$,

$$P(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

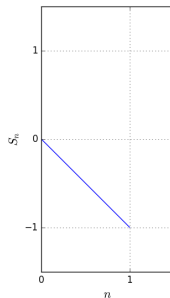
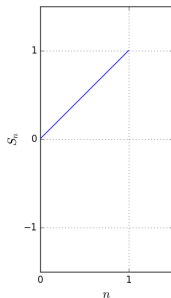


Bemelegítés

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_1 lehetséges értékei: $-1, +1$. $P(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$,

$$P(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

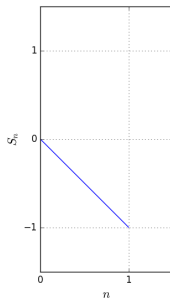
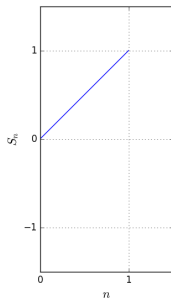


Bemelegítés

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_1 lehetséges értékei: $-1, +1$. $P(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$,

$$P(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

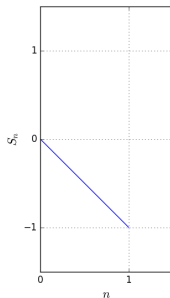
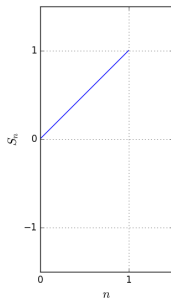


Bemelegítés

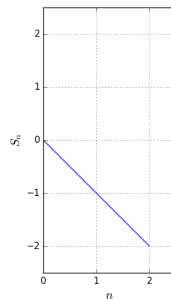
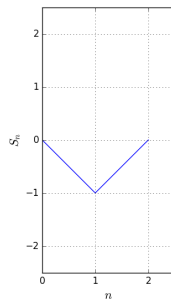
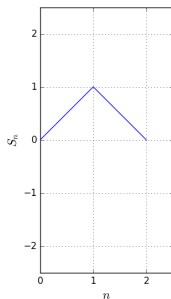
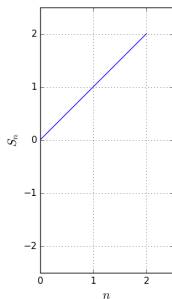
$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_1 lehetséges értékei: $-1, +1$. $P(S_1 = -1) = \frac{1}{2}$,

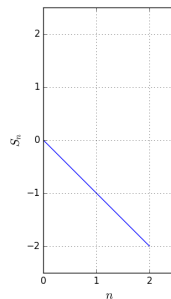
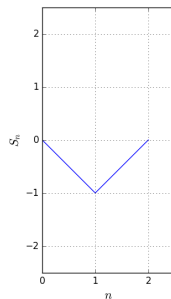
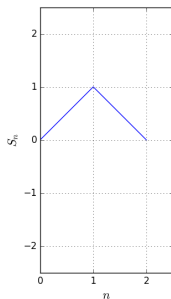
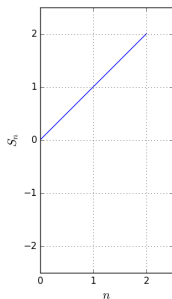
$$P(S_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$



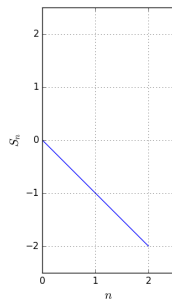
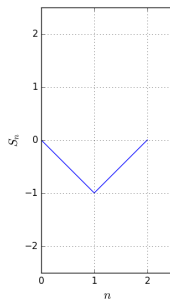
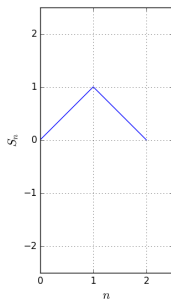
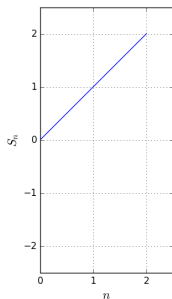
S_2 lehetséges értékei: $-2, 0, 2$. $P(S_2 = -2) = \frac{1}{4}$,
 $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(S_2 = 2) = \frac{1}{4}$.



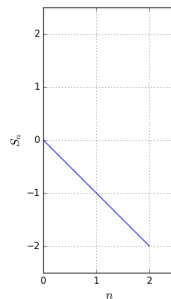
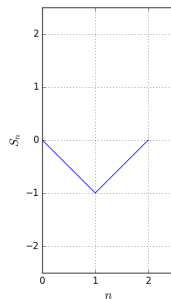
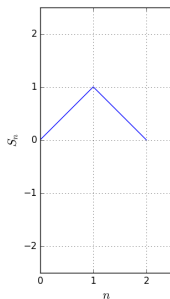
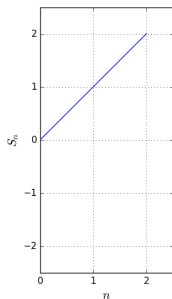
S_2 lehetséges értékei: $-2, 0, 2$. $P(S_2 = -2) = \frac{1}{4}$,
 $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(S_2 = 2) = \frac{1}{4}$.



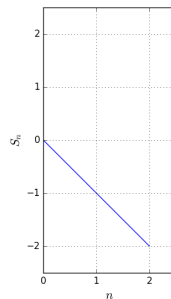
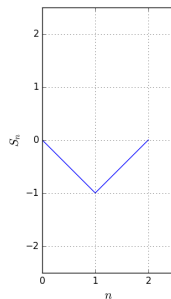
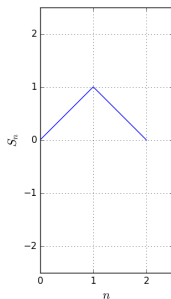
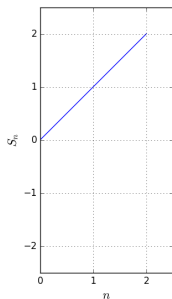
S_2 lehetséges értékei: $-2, 0, 2$. $P(S_2 = -2) = \frac{1}{4}$,
 $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(S_2 = 2) = \frac{1}{4}$.



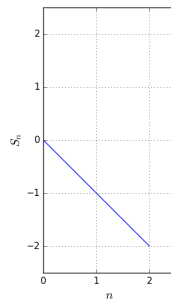
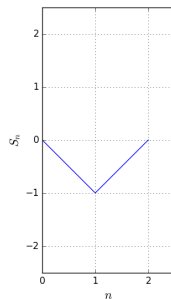
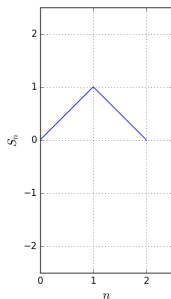
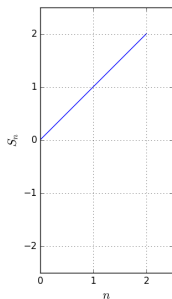
S_2 lehetséges értékei: $-2, 0, 2$. $P(S_2 = -2) = \frac{1}{4}$,
 $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(S_2 = 2) = \frac{1}{4}$.



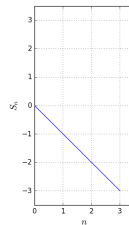
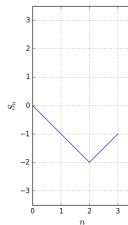
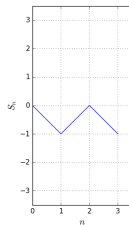
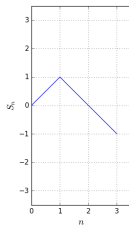
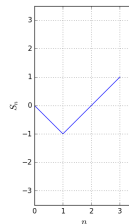
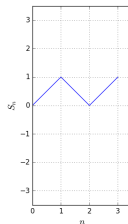
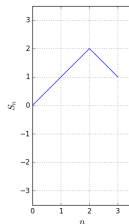
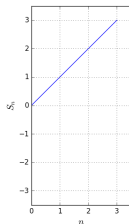
S_2 lehetséges értékei: $-2, 0, 2$. $P(S_2 = -2) = \frac{1}{4}$,
 $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(S_2 = 2) = \frac{1}{4}$.



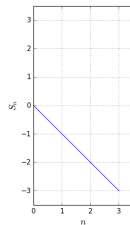
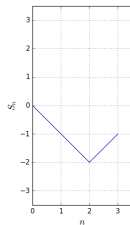
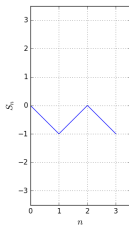
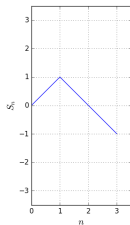
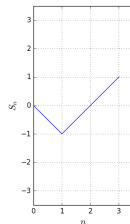
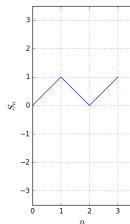
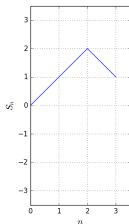
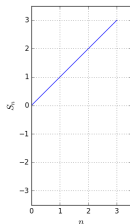
S_2 lehetséges értékei: $-2, 0, 2$. $P(S_2 = -2) = \frac{1}{4}$,
 $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$, $P(S_2 = 2) = \frac{1}{4}$.



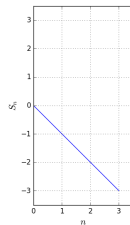
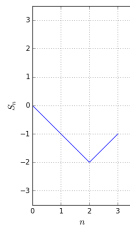
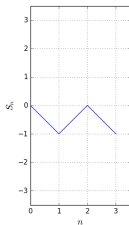
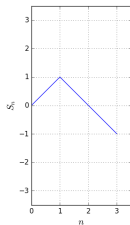
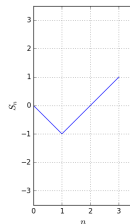
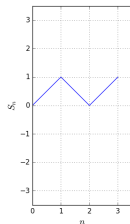
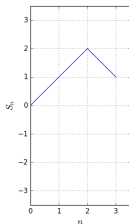
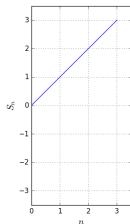
S_3 lehetséges értékei: $-3, -1, 1, 3$. $P(S_3 = -3) = \frac{1}{8}$,
 $P(S_3 = -1) = \frac{3}{8}$, $P(S_3 = 1) = \frac{3}{8}$, $P(S_3 = 3) = \frac{1}{8}$.



S_3 lehetséges értékei: $-3, -1, 1, 3$. $P(S_3 = -3) = \frac{1}{8}$,
 $P(S_3 = -1) = \frac{3}{8}$, $P(S_3 = 1) = \frac{3}{8}$, $P(S_3 = 3) = \frac{1}{8}$.



S_3 lehetséges értékei: $-3, -1, 1, 3$. $P(S_3 = -3) = \frac{1}{8}$,
 $P(S_3 = -1) = \frac{3}{8}$, $P(S_3 = 1) = \frac{3}{8}$, $P(S_3 = 3) = \frac{1}{8}$.



S_n lehetséges értékei: $-n, -n+2, \dots, n-2, n$.

Ha k db -1 -es van, akkor $n-k$ db $+1$ -es, és így

$S_n = -k + (n-k) = n-2k, k = 0, 1, \dots, n$. Tehát

$$\begin{aligned} P(S_n = n-2k) &= \\ &= \frac{|n\text{-hosszú } \pm 1\text{-ből álló sorozatok, melyben } k \text{ db } -1 \text{ van}|}{2^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \end{aligned}$$

S_n lehetséges értékei: $-n, -n+2, \dots, n-2, n$.

Ha k db -1 -es van, akkor $n-k$ db $+1$ -es, és így

$S_n = -k + (n-k) = n-2k, k = 0, 1, \dots, n$. Tehát

$$\begin{aligned} P(S_n = n-2k) &= \\ &= \frac{|n\text{-hosszú } \pm 1\text{-ből álló sorozatok, melyben } k \text{ db } -1 \text{ van}|}{2^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \end{aligned}$$

S_n lehetséges értékei: $-n, -n+2, \dots, n-2, n$.

Ha k db -1 -es van, akkor $n-k$ db $+1$ -es, és így

$S_n = -k + (n-k) = n-2k, k = 0, 1, \dots, n$. Tehát

$$\begin{aligned} P(S_n = n-2k) &= \\ &= \frac{|n\text{-hosszú } \pm 1\text{-ből álló sorozatok, melyben } k \text{ db } -1 \text{ van}|}{2^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \end{aligned}$$

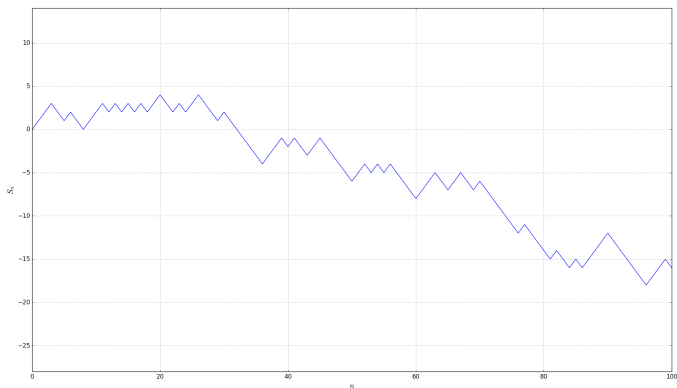
S_n lehetséges értékei: $-n, -n+2, \dots, n-2, n$.

Ha k db -1 -es van, akkor $n-k$ db $+1$ -es, és így

$S_n = -k + (n-k) = n-2k, k = 0, 1, \dots, n$. Tehát

$$\begin{aligned} P(S_n = n-2k) &= \\ &= \frac{|n\text{-hosszú } \pm 1\text{-ből álló sorozatok, melyben } k \text{ db } -1 \text{ van}|}{2^n} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \end{aligned}$$

Szimuláció, $n = 100$



Szimuláció, $n = 10000$



Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}).$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből a 0-ba}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \\ &= u \cdot u = u^2. \end{aligned}$$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}).$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből a 0-ba}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \\ &= u \cdot u = u^2. \end{aligned}$$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}).$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből a 0-ba}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \\ &= u \cdot u = u^2. \end{aligned}$$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}).$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből a 0-ba}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \\ &= u \cdot u = u^2. \end{aligned}$$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}).$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből a 0-ba}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \\ &= u \cdot u = u^2. \end{aligned}$$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u - 1)^2 = 0.$$

$$u = 1$$

Tehát $P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1.$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u - 1)^2 = 0.$$

$$u = 1$$

Tehát $P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1.$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u - 1)^2 = 0.$$

$$u = 1$$

Tehát $P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1.$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u - 1)^2 = 0.$$

$$u = 1$$

Tehát $P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1.$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u - 1)^2 = 0.$$

$$u = 1$$

Tehát $P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1.$

Visszatérés 0-ba

$u = P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}).$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(\text{a bolyongó részecske eljut a } -1\text{-ből az 1-be}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$(u - 1)^2 = 0.$$

$$u = 1$$

Tehát $P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1.$

és még hova jut el?

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 2-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 2-be}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ugyanígy

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } k\text{-ba}) = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

és még hova jut el?

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 2-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 2-be}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ugyanígy

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } k\text{-ba}) = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

és még hova jut el?

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 2-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 2-be}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ugyanígy

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } k\text{-ba}) = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

és még hova jut el?

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 2-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 2-be}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ugyanígy

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } k\text{-ba}) = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

és még hova jut el?

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) = 1$$

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 2-be}) &= \\ &= P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 2-be}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ugyanígy

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } k\text{-ba}) = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

és még hova jut el?

és persze

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } -1\text{-be}) = 1,$$

és ezért

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } -k\text{-ba}) = 1.$$

Végül

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 0-ba}) &\geq \\ &\geq P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 0-ba}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

és még hova jut el?

és persze

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } -1\text{-be}) = 1,$$

és ezért

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } -k\text{-ba}) = 1.$$

Végül

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 0-ba}) &\geq \\ &\geq P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 0-ba}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

és még hova jut el?

és persze

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } -1\text{-be}) = 1,$$

és ezért

$$P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a } -k\text{-ba}) = 1.$$

Végül

$$\begin{aligned} P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból a 0-ba}) &\geq \\ &\geq P(\text{a bolyongó részecske eljut a 0-ból az 1-be}) \times \\ &\quad \times P(\text{a bolyongó részecske eljut a 1-ből a 0-ba}) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

A szimmetrikus bolyongás egy dimenzióban rekurrens

Tétel (Pólya György, 1921)

Az egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen egy valószínűséggel visszatér az origóba.

Ha egyszer visszatér, akkor végtelen sokszor is visszatér.

A szimmetrikus bolyongás egy dimenzióban rekurrens

Tétel (Pólya György, 1921)

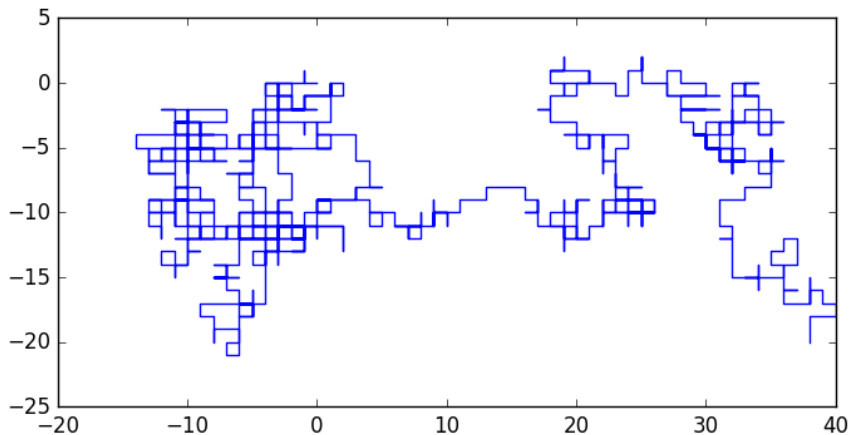
Az egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen egy valószínűséggel visszatér az origóba.

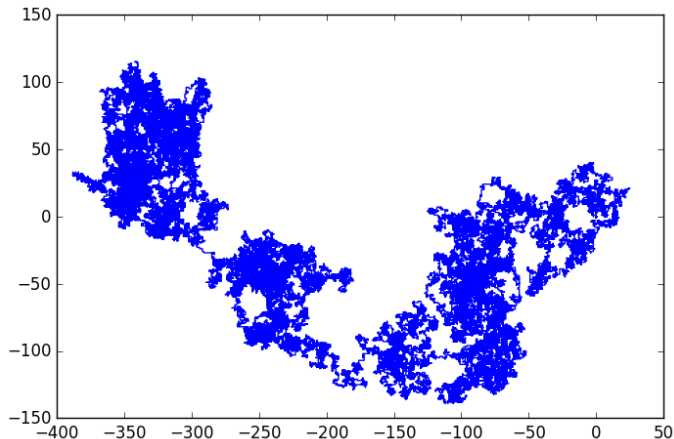
Ha egyszer visszatér, akkor végtelen sokszor is visszatér.

Bolyongás magasabb dimenzióban

Bolyongás a síkon: minden irányba $1/4$ valószínűséggel lép a bolyongó részecske.

Bolyongás a térben: minden irányba $1/6$ valószínűséggel lép a bolyongó részecske.

$n = 1000$ 

$n = 100000$ 

A szimmetrikus bolyongás

Tétel (Pólya György, 1921)

Az egyszerű szimmetrikus bolyongás egy és két dimenzióban egy valószínűséggel visszatér az origóba. Három dimenzióban a visszatérés valószínűsége kisebb egynél, kb. 0,35.

Az egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen és síkon egy valószínűséggel minden egész koordinátájú pontot végtelen sokszor meglátogat. $\Rightarrow$ minden út Rómába vezet

A szimmetrikus bolyongás

Tétel (Pólya György, 1921)

Az egyszerű szimmetrikus bolyongás egy és két dimenzióban egy valószínűséggel visszatér az origóba. Három dimenzióban a visszatérés valószínűsége kisebb egynél, kb. 0,35.

Az egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen és síkon egy valószínűséggel minden egész koordinátájú pontot végtelen sokszor meglátogat. $\Rightarrow$ minden út Rómába vezet

A szimmetrikus bolyongás

Tétel (Pólya György, 1921)

Az egyszerű szimmetrikus bolyongás egy és két dimenzióban egy valószínűséggel visszatér az origóba. Három dimenzióban a visszatérés valószínűsége kisebb egynél, kb. 0,35.

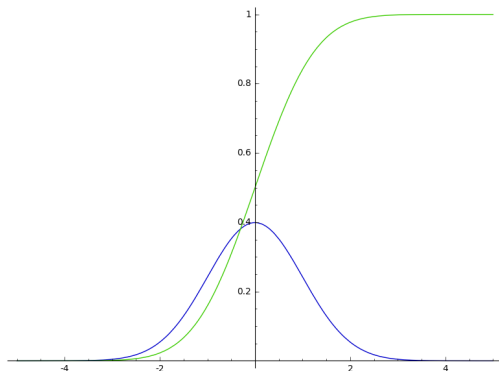
Az egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen és síkon egy valószínűséggel minden egész koordinátájú pontot végtelen sokszor meglátogat. $\Rightarrow$ minden út Rómába vezet

1. Mekkora lesz S_n , ha n nagy?



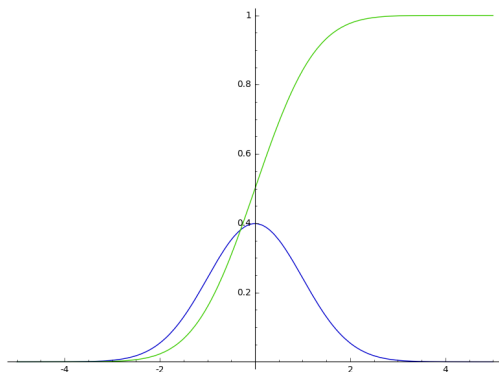
1. Mekkora lesz S_n , ha n nagy?

$$P(S_{10000} \leq 50 \cdot x) \approx \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$



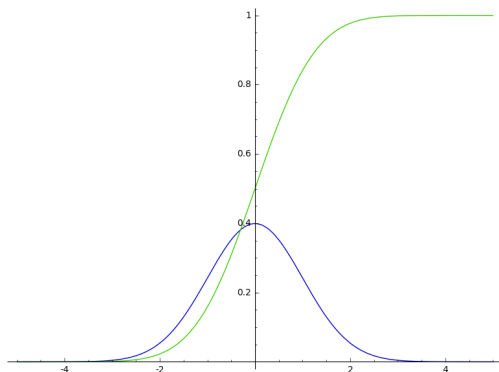
1. Mekkora lesz S_n , ha n nagy?

$$P(S_{10000} \leq 50 \cdot x) \approx \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$



1. Mekkora lesz S_n , ha n nagy?

$$P(S_{10000} \leq 50 \cdot x) \approx \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$



1. Mekkora lesz S_n , ha n nagy?

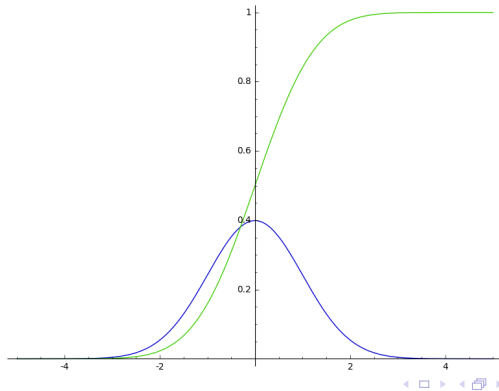
$$P(S_{10000} \leq 50 \cdot x) \approx \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$



1. Mekkora lesz S_n , ha n nagy?

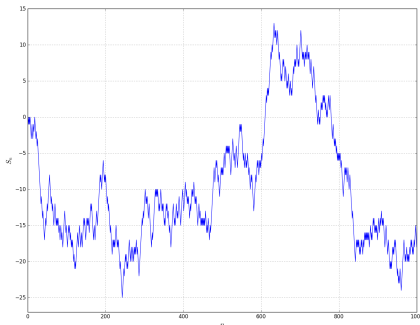
Centrális határeloszlás-tétel:

$$P\left(S_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{n} \cdot x\right) \approx \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



2. Mekkora lesz $(S_k)_{k=1}^n$ legnagyobb értéke n -ig, ha n nagy?

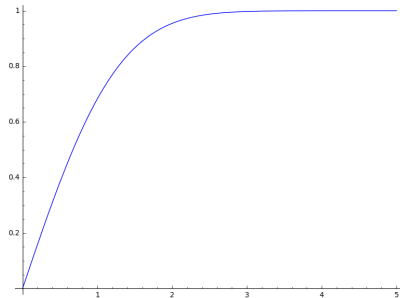
$$M_n = \max\{0, S_1, S_2, \dots, S_n\}.$$



2. Mekkora lesz $(S_k)_{k=1}^n$ legnagyobb értéke n -ig, ha n nagy?

$$M_n = \max\{0, S_1, S_2, \dots, S_n\}.$$

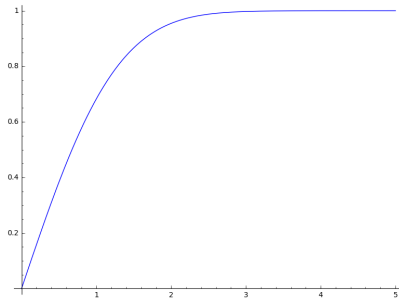
$$P(M_{10000} \leq 50 \cdot x) \approx 2\Phi(x) - 1, \quad x \geq 0.$$



2. Mekkora lesz $(S_k)_{k=1}^n$ legnagyobb értéke n -ig, ha n nagy?

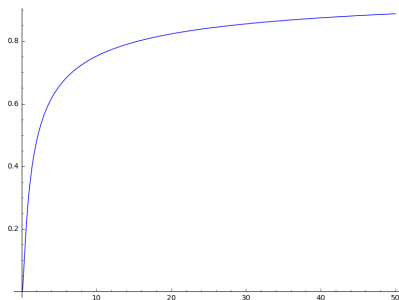
$$M_n = \max\{0, S_1, S_2, \dots, S_n\}.$$

$$P(M_{10000} \leq 50 \cdot x) \approx 2\Phi(x) - 1, \quad x \geq 0.$$



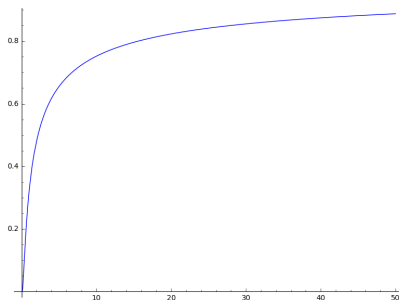
3. Mikor éri el először a bolyongás r -et?

$$P(r\text{-et } tr^2 \text{ idő előtt éri el}) \approx 2[1 - \Phi(1/\sqrt{t})] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

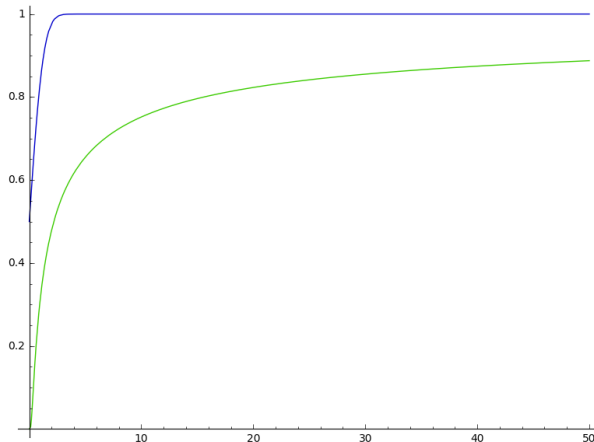


3. Mikor éri el először a bolyongás r -et?

$$P(r\text{-et } tr^2 \text{ idő előtt éri el}) \approx 2[1 - \Phi(1/\sqrt{t})] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

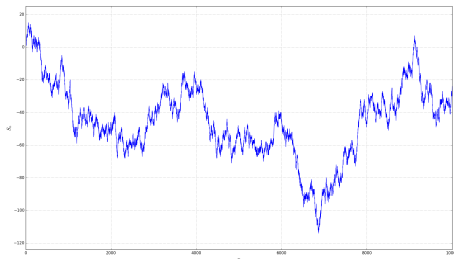


3. Mikor éri el először a bolyongás r -et?



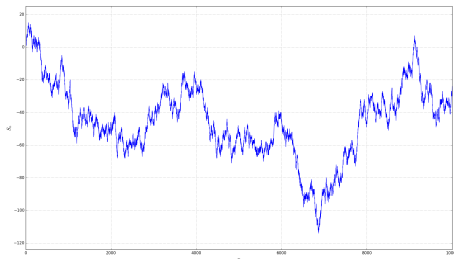
4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot |\{k : S_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}|$$



4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

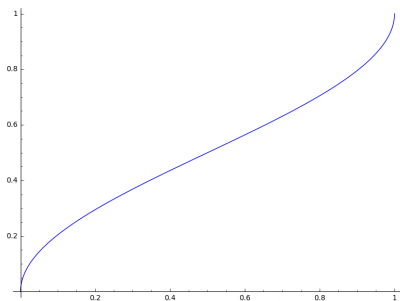
$$T_n = \frac{1}{n} \cdot |\{k : S_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}|$$



4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot |\{k : S_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}|$$

$$\mathbf{P}\{T_{10000} \leq x\} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

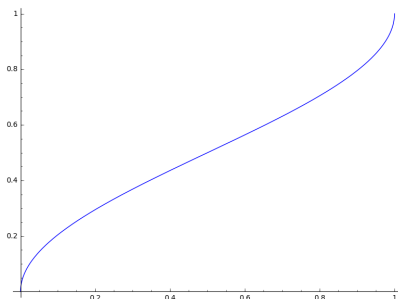


az eloszlásfüggvény: $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$

4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot |\{k : S_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}|$$

$$\mathbf{P}\{T_{10000} \leq x\} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

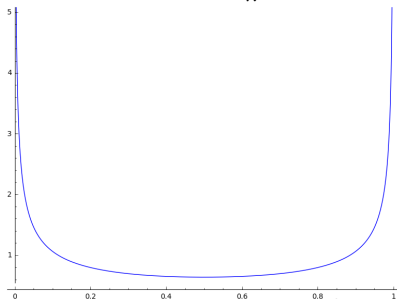


az eloszlásfüggvény: $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$

4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot |\{k : S_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}|$$

$$\mathbf{P}\{T_{10000} \leq x\} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$



a sűrűségfüggvény: $\frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$

4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

Annak a valószínűsége, hogy 20 dobás során a bolyongó részecske végig a pozitív oldalon van 0,352.

Nagy n esetén, a bolyongó részecske 5 esetből 1-szer az idő 97,6 %-át a pozitív oldalon tölti. 10 esetből 1-szer 99,4 %-át ugyanazon az oldalon tölti.

4. Hányszor lesz $S_k > 0$ az n időpontig, ha n nagy?

Annak a valószínűsége, hogy 20 dobás során a bolyongó részecske végig a pozitív oldalon van 0,352.

Nagy n esetén, a bolyongó részecske 5 esetből 1-szer az idő 97,6 %-át a pozitív oldalon tölti. 10 esetből 1-szer 99,4 %-át ugyanazon az oldalon tölti.