Egy elemi egyenlőtlenség szép alkalmazásokkal

Egyetemi tavasz; 2012. 04. 28.

Dr. Németh József
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Bernoulli-egyenlőtlenség (Jacob Bernoulli, 1654–1705). *Ha* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $x \geq -1$, *akkor*

$$\boldsymbol{(1+x)^n \geq 1+nx}$$

teljesül.

Bizonyítás (teljes indukció).

0) $n = 1$-re igaz

00) Tegyük fel, hogy valamely n-re fennáll, azaz

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

000) Bizonyítsuk be $(n+1)$-re:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq \\ &\geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

azaz kész.
(*Megjegyzés:* ”=”).

Másik bizonyítás:

Tudjuk: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$.

Legyen $1 + x = a, b = 1$. Így

$$(1+x)^n - 1 = x((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \ldots + 1).$$

$\alpha)$ Ha $x \geq 0$, akkor $(1+x)^k \geq 1$ és így

$$(1+x)^n - 1 \geq n \cdot x \Longleftrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

$\beta)$ Ha $-1 \leq x < 0$, akkor $(1+x)^k \leq 1$ és így

$$(1+x)^n - 1 \geq n \cdot x \Longleftrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Megjegyzés: Teljes indukció ide is.

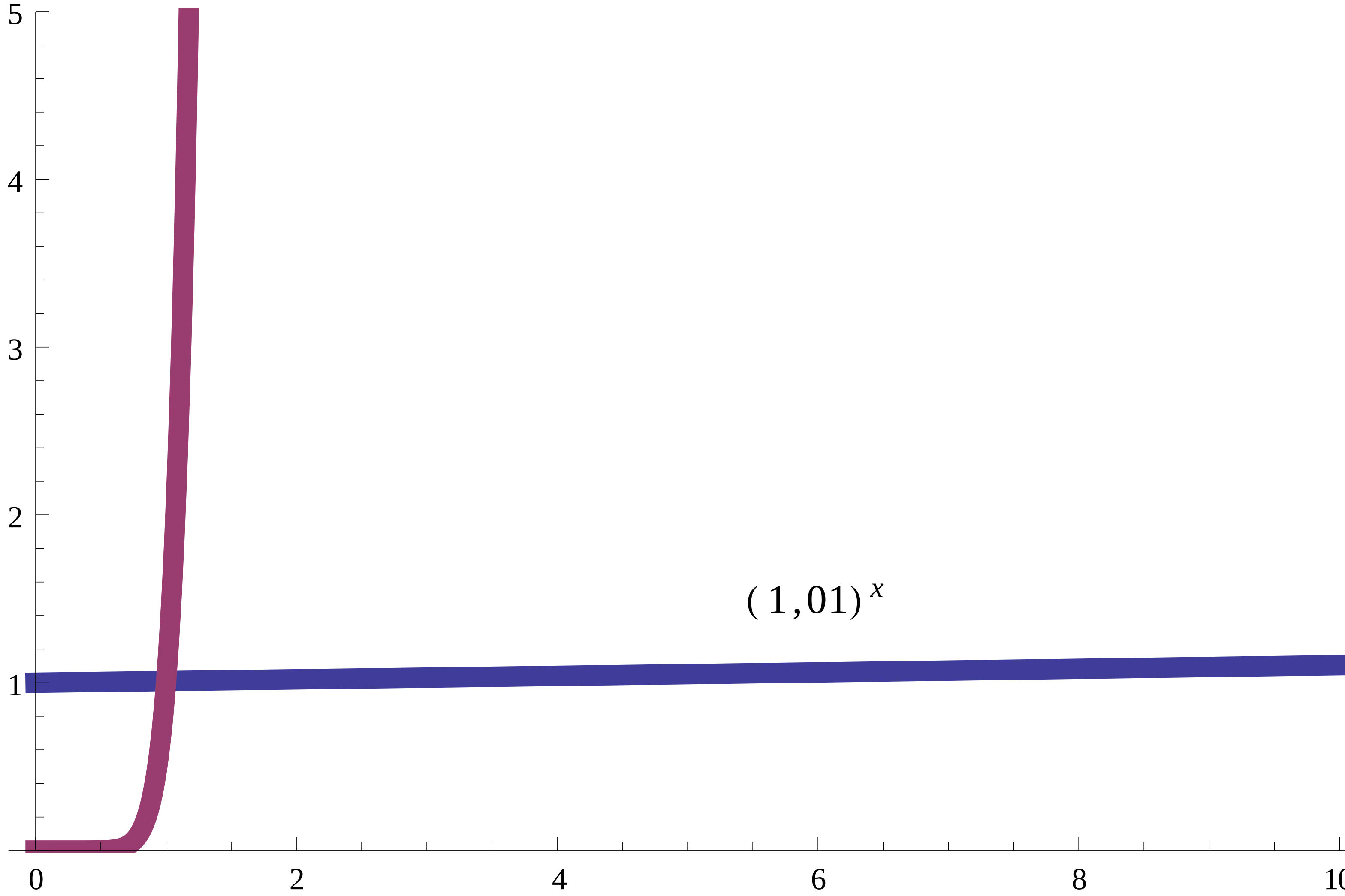
Alkalmazások:

1. $\exists^? n : \ 1,01^n > 10^6$

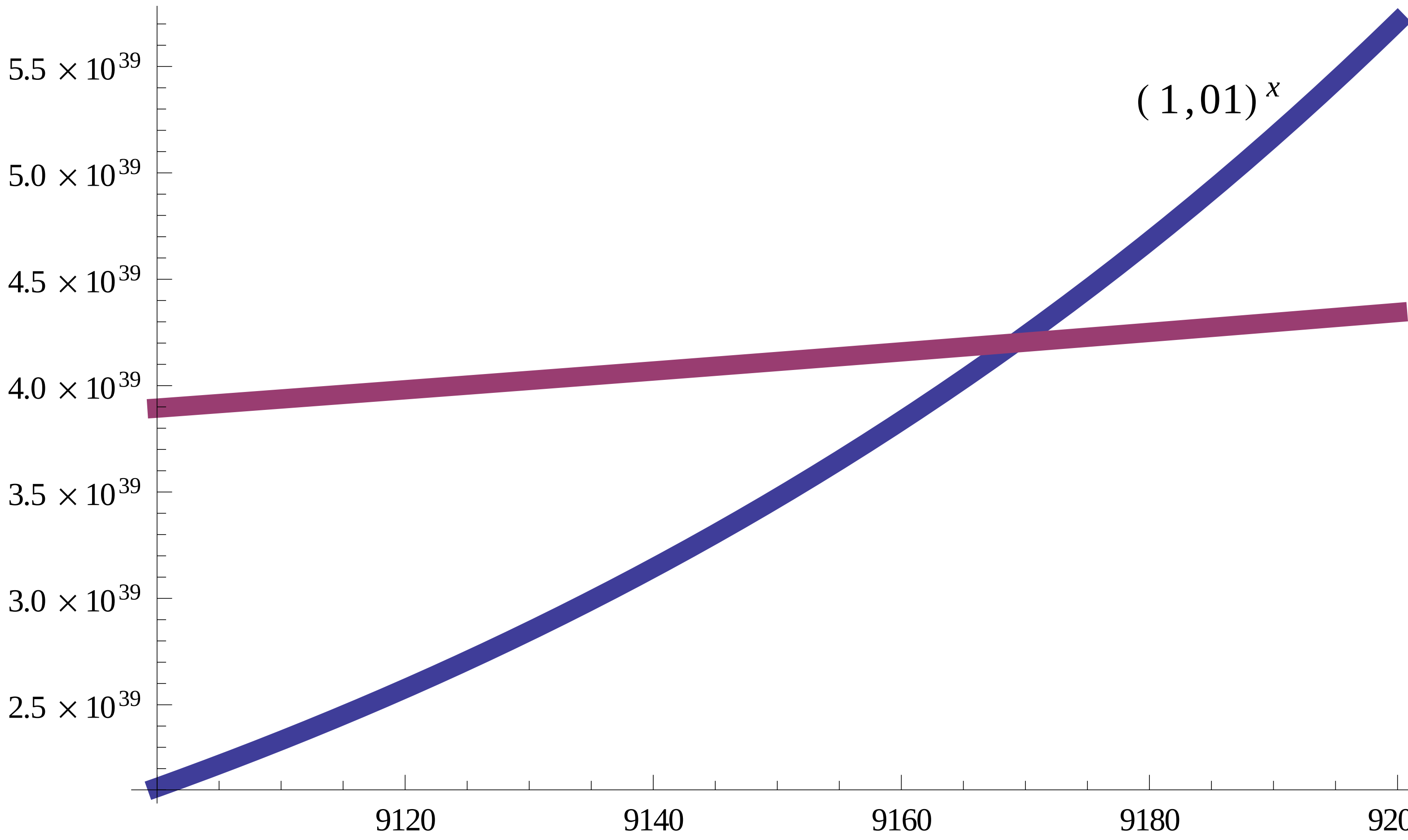
   $\alpha)$ $1,01^n \overset{B}{\geq} 1 + n \cdot 0,01 > 10^6 \Longleftrightarrow n > \dfrac{10^6 - 1}{0,01}$

   $\beta)$ $n \lg 1,01 > 6 \Longleftrightarrow n > \dfrac{6}{\lg 1,01}$

2. $\exists^? n > 1$ úgy, hogy $1,01^n > n^{10}$.



$(1{,}01)^x$
5
4
3
2
1
0
2
4
6
8
10



$$(a^n > n^k,\ \text{ha } a > 1,\ k \in \mathbb{N}^+)$$

α)

$$n \lg 1,01 \overset{?}{>} 10 \lg n$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\lg 1,01}{10} > \frac{\lg n}{n} \overset{?}{\to} 0.$$

De: $\dfrac{\lg n}{n} = \lg \sqrt[n]{n} \to \lg 1 = 0$ (folytonosság)

Megjegyzés: $\dfrac{\lg x}{x} \to 0$, ha $x \to \infty$ (diff.)

β) (*Elemi*)

(*Próbálkozás*) $(1+0,01)^n \overset{B}{\geq} 1+n\cdot 0,01 \overset{?}{>} n^{10}$ (nem)

De:

$$(1,01)^n = \left[\left(\sqrt[11]{1,01}\right)^n\right]^{11} =$$

$$= \left[\left(1 + \underbrace{\sqrt[11]{1,01} - 1}_{x}\right)^n\right]^{11} \overset{B}{\geq}$$

$$\overset{B}{\geq} \left[1 + n\left(\sqrt[11]{1,01} - 1\right)\right]^{11} >$$

$$> n^{11}\left(\sqrt[11]{1,01} - 1\right)^{11} > n^{10},$$

$$\text{ha } n > \left(\sqrt[11]{1,01} - 1\right)^{-11}.$$

Megjegyzés: $(1,000000000001)^n \overset{?}{>} n^{10000000}$.
Megjegyzés: Ha $a > 1,\ k \in \mathbb{N}^+$ (tetszőleges)
$\exists\, n :\ a^n > n^k$ (ugyanígy) (vö.: computer)

3. *Számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = G_n,$$

ha $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Alk.: szélsőérték problémák

Bizonyítás. (legyen $G_1 \overset{\text{def}}{=} a_1$ és $G_0 \overset{\text{def}}{=} 1$)

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n = \left(1 + \underbrace{\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1}_{x}\right)^n \overset{B}{\geq} \qquad (*)$$

$$\overset{B}{\geq} 1 + n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1\right)$$

Másrészt:

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n = \frac{a_1 \ldots a_n}{G_{n-1}^{n-1} \cdot G_{n-1}} = \qquad (**)$$

$$= \frac{a_1 \ldots a_n}{a_1 \ldots a_{n-1} \cdot G_{n-1}} = \frac{a_n}{G_{n-1}}$$

Így $(*), (**) \Rightarrow$

$$\frac{a_n}{G_{n-1}} \geq 1 + n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1\right) \, / \cdot G_{n-1}$$

$$a_n \geq G_{n-1} + n \cdot G_n - n \cdot G_{n-1}, \text{ azaz}$$

$$a_n \geq n \cdot G_n - (n-1)G_{n-1}.$$

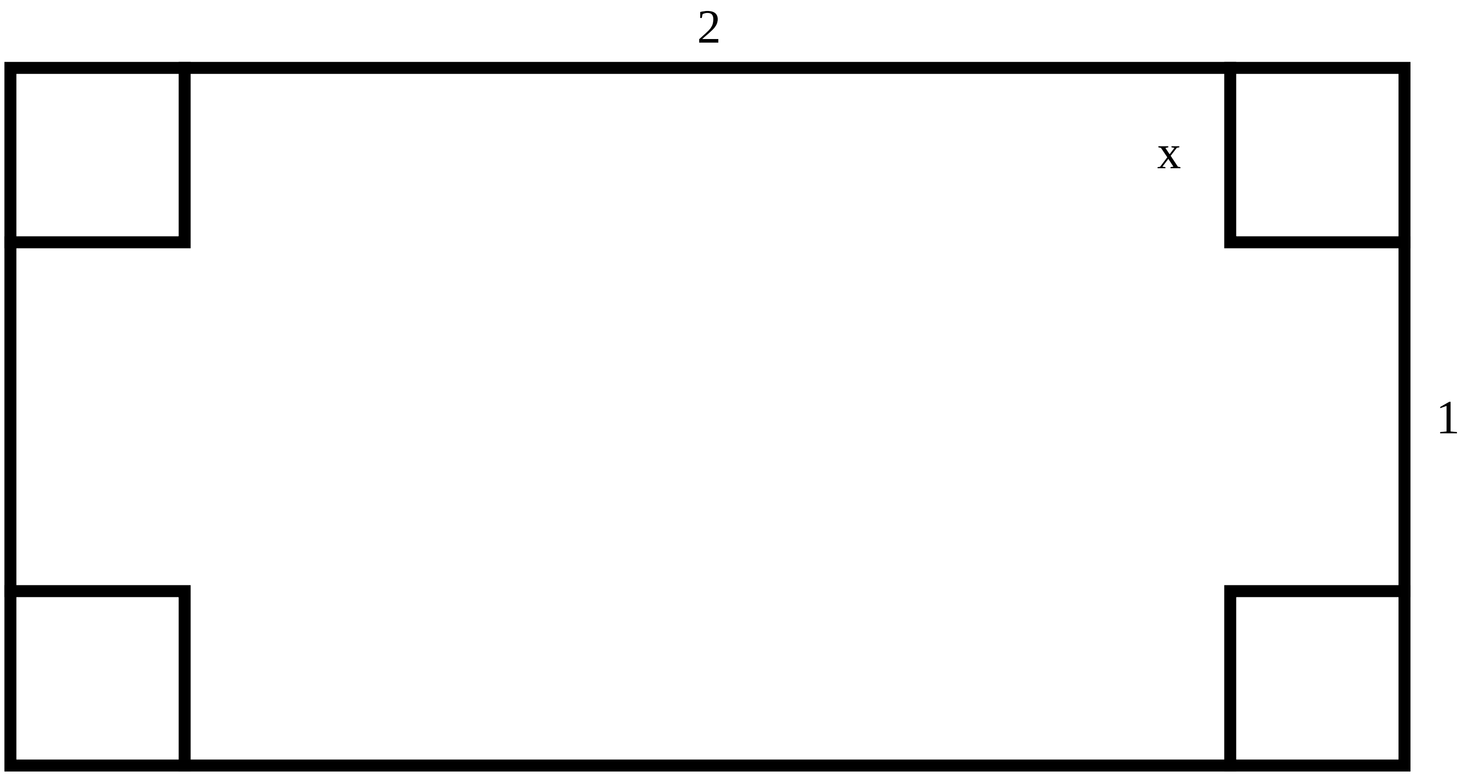
Rendre

$$
\begin{array}{r}
a_1 \geq 1 \cdot G_1 - 0 \cdot 1 \\
a_2 \geq 2 \cdot G_2 - 1 \cdot G_1 \\
a_3 \geq 3 \cdot G_3 - 2 \cdot G_2 \\
\vdots \\
a_n \geq n \cdot G_n - (n-1)G_{n-1} \\
\hline
a_1 + \ldots + a_n \geq n \cdot G_n \Rightarrow A_n \geq G_n.
\end{array}
$$

“=”?

4. *Egy szép szélsőérték-probléma*

Egy 2m x 1m oldalú téglalap alakú kartonpapírból a sarkoknál kirajzolt négyzetek kivágása után a szélek felhajtásával dobozt készítünk. Milyen oldalhosszúságú négyzeteket kell kivágni ahhoz, hogy a kapott doboz térfogata maximális legyen?

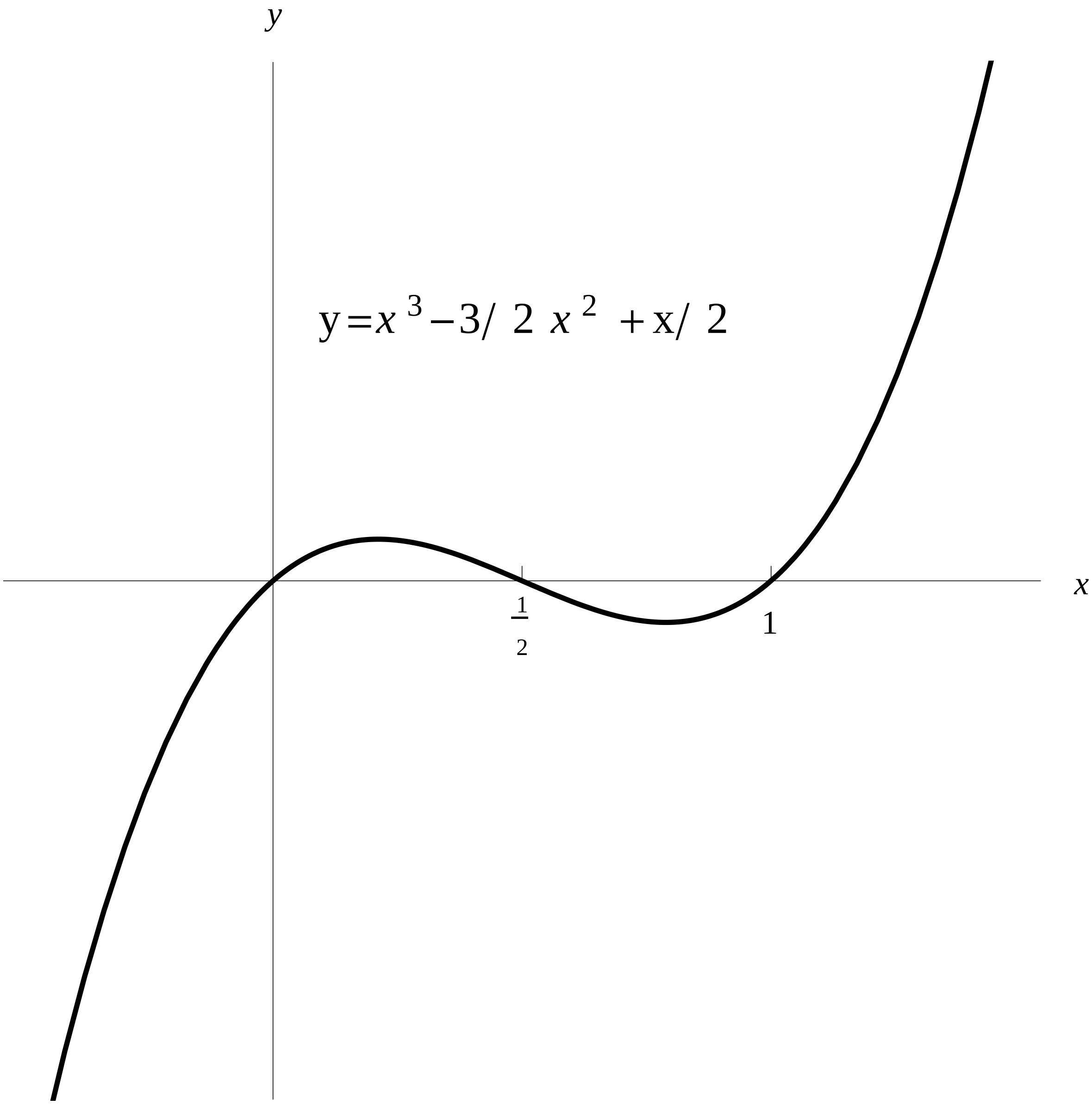


Megoldás:

$$V(x) = (1-2x)(2-2x)\cdot x = 2(2x^3 - 3x^2 + x) =$$
$$= 4\left(\underbrace{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}}_{f}\right) = 4\cdot f(x)$$

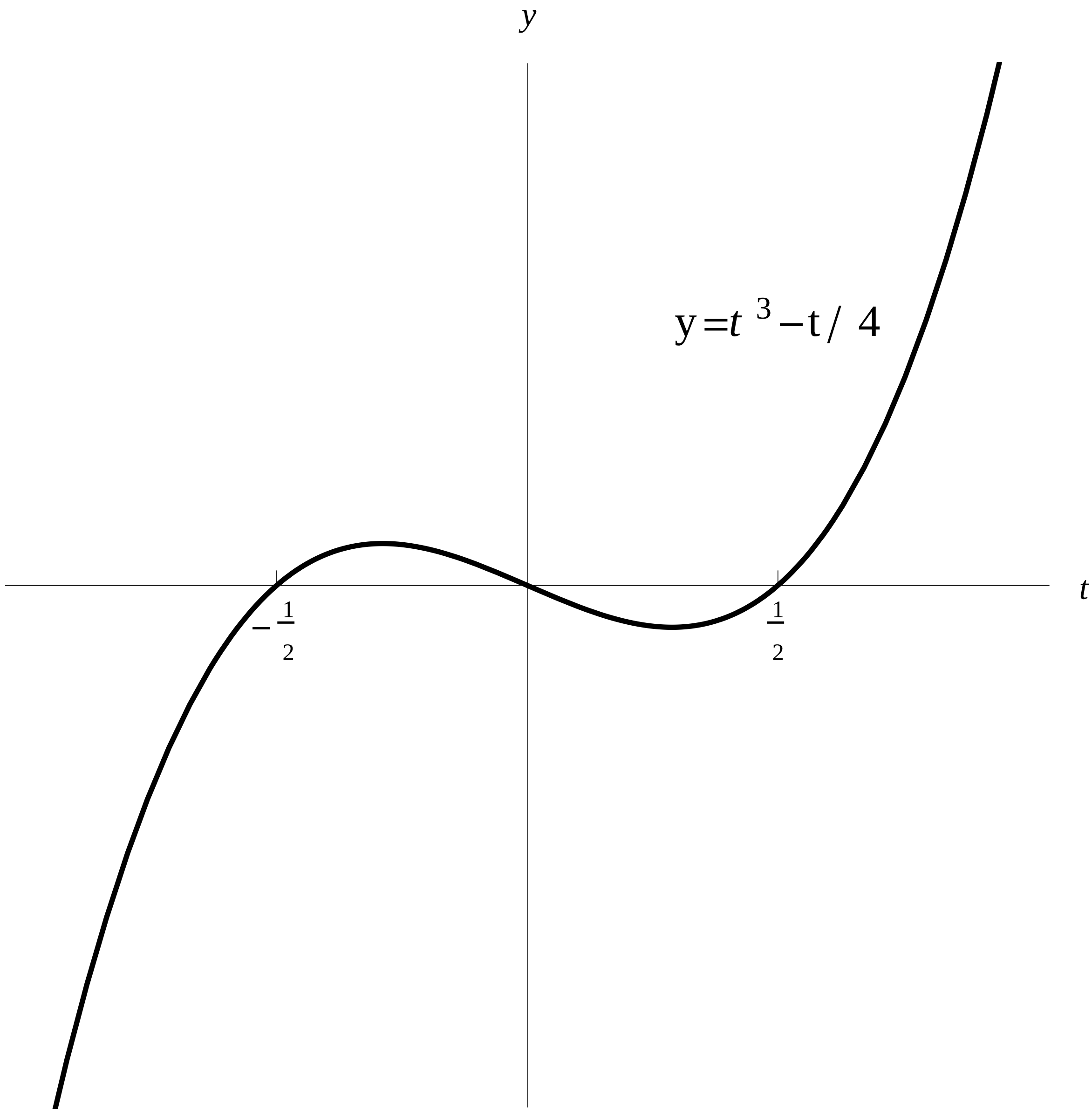
Harmadfokú
0) Differenciálással
00) Elemi (Bernoulli egyenl.)

Tehát az $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$ maximuma kell $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$.



Legyen $x = t + \frac{1}{2}$, ekkor

$$f(x) = t^3 - \frac{t}{4} = g(t).$$



Keressük $g(t)$ maximumát (ha t_0 a $g(t)$ minimumhelye, akkor $(-t_0)$ lesz a maximumhely).

Általában. Ha $y = 1 + z$ $(z \geq -1)$, akkor

$$y^3 = (1+z)^3 \overset{B}{\geq} 1 + 3z = 1 + 3(y-1) = 3y - 2,$$

azaz $y \geq 0$ esetén

$$y^3 - 3y \geq -2 \text{ (“=” } z = 0 \Leftrightarrow y = 1).$$

Min.: -2 lesz az $y = 1$ helyen.

Probléma: $3 \longrightarrow \frac{1}{4}$.

Kell $t^3 - \frac{1}{4}t$ minimuma.

$$y^3 - 3y \geq -2 \qquad / \cdot c^3 (> 0)$$

$$(cy)^3 - 3c^2(cy) \geq -2c^3.$$

Legyen $3c^2 = \frac{1}{4}$ és $cy \overset{\text{jel}}{=} t$; $c = \frac{1}{\sqrt{12}}$.

$t^3 - \frac{1}{4}t \geq -2\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right)^3$ és a minimumhely: $y = 1$, azaz

$$t = c \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Akkor a maximumhelye $g(t)$-nek:

$$-t_0 = -\frac{1}{\sqrt{12}}, \quad \text{és} \quad f\text{-nek}$$

az $x_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{12}}$ helyen van minimuma. $(\approx 0,2113\ldots)$

Megjegyzés: Minden harmadfokú függvényre megy. (Rédei)

5. *Egy szép sorozat*

$$a_n^{(1)} = \frac{1+2+\ldots n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

$$a_n^{(2)} = \frac{1^2+2^2+\ldots n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

$$a_n^{(3)} = \frac{1^3+\ldots n^3}{n^4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^4} \to \frac{1}{4}$$

$$a_n^{(k)} = \frac{1^k+\ldots n^k}{n^{k+1}} = (?) \overset{?}{\to} \frac{1}{k+1}. \qquad (*)$$

Megjegyzés: $y = x^k$ alatti terület a $[0;1]$ felett (integrál)

Segédtétel:

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} < 1 + 2^k + \ldots + n^k < \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}.$$

Ebből triviálisan következik $(*)$, ugyanis n^{k+1}-nel leosztva

$$\frac{1}{k+1} < a_n^{(k)} < \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\downarrow \atop 1}{}^{k+1} \frac{1}{k+1} \text{ (rendőrelv)}$$

A segédtétel bizonyítása.

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \overset{B}{>} 1 + \frac{k+1}{n}$

(2) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1} \overset{B}{>} 1 - \frac{k+1}{n}$

n^{k+1}-nel szorozva

(1') $(n+1)^{k+1} > n^{k+1} + (k+1)n^k$

(2') $(n-1)^{k+1} > n^{k+1} - (k+1)n^k$

Kifejezve n^k-t az (1') és (2')-ből

(1") $n^k < \dfrac{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}{k+1}$

(2") $n^k > \dfrac{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}{k+1} <$$

$$< n^k < \frac{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}{k+1} \quad (**)$$

Innen véve $(**)$-ot $n = 1, 2, \ldots$-re, mindkét oldalon teleszkópikus összeg adódik, amiből éppen kapjuk, hogy

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} < 1 + 2^k + \ldots n^k < \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}.$$

6. *Egy érdekes és hasznos sorozat:* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(pl. kamatos kamat számításnál $\left(1 + \dfrac{0,08}{n}\right)^n$)

$$\left.\begin{array}{r} 0) \ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \uparrow \\ 00) \ \text{korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{konvergens } (e; \text{ Euler, J. Bernoulli})$$

Ad 0)

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \overset{B}{\geq} 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\geq 1-\frac{1}{n}\iff$$

$$\iff\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

azaz valóban $a_n\uparrow$.

Ad 00) korlátosság hasonlóan:

$$\alpha)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\downarrow\ \text{(H.F.)}$$

$$\beta)\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\leq 4\ (n=1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.\ (\approx 2,71\ldots)$$