53. §. Szimmetrikus polinomok

A többismeretlenes polinomok között kitűnnek azok, amelyek az ismeretlenek semmiféle permutációjánál sem változnak. Az ilyen polinomokban tehát valamennyi ismeretlen szimmetrikusan szerepel, s ezért ezeket *szimmetrikus polinomoknak* nevezzük. A legegyszerűbb példák: az összes ismeretlenek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ összege, az ismeretlenek négyzetének $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ összege, az ismeretlenek $x_1 x_2 \ldots x_n$ szorzata. Minthogy bármely permutáció előállítható transzpozíciók szorzataként (l. a 3. §-t), valamely polinom szimmetrikus voltának igazolásához elegendő arról meggyőződni, hogy ez a polinom bármely két ismeretlen felcserélésénél változatlan marad.

A továbbiakban n ismeretlenes szimmetrikus polinomokat fogunk vizsgálni valamely T testhez tartozó együtthatókkal. Könnyen belátható, hogy *két szimmetrikus polinom összege, különbsége és szorzata maga is szimmetrikus*, vagyis hogy a szimmetrikus polinomok a $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ gyűrűben részgyűrűt alkotnak, amelyet *a T test feletti n ismeretlenes szimmetrikus polinomok gyűrűjének nevezünk*. Ez a gyűrű tartalmazza T valamennyi elemét (azaz az összes 0-adfokú polinomokat, valamint a zérót is), minthogy ezek nyilvánvalóan nem változnak az ismeretlenek semmiféle permutációjánál. Minden más szimmetrikus polinom feltétlenül tartalmazza mind az n ismeretlent, sőt, valamennyire nézve ugyanaz a fokszáma: ha az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szimmetrikus polinom tartalmaz olyan tagot, amelyben az x_i ismeretlen a k-adik hatványon szerepel, akkor tartalmazza azt a tagot is, amelyik ebből az x_i és az x_j ismeretlen transzpozíciója útján nyerhető, amelyben tehát az x_j ismeretlen fog a k-adik hatványon szerepelni.

A következő n számú n ismeretlenes szimmetrikus polinomot *elemi szimmetrikus polinomoknak* nevezzük:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
(1)\qquad &\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_{n-1} = x_1x_2 \ldots x_{n-1} + x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3 \ldots x_n,\\
&\sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}
$$

Ezek a polinomok, melyek nyilvánvalóan szimmetrikusak, a szimmetrikus polinomok elméletében igen nagy szerepet játszanak. A figyelmet Viète képletei (l. a 24. §-t) hívják fel rájuk, hiszen *az egyismeretlenes főpolinomok együtthatói előjeltől eltekintve a gyökök elemi szimmetrikus függvényei*. Az

elemi szimmetrikus polinomoknak ez a kapcsolata Viète képleteivel rendkívül fontos a szimmetrikus polinomoknak az egyismeretlenes polinomok elméletére való alkalmazásai szempontjából, melyek kedvéért a szimmetrikus polinomokkal foglalkozunk.

Minthogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretleneknek a T test feletti polinomjai gyűrűt alkotnak, azért a következő állítások nyilvánvalóak: szimmetrikus polinom lesz bármely elemi szimmetrikus polinom minden pozitív egész kitevős hatványa, valamint ilyen hatványok szorzata tetszőleges T-beli együtthatóval ellátva, s végül ilyen szorzatok bármely összege. Más szóval, *ha a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok bármely polinomját, melynek együtthatói a T testből valók, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek polinomjának tekintjük, ez utóbbi szimmetrikus lesz.* Legyen pl. $n = 3$, és tekintsük a $\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3$ polinomot. Ha σ_1-et, σ_2-t és σ_3-at kifejezésükkel helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3 = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + 5x_1x_2x_3;$$

a jobb oldalon szemmel láthatólag x_1, x_2, x_3 szimmetrikus polinomja áll.

Ennek az eredménynek megfordítása a s z i m m e t r i k u s p o l i n o m o k a l a p t é t e l e, mely a következőképpen szól.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretleneknek a T test feletti minden szimmetrikus polinomja előállítható a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a T testhez tartozó együtthatókkal.

Valóban, legyen adva az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

szimmetrikus polinom, és legyen lexikografikusan első tagja

$$a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

Ebben a tagban az ismeretlenek kitevője szükségképpen eleget tesz a

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_n \tag{3}$$

egyenlőtlenségeknek. Csakugyan, ha valamely i-re $k_i < k_{i+1}$ lenne, akkor az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinom — szimmetrikus lévén — tartalmazná az

$$a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i} \ldots x_n^{k_n} \tag{4}$$

tagot is, amely a (2) tagból az x_i és az x_{i+1} ismeretlen transzpozíciójával áll elő. Ez ellentmondásra vezet, minthogy a (4) tag lexikografikusan megelőzi a (2) tagot: $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ kitevője mindkét tagban megegyezik, de x_i kitevője (4)-ben nagyobb, mint (2)-ben.

Tekintsük most az elemi szimmetrikus polinomok következő szorzatát [a (3) egyenlőtlenségek miatt valamennyi kitevő nemnegatív]:

$$\varphi_1 = a_0\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3} \ldots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}. \tag{5}$$

Ez az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek szimmetrikus polinomja, s emellett lexikografikusan első tagja egyenlő a (2) taggal. Valóban, a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ polinomok első tagja rendre $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2 \dots x_n$, s mivel az előző paragrafus végén bebizonyítottuk, hogy a szorzat első tagja egyenlő a tényezők első tagjainak szorzatával, azért a φ_1 polinom első tagja

$$a_0x_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3} \dots (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1x_2 \dots x_n)^{k_n} = a_0x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Ebből következik, hogy ha φ_1-et kivonjuk f-ből, akkor ezen polinomok első tagja kiesik, tehát az $f - \varphi_1 = f_1$ szimmetrikus polinom lexikografikusan első tagja a lexikografikus sorrendben később áll, mint a (2) tag, amely az f polinomban volt az első. Megismételve ugyanezt az eljárást az f_1 polinomra, melynek együtthatói nyilvánvalóan a T testhez tartoznak, nyerjük az

$$f_1 = \varphi_2 + f_2$$

egyenlőséget, ahol φ_2 elemi szimmetrikus polinomok hatványainak szorzata valamilyen T-beli együtthatóval ellátva, f_2 pedig olyan szimmetrikus polinom, melynek lexikografikusan első tagja a lexikografikus sorrendben későbbi, mint f_1 első tagja. Innen adódik

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2.$$

Ezt az eljárást folytatva, valamilyen s-re azt kapjuk, hogy $f_s = 0$, s így f-nek egy kifejezését nyerjük $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ valamely polinomjának alakjában T-ből való együtthatókkal:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Valóban, ha ez az eljárás a végtelenségig folytatható volna,[36] akkor szimmetrikus polinomoknak végtelen

$$(6) \qquad f_1, f_2, \dots, f_s, \dots$$

sorozatát kapnánk, ahol minden polinom lexikografikusan első tagját az előző polinomok első tagja s következésképpen (2) is megelőzi (a lexikografikus sorrendben). Ha azonban az f_s polinom első tagja

$$(7) \qquad bx_1^{l_1}x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n},$$

[36] Vegyük figyelembe, hogy a φ_s polinom általában olyan tagokat is tartalmaz, amelyek az f_{s-1} polinomban nem szerepelnek, s ezért az f_{s-1}-ről az $f_s = f_{s-1} - \varphi_s$ polinomra való áttérés nemcsak f_{s-1} bizonyos tagjainak eltűnésével jár, hanem új tagok megjelenésével is. Itt $s = 1, 2, \dots$

akkor ezen polinom szimmetrikus voltából következnek a (3) egyenlőtlenséghez hasonló

$$(8) \qquad l_1 \geqq l_2 \geqq \dots \geqq l_n$$

egyenlőtlenségek. Másrészt, mivel a (2) tag megelőzi a (7) tagot, azért

$$(9) \qquad k_1 \geqq l_1.$$

Könnyű azonban belátni, hogy a (8) és a (9) egyenlőtlenségeknek eleget tevő $l_1, l_2, \dots, l_n$ nemnegatív egész számsorozatot csak véges sokféleképpen választhatjuk. Csakugyan, még ha a (8) feltételtől el is tekintünk, és csupán azt tesszük fel, hogy valamennyi l_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ kisebb k_1-nél, vagy egyenlő vele az l_i számok még akkor is csak $(k_1 + 1)^n$-féleképpen választhatók. Ebből következik, hogy a polinomok egyre későbbi első tagokkal rendelkező (6) sorozata nem lehet végtelen.

A tétel bizonyítását befejeztük.

Az elemi szimmetrikus polinomok fent említett kapcsolata Viète képleteivel lehetővé teszi, hogy a szimmetrikus polinomok alaptételének az alábbi fontos következményét nyerjük:

Legyen $f(x)$ egyismeretlenes főpolinom a T test felett, és legyen T' a T feletti $f(x)$ polinom valamely felbontási teste. Akkor az $f(x)$ polinom T'-höz tartozó gyökeinek bármely szimmetrikus polinomja (T-beli együtthatókkal) az $f(x)$ polinom együtthatóinak polinomja lesz (T-beli együtthatókkal), s ezért eleme a T testnek.

Az alaptétel fenti bizonyítása egyúttal módszert is nyújt a szimmetrikus polinomok elemi szimmetrikus polinomokkal való kifejezésének gyakorlati megkeresésére. Először vezessük be a következő jelölést: ha

$$(10) \qquad ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek valamely hatványszorzata (ahol a kitevők között zéró is szerepelhet), akkor jelölje

$$(11) \qquad S(ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$$

mindazon tagok összegét, amelyeket (10)-ből az ismeretlenek összes permutációival kaphatunk. Világos, hogy ez szimmetrikus polinom, mégpedig homogén, és hogy minden olyan n ismeretlenes szimmetrikus polinom, amelyik tartalmazza a (10) tagot, tartalmazni fogja a (11) polinom összes többi tagjait is. Pl. $S(x_1) = \sigma_1$, $S(x_1x_2) = \sigma_2$, $S(x_1^2)$ az ismeretlenek négyzetösszege stb.

Példa. Fejezzük ki elemi szimmetrikus polinomokkal az $f = S(x_1^2x_2)$ n ismeretlenes szimmetrikus polinomot.

Itt a lexikografikusan első tag $x_1^2x_2$, s ezért $\varphi_1 = \sigma_1^{2-1}\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2$, azaz

$$\varphi_1 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) = S(x_1^2x_2) + 3S(x_1x_2x_3),$$

ahonnan

$$f_1 = f - \varphi_1 = -3S(x_1x_2x_3) = -3\sigma_3.$$

Ezért $f = \varphi_1 + f_1 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

Bonyolultabb példákban célszerű előzetesen megállapítani, hogy milyen tagok fordulhatnak elő az adott polinomnak elemi szimmetrikus polinomokkal való kifejezésében, majd pedig meghatározni ezen tagok együtthatóját a határozatlan együtthatók módszerével.

Példák

1. Határozzuk meg az $f = S(x_1^2 x_2^2)$ szimmetrikus polinom kifejezését.

Tudjuk (l. az alaptétel bizonyítását), hogy a keresett $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinom tagjait az $f_1, f_2, \ldots$ szimmetrikus polinomok lexikografikus első tagjai határozzák meg, és hogy ezeket az első tagokat az adott f polinom első tagja, vagyis $x_1^2 x_2^2$ megelőzi. Keressük meg mindazon $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$ alakú szorzatokat, amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek: *a)* nem előzik meg az $x_1^2 x_2^2$ tagot, *b)* szolgálhatnak szimmetrikus polinom első tagjául, azaz eleget tesznek az $l_1 \geqq l_2 \geqq \ldots \geqq l_n$ egyenlőtlenségeknek, *c)* az ismeretlenek összességére nézve 4 a fokszámuk (mivel valamennyi $f_1, f_2, \ldots$ polinomnak, mint tudjuk, ugyanaz a fokszáma, mint a homogén f polinomnak). Ha csak a kitevők megfelelő kombinációit írjuk ki, és mellettük feltüntetjük a σ-k azon hatványszorzatait, amelyeket ezek a kombinációk meghatároznak, a következő táblázatot kapjuk:

$$\begin{aligned} &22000 \ldots \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0} = \sigma_2^2, \\ &21100 \ldots \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0} = \sigma_1\sigma_3, \\ &11110 \ldots \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0} = \sigma_4. \end{aligned}$$

Ezek szerint az f polinom

$$f = \sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4$$

alakú. σ_2^2 együtthatóját 1-nek vettük, minthogy ezt a tagot az f polinom első tagja határozza meg, és együtthatóik, mint az alaptétel bizonyításából tudjuk, megegyeznek. Az A és a B együtthatót a következőképpen határozhatjuk meg.

Legyen $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = \ldots = x_n = 0$. Könnyen látható, hogy az ismeretlenek ilyen értéke mellett az f polinom a 3 értéket veszi fel, a σ_1, σ_2, σ_3 és a σ_4 polinom pedig rendre a 3, 3, 1, 0 értéket. Ezért

$$3 = 9 + A \cdot 3 \cdot 1 + B \cdot 0,$$

ahonnan $A = -2$. Legyen most $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = \ldots = x_n = 0$. Az f, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 polinomok értéke rendre 6, 4, 6, 4, 1. Ezért

$$6 = 36 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + B \cdot 1,$$

ahonnan $B = 2$. Így tehát f keresett kifejezése

$$f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4.$$

2. Határozzuk meg az

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

polinom gyökeinek köbösszegét.

Ezen feladat megoldása céljából határozzuk meg az $S(x_1^3)$ szimmetrikus polinom kifejezését elemi szimmetrikus polinomokkal. Ugyanazt az eljárást alkalmazva, mint az előző példában, kapjuk a

$$\begin{aligned} &3000 \ldots \sigma_1^3, \\ &2100 \ldots \sigma_1\sigma_2, \\ &1110 \ldots \sigma_3 \end{aligned}$$

táblázatot, s ezért

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3.$$

Legyen először $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \ldots = x_n = 0$, azután pedig $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = \ldots = x_n = 0$. Ekkor $A = -3$, $B = 3$, azaz

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \tag{12}$$

Ahhoz, hogy az adott $f(x)$ polinom gyökeinek köbösszegét meghatározhassuk, a Viète-formulák értelmében σ_1 helyébe x^3 együtthatóját kell helyettesítenünk ellenkező előjellel, azaz -1-et, σ_2 helyébe x^2 együtthatóját, azaz 2-t s végül σ_3 helyébe x együtthatóját ellentétes előjellel, azaz -1-et. Így tehát a gyökök köbeinek keresett összege

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2.$$

Az olvasó ellenőrizheti ezt az eredményt, ha figyelembe veszi, hogy $f(x)$ gyökei $i, -i, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Világos az is, hogy a (12) képlet független az adott $f(x)$ polinomtól, és segítségével bármely polinom gyökeinek köbösszege meghatározható.

Az f szimmetrikus polinom elemi szimmetrikus polinomokkal való kifejezésének az a módszere, amelyet az alaptétel bizonyításánál kaptunk, a σ, σ_2, $\ldots$, σ_n elemi szimmetrikus polinomok valamely egyértelműen meghatározott polinomjához vezet. Be lehet bizonyítani, hogy semmiféle más módszerrel sem nyerhető f-nek más kifejezése a σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n polinomokkal. Ezt a következő unicitástétel mutatja:

Minden szimmetrikus polinom csak egyetlen módon fejezhető ki az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Bizonyítsuk be ezt a tételt. Ha a T test feletti $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szimmetrikus polinom két különböző módon lenne kifejezhető σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n segítségével:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

akkor a

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) - \psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

különbség σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n zérótól különböző polinomja volna, azaz nem minden együtthatója lenne zéró; ugyanakkor ez a polinom a $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ gyűrű zéróelemébe megy át, ha benne σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n mindegyikét az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretleneket tartalmazó megfelelő kifejezéssel helyettesítjük. Ezért csak annyit kell bebizonyítanunk, hogy ha a $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinom zérótól különböző, azaz van legalább egy zérótól különböző együtthatója, akkor az a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinom is különbözni fog zérótól, amelyet χ-ből $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-nek a megfelelő elemi szimmetrikus polinomokkal való helyettesítésével kapunk:

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{13}$$

Ha $a\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2} \ldots \sigma_n^{k_n}$ a χ polinom egyik tagja, és $a \neq 0$, akkor minden σ-t az (1) alatti megfelelő kifejezéssel helyettesítve, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olyan polinomját kapjuk, melynek lexikografikusan első tagja, mint az alaptétel bizonyításából már tudjuk, az

$$ax_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2} \ldots (x_1x_2 \ldots x_n)^{k_n} = ax_1^{l_1}x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

tag lesz, ahol

$$\begin{aligned} l_1 &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n, \\ l_2 &= \phantom{k_1 +{}} k_2 + \ldots + k_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n &= \phantom{k_1 + k_2 + \ldots +{}} k_n. \end{aligned}$$

Innen

$$k_i = l_i - l_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$k_n = l_n,$$

vagyis az $l_1, l_2, \ldots, l_n$ kitevők alapján rekonstruálhatjuk a χ polinom kiindulásul szolgáló tagjának $k_1, k_2, \ldots, k_n$ kitevőit. Ezek szerint, ha a χ polinom tagjait $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polinomjainak tekintjük, akkor χ különböző tagjainak lexikografikusan első tagjai különbözők.

Tekintsük most a χ polinom összes tagjait; mindegyiknek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polinomjaként való előállításában keressük meg a lexikografikusan első tagot, és ezek közül válasszuk ki a lexikografikusan legelsőt. Mint fentebb már mondottuk, ezzel a taggal egynevű nincs a χ polinom többi tagjaiból nyert első tagok között, és minthogy ez a tag a feltevés szerint megelőzi mindezen első tagokat, méginkább megelőzi a többi tagot, melyet a χ polinom tagjaiban a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elemeknek az (1) alatti kifejezésekkel való helyettesítése útján nyertünk. Találtunk tehát egy olyan tagot, amely a $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinomról a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinomra való áttéréskor csak egyszer fordul elő (zérótól különböző együtthatóval), s ezért nem eshet ki. Ebből következik, hogy a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinomnak nem minden együtthatója zéró, vagyis ez a polinom nem lehet a $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ gyűrű eleme, amit bizonyítani kellett.

A bebizonyított tételt természetesen a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

A $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok, mint a $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ gyűrű elemei, algebrailag független rendszert alkotnak a T test felett.

54. §. Kiegészítő megjegyzések a szimmetrikus polinomokról

Megjegyzések az alaptételről. A szimmetrikus polinomok alaptételének az előző paragrafusban bemutatott bizonyítása lehetővé teszi, hogy a tétel megfogalmazásához néhány fontos kiegészítést fűzzünk, melyeket az alábbiakban fel is fogunk használni. Először is, annak a $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinomnak az együtthatói, mely az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szimmetrikus polinomnak az elemi szimmetrikus polinomokkal való kifejezését adja, nemcsak hogy a T testben fekszenek, hanem *f együtthatóiból összeadás és kivonás útján állnak elő, vagyis ahhoz az L gyűrűhöz tartoznak, melyet az f polinom együtthatói generálnak a T testen belül.*

Csakugyan, könnyen látható, hogy φ_1-nek, mint az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek polinomjának, minden együtthatója egész számú többszöröse az f polinom a_0 főegyütthatójának [l. az előző paragrafusban az (5) képletet], s így az L gyűrűhöz tartozik. Tekintsük már bizonyítottnak, hogy L-hez tartozik a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ polinomoknak (mint $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polinomjainak) valamennyi együtthatója. Akkor az $f_l = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_l$ polinom együtthatói is L-hez tartoznak, s ezért φ_{l+1}-nek, mint $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polinomjának, szintén minden együtthatója L-ben fekszik.

Másrészt *a $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinomnak $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ összességére vonatkozó együttes fokszáma egyenlő az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinomnak bármely x_i ismeretlen szerinti fokszámával.* Valóban, minthogy az előző paragrafusbeli (2) kifejezés az f polinom lexikografikusan első tagja, azért k_1 az f polinomnak x_1 szerinti, s így a szimmetria miatt bármely más x_i szerinti fokszáma is. Azonban φ_1-nek a σ-k összességére vonatkozó együttes fokszáma az előző paragrafus (5) képlete szerint

$$(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + \ldots + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1.$$

Minthogy továbbá az f_1 polinom lexikografikusan első tagja későbbi, mint az f polinomé, azért f_1-nek az egyes x_i-k szerinti fokszáma nem lesz nagyobb, mint f-nek ezen ismeretlenek szerinti fokszáma. Azonban a φ_2 polinom ugyanazt a szerepet játssza f_1-re nézve, mint a φ_1 polinom f-re nézve, s ezért φ_2-nek a σ-k összessége szerinti fokszáma egyenlő f_1-nek az egyes x_i-k szerinti fokszámával, azaz nem nagyobb k_1-nél és í. t. Így tehát a $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinom foka sem nagyobb, mint k_1. Minthogy pedig $i > 1$ esetén egyetlen φ_i sem tartalmazhatja valamennyi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-nek ugyanazt a hatványát, amelyet φ_1, azért $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ fokszáma pontosan k_1. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Végül legyen a $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ a $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ polinom egyik tagja. Nevezzük ezen tag *súlyának* az

$$l_1 + 2l_2 + \ldots + nl_n$$

számot, azaz a kitevőknek a megfelelő σ_i indexével súlyozott összegét. Ez más szóval a tekintett tagnak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek összessége szerinti együttes fokszáma lesz, amint az a polinomok szorzatának fokszámára vonatkozó, az 52. §-ban bebizonyított tételből következik. Ekkor érvényes a következő:

Ha az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ homogén szimmetrikus polinomnak az ismeretlenek összessége szerinti fokszáma s, akkor ezen polinomnak a σ elemi szimmetrikus polinomokkal való $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ kifejezésében minden tagnak s a súlya.

Valóban, ha az f homogén polinom lexikografikusan első tagja az előző paragrafusbeli (2) kifejezés, akkor

$$s = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Azonban a φ_1 tag súlya az előző paragrafus (5) képlete szerint

$$(k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) + \ldots + (n-1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = \\ = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n,$$

azaz szintén egyenlő s-sel. Továbbá az $f_1 = f - \varphi_1$ polinom mint két s-edfokú homogén polinom különbsége maga is s-edfokú homogén, s ezért a φ polinom φ_2 tagjának is s a súlya és í. t.

Szimmetrikus racionális törtek. A szimmetrikus polinomok alaptétele kiterjeszthető racionális törtek esetére is. Nevezzük az $\frac{f}{g}$ n ismeretlenes racionális törtet *szimmetrikusnak* (az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenekben), ha az ismeretlenek bármely permutációja esetén változatlan marad. Könnyű kimutatni, hogy *ez a definíció független attól, hogy az $\frac{f}{g}$ törtet vesszük-e vagy valamely vele egyenlő $\frac{f_0}{g_0}$ törtet.* Valóban, ha ω ismeretleneink valamely permutációja, φ pedig ezen ismeretlenek polinomja, akkor jelöljük φ^ω-val azt a polinomot, amelybe az ω permutáció φ-t átviszi. A feltevés szerint

$$\frac{f}{g} = \frac{f^\omega}{g^\omega}$$

bármely ω-ra, azaz $fg^\omega = gf^\omega$. Másrészt

$$\frac{f}{g} = \frac{f_0}{g_0},$$

tehát $fg_0 = gf_0$, ahonnan $f^\omega g_0^\omega = g^\omega f_0^\omega$. Megszorozva az utóbbi egyenlőség mindkét oldalát f-fel, kapjuk, hogy

$$ff^\omega g_0^\omega = fg^\omega f_0^\omega = gf^\omega f_0^\omega,$$

ahonnan f^ω-val egyszerűsítve, nyerjük, hogy $fg_0^\omega = gf_0^\omega$, azaz

$$\frac{f_0^\omega}{g_0^\omega} = \frac{f}{g} = \frac{f_0}{g_0}.$$

Érvényes a következő tétel:

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek minden szimmetrikus racionális törtje, melynek együtthatói a T testből valók, előállítható a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok racionális törtjeként ugyancsak a T testből való együtthatókkal.

Valóban, legyen adva az

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

szimmetrikus racionális tört. Feltételezve, hogy a tört egyszerűsíthetetlen, be lehetne bizonyítani, hogy f és g szimmetrikus polinom. A következő út azonban egyszerűbb lesz. Ha a g polinom nem szimmetrikus, akkor szorozzuk meg a számlálót is, a nevezőt is mind az $n! - 1$ olyan polinom szorzatával, amelyet g-ből az ismeretlenek összes lehetséges nemidentikus permutációjával kaphatunk. Könnyű ellenőrizni, hogy a nevező ezek után szimmetrikus polinom lesz. Ebből az egész tört szimmetrikus volta miatt következik, hogy a számláló is szimmetrikus lesz, s ezért a tétel bizonyítása céljából elegendő a számlálót és a nevezőt elemi szimmetrikus polinomokkal kifejezni.

Hatványösszegek. Az alkalmazásokban gyakran fordul elő

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

alakú szimmetrikus polinom, vagyis az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek k-adik hatványának összege. Ezek a polinomok, melyeket *hatványösszegeknek* nevezünk, az alaptétel értelmében kifejezhetők az elemi szimmetrikus polinomokkal. Ezeknek a kifejezéseknek a kiszámítása azonban nagy k-kra rendkívül nehézkes, s ezért érdeklődésre tarthat számot az az összefüggés az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ és a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ polinomok között, melyet az alábbiakban fogunk megállapítan.

Először is $s_1 = \sigma_1$. Továbbá, ha $k \leqq n$, akkor könnyen ellenőrizhetők a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}
s_{k-1}\sigma_1 &= s_k + S(x_1^{k-1}x_2),^{37}\\
s_{k-2}\sigma_2 &= S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
s_{k-i}\sigma_i &= S(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\dots x_ix_{i+1}) \quad (2 \leqq i \leqq k-2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
s_1\sigma_{k-1} &= S(x_1^2x_2\dots x_{k-1}) + k\sigma_k.
\end{aligned}$$

Ha ezen egyenlőségek alternáló (azaz váltakozó előjelekkel ellátott) öszszegét vesszük, majd valamennyi tagot az egyenlet egyik oldalára csoportosítjuk, a következő egyenlőséget kapjuk:

(2) $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0 \quad (k \leqq n).$

Ha viszont $k > n$, akkor az (1) egyenletrendszer az

$$\begin{aligned}
s_{k-1}\sigma_1 &= s_k + S(x_1^{k-1}x_2),\\
s_{k-2}\sigma_2 &= S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
s_{k-i}\sigma_i &= S(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\dots x_ix_{i+1}) \quad (2 \leqq i \leqq n-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
s_{k-n}\sigma_n &= S(x_1^{k-n+1}x_2\dots x_n)
\end{aligned}$$

alakot ölti, amiből az

(3) $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0 \quad (k > n)$

összefüggés következik.

A (2) és a (3) képletet *Newton képleteinek* hívják. Ezek a képletek a hatványösszegeket kapcsolják össze az elemi szimmetrikus polinomokkal, és lehetővé teszik, hogy lépésről lépésre megtaláljuk $s_1, s_2, s_3, \dots$ kifejezését a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomokkal. Tudjuk ugyanis, hogy $s_1 = \sigma_1$ [ez a (2) képletből is következik]. Ha továbbá $k = 2 \leqq n$, akkor (2) szerint $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, ahonnan

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Továbbá $k = 3 \leqq n$ esetén $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$, ahonnan az s_1-re és s_2-re kapott kifejezés felhasználásával nyerjük, hogy

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

[37] Lásd az előző paragrafus (11) képletét.

ami már ismeretes volt [l. az előző paragrafusban a (12) formulát]. Ha viszont $k = 3$, de $n = 2$, akkor (3) szerint $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0$, ahonnan $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. Newton képleteinek felhasználásával meg lehet adni azt az általános képletet, amely s_k-nak a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ függvényekkel való kifejezését szolgáltatja. Ez a formula azonban nagyon bonyolult, s ezért mellőzzük.

Ha a T alaptest karakterisztikája 0, s ezért bármely n természetes számmal való osztásnak van értelme,[38] akkor a (2) képlet alapján lépésről lépésre kifejezhetjük a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomokat az első n hatványösszeg, azaz $s_1, s_2, \dots, s_n$ segítségével. Ugyanis $\sigma_1 = s_1$, s ezért

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1\sigma_1 - s_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2) = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3)$$

és í. t. Ebből és az alaptételből kapjuk a következő eredményt:

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretleneknek a zéró karakterisztikájú T test feletti minden szimmetrikus polinomja kifejezhető az $s_1, s_2, \dots, s_n$ hatványösszegek polinomjaként T-beli együtthatókkal.

Két ismeretlenrendszerre nézve szimmetrikus polinomok. A következő, valamint az 59. §-ban használni fogjuk a szimmetrikus polinomok fogalmának egy általánosítását. Legyen adva ismeretlenek két rendszere, $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_r$, és legyen ezek

(4) $$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r$$

egyesítése algebrailag független a T test felett. Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r)$ polinom *szimmetrikus az ismeretlenek ezen két rendszerére nézve,* ha nem változik az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek egymás közötti és az $y_1, y_2, \dots, y_r$ ismeretleneknek egymás közötti permutációinál. Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemi szimmetrikus polinomjai számára továbbra is megtartjuk a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ jelölést, $y_1, y_2, \dots, y_r$ elemi szimmetrikus polinomjait pedig $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$-rel jelöljük, akkor az alaptétel a következőképpen általánosítható:

A T test feletti minden olyan $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r)$ polinom, amely szimmetrikus az ismeretlenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_r$ rendszerére

[38] p karakterisztikájú testben az $\frac{a}{p}$ kifejezésnek $a \neq 0$ esetén nincs értelme, mivel ebben a testben bármely x elemre $px = 0$.

nézve, előállítható az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek és az $y_1, y_2, \dots, y_r$ ismeretlenek elemi szimmetrikus polinomjainak polinomjaként (T-beli együtthatókkal):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r).$$

Valóban, az f polinomot tekinthetjük olyan $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_r)$ polinomnak, melynek együtthatói $x_1, x_2, \dots, x_n$ polinomjai. Minthogy f nem változik az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek permutálásakor, azért az $\bar{f}$ polinom együtthatói $x_1, x_2, \dots, x_n$-nek szimmetrikus polinomjai, s ezért az alaptétel értelmében előállíthatók $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ polinomjaiként (T-beli együtthatókkal). Másrészt $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_r)$ mint a $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ test feletti polinom szimmetrikus $y_1, y_2, \dots, y_r$-re nézve, s így előáll valamely $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ polinom alakjában. A $\bar{\varphi}$ polinom együtthatói, mint a jelen paragrafus elején láttuk, kifejezhetők az $\bar{f}$ polinom együtthatóiból összeadás és kivonás útján, tehát maguk is polinomjai lesznek $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$-nek. Ez nyilvánvalóan f kívánt kifejezéséhez vezet a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_r$ polinomokkal.

Példa. Az

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1x_2x_3 - x_1x_2y_1 - x_1x_2y_2 - x_1x_3y_1 - x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 - \\ - x_2x_3y_2 + x_1y_1y_2 + x_2y_1y_2 + x_3y_1y_2$$

polinom szimmetrikus mind az x_1, x_2, x_3, mind az y_1, y_2 változókra nézve, de nem szimmetrikus mind az öt változóra nézve, ami ellenőrizhető pl. x_1 és y_1 felcserélésével. Keressük meg f kifejezését a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$ polinomokkal:

$$f = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, y_1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, y_2 + (x_1 + x_2 + x_3)\, y_1y_2 = \\ = \sigma_3 - \sigma_2y_1 - \sigma_2y_2 + \sigma_1y_1y_2 = \sigma_3 - \sigma_2\tau_1 + \sigma_1\tau_2.$$

A most bebizonyított tétel természetesen kiterjeszthető három, sőt több ismeretlenrendszerre is.

Ismeretlenek két rendszerére nézve szimmetrikus polinomokra érvényes az elemi szimmetrikus polinomokkal való előállítás unicitása is, más szóval érvényes a következő tétel:

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ és az $y_1, y_2, \dots, y_r$ ismeretlenek elemi szimmetrikus polinomjainak

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$$

egyesített rendszere algebrailag független a T test felett.

Valóban, létezzék a T test felett a

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$$

polinom, amely egyenlő zéróval, noha nem minden együtthatója zéró. Ez a polinom tekinthető olyan $\psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ polinomnak, amelynek

együtthatói $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ polinomjai. Következésképpen ψ felfogható, mint $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$-nek a racionális törtek

$$Q = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

teste feletti polinomja. Az $y_1, y_2, \dots, y_r$ rendszer a Q test felett is algebrailag független marad: ha ezen rendszer elemei között fennállna valamely algebrai függőség Q-beli együtthatókkal, akkor a nevezők kiküszöbölése után algebrai függőséget kapnánk a (4) rendszerben, ellentétben a feltevéssel. Most az előző paragrafus unicitástételére támaszkodva, azt kapjuk, hogy a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ rendszernek is algebrailag függetlennek kell lennie a Q test felett, s ezért a ψ polinom valamennyi együtthatója zéróval egyenlő. Ezek az együtthatók azonban $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ polinomjai, s ezért, ismét az egyetlen ismeretlenrendszer (ezúttal $x_1, x_2, \dots, x_n$) esetére vonatkozó unicitástétel alapján, ez utóbbi polinomok együtthatói maguk is egyenlők zéróval. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a φ polinom összes együtthatói egyenlők zéróval, ami ellentmond a feltevésnek.

55. §. Rezultáns. Ismeretlen kiküszöbölése Diszkrimináns

Legyen adva az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ polinom a $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ gyűrűből. E polinom *megoldásának* nevezzük az ismeretlenek olyan

$$x_1 = \alpha_1, \qquad x_2 = \alpha_2, \qquad \dots, \qquad x_n = \alpha_n$$

értékrendszerét a T testből vagy annak valamely $\bar{T}$ bővítéséből, melyre az f polinom eltűnik;

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Minden, zérónál magasabb fokú f polinomnak van megoldása: ha az x_1 ismeretlen szerepel a polinom felírásában, akkor $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ gyanánt lényegében a T testnek vagy valamely T^* bővítésének tetszőleges elemei választhatók, csak az a fontos, hogy az $f(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ polinom fokszáma szigorúan pozitív maradjon, s ezután felhasználva a gyökök egzisztenciatételét (50. §), található a T^* testnek olyan $\bar{T}$ bővítése, amelyben az egyismeretlenes (csak x_1-től függő) $f(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ polinomnak létezik valamely α_1 gyöke. Egyúttal azt is láthatjuk, hogy az n-edfokú egyismeretlenes polinomoknak az a tulajdonsága, hogy bármely testben legfeljebb n gyökük van, többismeretlenes polinomokra nem érvényes.

Ha több n ismeretlenes polinom van adva, akkor felvethetjük ezen polinomok közös megoldásainak kérdését, vagyis azon egyenletrendszer

Legyen $a+bi$ adott komplex szám, keressünk olyan $u+vi$ komplex számot, amelyre

$$\sqrt{a+bi} = u+vi, \quad \text{azaz} \quad a+bi = (u+vi)^2.$$

Az utóbbi egyenlőségből

$$a+bi = (u^2-v^2)+2uvi,$$

ahonnan a valós és képzetes részek összehasonlításával a következőt kapjuk:

$$u^2-v^2 = a,$$

$$2uv = b.$$

Az első egyenlőség két szám összegeként is felfogható, s a második egyenlőségből könnyen felírhatjuk ugyanezen két szám szorzatát, s ezzel másodfokú egyenlethez jutunk:

$$u^2+(-v^2) = a,$$

$$u^2(-v^2) = -\frac{b^2}{4}.$$

u^2 és $(-v^2)$ tehát éppen az

$$x^2-ax-\frac{b^2}{4} = 0$$

másodfokú egyenlet két gyöke, azaz

$$\left.\begin{matrix} u^2 \\ -v^2 \end{matrix}\right\} = \frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Mivel u és v valós számok, azért $u^2 \geqq 0$ és $-v^2 \leqq 0$, tehát szükségképpen

$$u^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad -v^2 = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

ahol $\sqrt{a^2+b^2}$ a nemnegatív négyzetgyököt jelenti. Innen

$$u = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad v = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Az u lehetséges két értéke közül bármelyiket választhatjuk, de ennek megválasztása után v-nek már nem akármelyik értéke jöhet számításba, csak az, amelyre a fentieknek megfelelően $2uv=b$. Gyakorlatilag tehát csak u két értékét számítjuk ki négyzetgyökvonással, a megfelelő v-t már könnyebb az $uv=\frac{b}{2}$ összefüggésből kiszámítani. Így látható, hogy $\sqrt{a+bi}$ valóban kétértékű.

Példa

Számítsuk ki $-11+60i$ négyzetgyökét az előbbi képlettel. Most $a=-11$, $b=60$. Ezért

$$u = \pm\sqrt{\frac{-11+\sqrt{(-11)^2+60^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-11+61}{2}} = \pm 5,$$

vagyis

$$u_1 = 5, \quad u_2 = -5.$$

Ennek megfelelően

$$v_1 = \frac{b}{2u_1} = \frac{60}{2\cdot 5} = 6, \quad v_2 = \frac{b}{2u_2} = \frac{60}{2(-5)} = -6.$$

Ezért

$$\sqrt{-11+60i} = \pm(5+6i).$$

11. HARMADFOKÚ EGYENLETEK

Az általános harmadfokú egyenlet

(1) $$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = 0 \quad (a_i \in \mathbf{C};\ a_0 \neq 0)$$

alakban vehető fel.

A másodfokú egyenletnél teljes négyzetre való kiegészítéssel sikerült a gyökképletet megkapni. A harmadfokú egyenletnél arra gondolhatunk, hogy a teljes köbbé való átalakítással kísérletezzünk. A bal oldalon a_0-lal osztva, az első két tag figyelembevételével (1) bal oldala így alakul:

$$\left(x+\frac{a_1}{3a_0}\right)^3-\frac{a_1^2}{3a_0^2}x-\frac{a_1^3}{27a_0^3}+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0} =$$

$$= \left(x+\frac{a_1}{3a_0}\right)^3+\left(\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_1^2}{3a_0^2}\right)x+\frac{a_3}{a_0}-\frac{a_1^3}{27a_0^3} =$$

$$= \left(x+\frac{a_1}{3a_0}\right)^3+\left(\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_1^2}{3a_0^2}\right)\left(x+\frac{a_1}{3a_0}\right)+\left(\frac{2a_1^3}{27a_0^3}-\frac{a_1a_2}{3a_0^2}+\frac{a_3}{a_0}\right).$$

Ha bevezetjük az

$$y = x+\frac{a_1}{3a_0}$$

jelölést, akkor az (1) egyenlet

(2) $$y^3+\left(\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_1^2}{3a_0^2}\right)y+\left(\frac{2a_1^3}{27a_0^3}-\frac{a_1a_2}{3a_0^2}+\frac{a_3}{a_0}\right) = 0$$

alakban vehető fel. Látjuk, hogy a teljes köbbé való kiegészítés nem vezetett megoldáshoz, de az (1)-nél egyszerűbb harmadfokú egyenlethez vezetett. Világos, hogy ha a (2) alatti egyenletet megoldjuk, akkor az (1) alattit is meg tudjuk oldani, hiszen az y-ra kapott bármely értékből x az $x=y-\frac{a_1}{3a_0}$ összefüggés alapján kiszámítható. Ezért elegendő a (2) alakú harmadfokú egyenlettel foglalkoznunk. Ismét bevezetve az y ismeretlen helyett az x jelölést, a (2) alakú harmadfokú egyenletet

(3) $$x^3+px+q = 0$$

21 Algebra és számelmélet – 42 188

alakban vesszük fel. A látottak szerint a harmadfokú egyenletek kérdésénél elegendő a (3) alakúakkal foglalkoznunk, ahol p, q komplex számok.

A klasszikus algebra alaptételéből tudjuk, hogy a (3) egyenletnek mindig van megoldása a komplex számok testében. Legyen z (3)-nak egy megoldása, azaz legyen

$$z^3+pz+q=0. \tag{4}$$

Célunk az, hogy z-t a p, q együtthatók segítségével algebrai úton kifejezzük. Ehhez új ötletekre van szükség. Az új ötletet az juttatja eszünkbe, hogy az $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ azonosság alkalmasan átrendezve (3)-hoz hasonló alakú:

$$(a+b)^3-3ab(a+b)-(a^3+b^3)=0.$$

Ennek alapján gondolhatunk arra, hogy a z komplex számot két komplex szám összegeként vegyük fel, azaz legyen u és v két olyan komplex szám, amelyre

$$z=u+v. \tag{5}$$

Ez az u és v azonban nem egyértelműen meghatározott. Ezért az u és v komplex számokra még egy további kikötést lehet tenni. Ezzel a lehetőségünkkel hamarosan élni fogunk. Helyettesítsük be (5)-öt (4)-be:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0.$$

A bal oldalon a köbre emelést elvégezve, majd $(u+v)$-t kiemelve a következőt kapjuk:

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0. \tag{6}$$

Lényegesen egyszerűbb lenne ez az egyenlőség, ha a közbülső tag nem szerepelne benne. Élve azzal az előbb említett lehetőséggel, hogy az u és v számára még egy kikötést lehet tenni, u-t és v-t úgy választjuk, hogy

$$3uv+p=0 \tag{7}$$

legyen. Látszólag bonyolítottuk a dolgot, mivel most nem a z-t, hanem az u-t és a v-t akarjuk algebrailag kifejezni az eredeti (3) egyenlet együtthatóiból. Ez azonban mégis sikerülni fog. (7) figyelembevételével ugyanis (6)-ból, majd (7)-ből alkalmas átalakítással a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} u^3+v^3&=-q,\\ u^3v^3&=-\left(\frac{p}{3}\right)^3. \end{aligned} \tag{8}$$

A másodfokú egyenleteknél tanultak alapján látjuk, hogy u^3 és v^3 az

$$x^2+qx-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

másodfokú egyenlet két gyöke. Ezt az egyenletet a (3) egyenlet másodfokú *rezolvensének* (=megoldó) nevezzük. Ennek gyökeit pedig gyökképlettel felírhatjuk (az u és v sorrendje közömbös):

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ezért

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{9}$$

ahonnan

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{10}$$

tehát z-t sikerült az együtthatókból algebrai úton kifejezni.

A (10) képlet azonban többértelmű. A négyzetgyök is kétértékű, de ezen értékek felcserélésével csupán u és v szerepe cserélődik fel, tehát a (10) képletben a négyzetgyök nem okoz többértelműséget. Annál inkább meg kell vizsgálni a köbgyököket, hiszen a komplex számok körében a köbgyökvonás mind u-ra, mind v-re három értéket ad. Jelöljük ezeket így: u_1, u_2, u_3, illetve v_1, v_2, v_3. A (10) képlet önmagában nem zárja ki azt, hogy bármelyik u_i bármelyik v_j-vel szerepelhessen összeadandóként. Így (10)-ből összesen kilenc összeget kapnánk. Azonban, ha az előzményeket is figyelembe vesszük, például a (7) összefüggést, akkor látjuk, hogy (10)-ben egy u_i értékhez nem lehet bármelyik v_j-t összeadandóul választani, hanem csak azt a v_j-t, amelyikre

$$u_iv_j=-\frac{p}{3}.$$

Állapodjunk meg abban, hogy v három értéke közül v_i-vel éppen az u_i-hez tartozót jelöljük, azaz amelyre

$$v_i=-\frac{p}{3u_i},$$

Ekkor (10)-ben z-re csak a következő három érték lehetséges:

$$z_1=u_1+v_1,\quad z_2=u_2+v_2,\quad z_3=u_3+v_3. \tag{11}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (3) egyenlet gyökei csupán a (11) alatti értékek lehetnek.

A (11) alatti értékeket még más formában is felírjuk. Tudjuk azt, hogy egy komplex szám köbgyökei az egyik köbgyöknek és a harmadik egységgyököknek a szorzataként előállíthatók. A harmadik egységgyökök:

$$1,\quad \varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ezek felhasználásával (11) így írható:

$$\begin{aligned} z_1&=u_1+v_1,\\ z_2&=\varepsilon u_1+\varepsilon^2v_1=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1),\\ z_3&=\varepsilon^2u_1+\varepsilon v_1=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1), \end{aligned} \tag{12}$$

mivel

$$u_2 = \varepsilon u_1, \quad u_3 = \varepsilon^2 u_1,$$

$$v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3\varepsilon u_1} = -\frac{p}{3u_1}\varepsilon^2, \qquad v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 u_1} = -\frac{p}{3u_1}\varepsilon.$$

Most pedig megmutatjuk, hogy a (11), illetve (12) alatti értékek mindegyike a (3) egyenletnek gyöke. Erről közvetlenül behelyettesítéssel is meggyőződhetünk, mi azonban azt az ezzel ekvivalens tényt mutatjuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3 elemi szimmetrikus kifejezései éppen (3) együtthatóit adják, azaz

$$z_1+z_2+z_3 = 0,$$

$$z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 = p,$$

$$z_1z_2z_3 = -q.$$

Az első (12) alapján nyilvánvaló. A második így látható be:

$$z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 = z_1(z_2+z_3)+z_2z_3 =$$

$$= -(u_1+v_1)(u_1+v_1)+\frac{1}{4}(u_1+v_1)^2+\frac{3}{4}(u_1-v_1)^2 = -3u_1v_1 = p.$$

A harmadik igazolása:

$$z_1z_2z_3 = (u_1+v_1)\left(\frac{1}{4}(u_1+v_1)^2+\frac{3}{4}(u_1-v_1)^2\right) = (u_1+v_1)(u_1^2-u_1v_1+v_1^2) =$$

$$= u_1^3+v_1^3 = -q.$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

11.1. tétel. *A komplex együtthatós $x^3+px+q=0$ harmadfokú egyenlet mindig megoldható algebrailag, gyökeit a*

$$z_{1,2,3} = \varepsilon^i\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\varepsilon^{3-i}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (i=0,1,2)$$

gyökképlet szolgáltatja, ahol a két köbgyök úgy választandó meg, hogy szorzatuk $-\frac{p}{3}$ legyen.

Ezt a gyökképletet *Cardano-féle formulá*nak nevezik.

Nyilvánvaló, hogy semmi akadálya sincs annak, hogy az (1) alatti általános harmadfokú egyenletnek is felírjuk a gyökképletét, azonban bonyolultsága miatt ez nem használatos. Gyakorlatilag egyszerűbb a megoldandó egyenletet a bemutatott módon (3) alakra hozni, ezt megoldani, s ezekből a megoldásokból visszahelyettesítéssel kiszámítani az eredeti egyenlet megoldásait.

Példa

Oldjuk meg az

(13) $$x^3-9x^2+18x+28 = 0$$

harmadfokú egyenletet.

Legyen $x=y+3$. Ennek helyettesítése a következő egyenlethez vezet:

(14) $$y^3-9y+28 = 0.$$

Erre alkalmazva a gyökképletet:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{28}{2}+\sqrt{\left(\frac{28}{2}\right)^2+\left(\frac{-9}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-14+\sqrt{169}} = \sqrt[3]{-14+13} = \sqrt[3]{-1}.$$

Legyen $u_1=-1$. A megfelelő v_1-et így kapjuk:

$$v_1 = \frac{-p}{3u_1} = -\frac{-9}{3(-1)} = -3.$$

(14) gyökei tehát (12) alapján:

$$z_1=-4; \quad z_2 = 2+i\sqrt{3}; \quad z_3 = 2-i\sqrt{3},$$

ahonnan a (13) gyökei

$$x_1 = z_1+3, \quad x_2 = z_2+3, \quad x_3 = z_3+3,$$

azaz

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 5+i\sqrt{3}, \quad x_3 = 5-i\sqrt{3}.$$

Mivel a komplex számok köbgyökeit általában trigonometrikus alakban számíthatjuk ki, és ez többnyire csak közelítő pontossággal végezhető el, a Cardano-féle képlet általában csak közelítő pontossággal adja meg az egyenlet gyökeit. Előfordul az is, hogy a gyökképlet a racionális együtthatós harmadfokú egyenlet racionális gyökeit sem szolgáltatja racionális alakban. A Cardano-formulának még egy érdekessége, hogy ha egy valós együtthatós harmadfokú egyenlet mindhárom gyöke valós, akkor ezeket konjugált komplex számok összegeként adja meg. Erről részletesen a következő paragrafusban lesz szó.

Végül a többszörös gyökök létezésének feltételét vizsgáljuk meg. A (3) egyenletnek akkor és csakis akkor van többszörös gyöke, ha

$$z_1=z_2, \quad z_1=z_3, \quad z_2=z_3$$

közül legalább az egyik teljesül. Ez (12) szerint azt jelenti, hogy az

$$u_1+v_1 = \varepsilon u_1+\varepsilon^2 v_1, \quad u_1+v_1 = \varepsilon^2 u_1+\varepsilon v_1, \quad \varepsilon u_1+\varepsilon^2 v_1 = \varepsilon^2 u_1+\varepsilon v_1$$

közül legalább az egyik igaz. Ezek átrendezéssel így írhatók:

$$(1-\varepsilon)u_1 = (\varepsilon^2-1)v_1, \quad (1-\varepsilon^2)u_1 = (\varepsilon-1)v_1, \quad (\varepsilon-\varepsilon^2)u_1 = (\varepsilon-\varepsilon^2)v_1,$$

ahonnan

$$u_1 = \varepsilon^2 v_1, \quad \varepsilon^2 u_1 = v_1, \quad u_1 = v_1.$$

Ezek mindegyikéből köbre emeléssel $u_1^3=v_1^3$ adódik. Ez pontosan azt jelenti, hogy a másodfokú rezolvens gyökei egyenlők, ami — mint tudjuk — azzal ekvivalens, hogy

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

A későbbiek kedvéért vezessük be a következő jelölést és elnevezést. A

$$D = -108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]$$

kifejezést a (3) egyenlet diszkriminánsának nevezzük. Az előbbiek alapján érvényes tehát a következő állítás:

11.2. *A (3) egyenletnek akkor és csakis akkor van többszörös gyöke, ha diszkriminánsa zérus.*

12. VALÓS EGYÜTTHATÓS HARMADFOKÚ EGYENLETEK

Vizsgáljuk meg most az

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

harmadfokú egyenletet abban a speciális esetben, ha p és q valós számok. Az előző paragrafusban láttuk, hogy a komplex számok körében ennek az egyenletnek a gyökeit a

$$z_1 = u_1+v_1,$$

$$z_2 = \varepsilon u_1+\varepsilon^2 v_1 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1), \tag{2}$$

$$z_3 = \varepsilon^2 u_1+\varepsilon v_1 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)$$

értékek adják, ahol u_1 jelöli az

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{3}$$

három értéke közül bármelyiket, és

$$v_1=-\frac{p}{3u_1}. \tag{4}$$

Ha p és q valós számok, akkor (3)-ban a négyzetgyökjel alatt álló

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

érték szintén valós szám. Három esetet különböztetünk meg.

a) $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$. Ekkor (3)-ban a köbgyökjel alatti kifejezés mindenesetre valós. Valós számnak pedig van valós köbgyöke, ezt jelöljük u_1-gyel. (4) szerint v_1 is valós. Továbbá, a jelen feltevés miatt $v_1 \neq u_1$. Mindezek és (2) alapján z_1 valós, z_2, z_3 (nem valós) komplex szám és $z_3=\bar{z}_2$. Ennélfogva az (1) alakú valós együtthatós harmadfokú egyenletnek $\left(\frac{2}{q}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$ esetén egy valós és két komplex gyöke van, ez utóbbiak egymás konjugáltjai.

b) $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$. Ebben az esetben is legyen u_1 a köbgyök valós értéke.

Nyilvánvaló, hogy v_1 szintén valós. Most a feltevés miatt $u_1=v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$. (2)-ből közvetlenül leolvasható, hogy

$$z_1=2u_1,\quad z_2=z_3=-u_1.$$

Az (1) alatti valós együtthatós harmadfokú egyenletnek tehát $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ esetén mindhárom gyöke valós, és közülük legalább kettő egyenlő.

c) $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$. Mivel most (3)-ban a négyzetgyökjel alatt negatív szám áll, azért a köbgyökjel alatt nem valós komplex szám van. Számítsuk ki bármelyik u abszolút értékét:

$$|u|=\left|\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right|=\sqrt[3]{\left|-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right|}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}}=\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Itt $-\frac{p}{3}$ pozitív, hiszen ez $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ fennállásából $\left(\frac{q}{2}\right)^2\geqq 0$ miatt szükségképpen következik. Ennek alapján bármely v-re

$$v=-\frac{p}{3u}=-\frac{p\bar{u}}{3u\bar{u}}=-\frac{p\bar{u}}{3|u|^2}=-\frac{p\bar{u}}{3\left(-\frac{p}{3}\right)}=\bar{u}. \tag{5}$$

Ezek szerint az összetartozó u, v párok egymás konjugáltjai. Jelölje u_1 most az egyik (nem valós) köbgyököt, amelyet

$$u_1=a+bi$$

alakban vehetünk fel. (5) felhasználásával ekkor (2) így alakul:

$$z_1=2a,$$

$$z_2=-a-b\sqrt{3},$$

$$z_3=-a+b\sqrt{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy az (1) alatti valós együtthatós harmadfokú egyenletnek három különböző valós gyöke van.

Ez az eredmény mutatja azt, hogy abban a fontos esetben, amikor a harmadfokú egyenlet valós együtthatós és a gyökök különböző valós számok, a Cardano-féle képlet a gyököket a komplex számokon keresztül adja meg. Hosszú ideig próbálkoztak a matematikusok azzal, hogy ebben a speciális esetben kizárólag a valós számok körében maradva, algebrai úton kapják meg a gyökképletet. Mivel ez nem sikerült, azért az (1) egyenletnek a $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ esetét *casus irreducibilis*nek (nem visszavezethető eset) szokás nevezni. A már említett Galois-elmélet megoldotta e fáradozások eredménytelenségének az okát. Bebizonyították ugyanis, hogy a valós együtthatós harmadfokú egyenletnek $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ esetén — kizárólag a valós számok körében maradva — nincs gyökképlete.

Trigonometrikus úton azonban a casus irreducibilis esetén is ki lehet számítani a gyököket, kizárólag a valós számok körében maradva. Legyen tehát p, q valós és $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$. Ekkor

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Vegyük fel u^3-t trigonometrikus alakban:

$$u^3=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Ebből

$$r=|u^3|=|u|^3=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}=+\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$\varphi=\arg u^3=\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right).$$

Ennélfogva u három értéke a következő:

$$u=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right)\qquad(k=0,1,2),$$

mivel az előbbiek alapján

$$|u|=\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Tudjuk viszont azt, hogy minden u értékhez tartozó $v=\bar{u}$, ezért

$$v=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right)\qquad(k=0,1,2).$$

Ennélfogva (1) gyökei a casus irreducibilis esetén a következők:

$$z_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$z_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$z_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Példa

Oldjuk meg az

$$x^3-24x-32=0$$

harmadfokú egyenletet.

Jelen esetben

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(-\frac{32}{2}\right)^2+\left(-\frac{24}{3}\right)^3=-256<0,$$

ezért casus irreducibilisről van szó. Trigonometrikus úton oldjuk meg az egyenletet. Számítsuk ki r és φ értékét!

$$r=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{24}{3}\right)^3}=\sqrt{8^3}=\sqrt{4^3 2^3}=2^3\sqrt{8}=16\sqrt{2},$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)=\arccos\frac{32}{32\sqrt{2}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Ennélfogva az adott egyenlet megoldásai:

$$z_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}=4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},$$

$$z_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=4\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4,$$

$$z_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=4\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12}.$$

A z_1 és z_3 értékét más alakban is megkaphatjuk. Mivel -4 gyöke a tekintett egyenletnek, azért az egyenlet bal oldala osztható $(x+4)$-gyel. Így az $x^2-4x-8=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei z_1 és z_3. Ebből a másodfokú egyenletből:

$$z_1=2+2\sqrt{3},\quad z_3=2-2\sqrt{3}.$$

13. NEGYEDFOKÚ EGYENLETEK

A negyedfokú komplex együtthatós egyenletek általános alakja:

(1) $$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0\quad(a_i\in\mathbf{C};\ a_0\neq 0).$$

Elegendő olyan negyedfokú egyenletekre szorítkoznunk, amelyekben harmadfokú tag nem szerepel. Végezzük el az $x=y+c$ behelyettesítést, ahol c egyelőre nem meghatározott konstans, értékét később alkalmasan választjuk meg. Ekkor

$$a_0(y+c)^4+a_1(y+c)^3+a_2(y+c)^2+a_3(y+c)+a_4=0.$$

A hatványozás elvégzése után rendezzük az egyenlet bal oldalát y csökkenő hatványai szerint:

$$a_0y^4+(4a_0c+a_1)y^3+(6a_0c^2+3a_1c+a_2)y^2+(4a_0c^3+3a_1c^2+2a_2c+a_3)y+$$
$$+a_0c^4+a_1c^3+a_2c^2+a_3c+a_4=0.$$

Válasszuk most már c-t úgy, hogy $4a_0c+a_1=0$ legyen, ahonnan $c=-\frac{a_1}{4a_0}$. Azt kaptuk tehát, hogy az (1) egyenlet

$$x=y-\frac{a_1}{4a_0}$$

helyettesítéssel, valamint a_0-val való osztás után az $y^4+py^2+qy+r=0$ alakú negyedfokú egyenlethez vezet. Az y helyett ismét x-et bevezetve, elegendő tehát az

$$x^4+px^2+qx+r=0 \tag{2}$$

alakú komplex együtthatós negyedfokú egyenletekkel foglalkoznunk.

Ha $q=0$, akkor az $x^2=z$ helyettesítéssel z-ben másodfokú egyenletet kapunk, amelynek gyökeiből vont négyzetgyökök szolgáltatják a (2) egyenlet gyökeit. Látható tehát, hogy ebben az esetben (2) algebrailag megoldható.

Példa

Oldjuk meg az

$$x^4-30x^2+289=0$$

negyedfokú egyenletet.

Az $x^2=z$ bevezetésével a

$$z^2-30z+289=0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek gyökei:

$$z_{1,2}=15\pm 8i.$$

Ezekből négyzetgyökvonással:

$$x_1=4+i,\quad x_2=4-i,\quad x_3=-4+i,\quad x_4=-4-i.$$

Legyen ezután $q\neq 0$. Láttuk, hogy a Cardano-képlet alkalmazhatósága is sok nehézséget jelentett, várható tehát, hogy még inkább fokozódnak a nehézségek a (2) alatti negyedfokú egyenletre adható gyökképlet esetén. Éppen ezért most nem explicit gyökképlet megadására törekszünk, hanem olyan módszerrel ismerkedünk meg, amelynek segítségével a (2) alatti negyedfokú egyenletet algebrai úton meg tudjuk oldani. Ha egy $f(x)$ polinom $f(x)=g(x)h(x)$ alakban írható, akkor az $f(x)=0$ egyenlet gyökeit pontosan a $g(x)=0$ és $h(x)=0$ egyenletek gyökei szolgáltatják. Ha tehát (2) bal oldalát sikerül két másodfokú polinom szorzatára bontani, akkor (2) gyökeit ezen másodfokú egyenletek gyökei adják meg.

Kíséreljük meg (2) bal oldalát a következőképpen felbontani:

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c). \tag{3}$$

Ehhez szükséges és elégséges, hogy az együtthatókra teljesüljenek a

$$b+c-a^2=p, \tag{4}$$

$$a(c-b)=q, \tag{5}$$

$$bc=r \tag{6}$$

egyenletek, ahol p, q, r adott komplex számok, a, b, c pedig ismeretlenek. Célunk az a, b, c számok meghatározása. E három egyenlet közül az első kettő így írható:

$$c+b=p+a^2,$$

$$c-b=\frac{q}{a}.$$

(A $q\neq 0$ feltevés miatt ugyanis $a\neq 0$ és $c-b\neq 0$.) Ezekből

$$b=\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right),\quad c=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right) \tag{7}$$

adódik. Ezeket helyettesítsük (6)-ba, s mindjárt szorozzuk meg az egyenletet $4a^2$-nel, ekkor a következőt kapjuk:

$$(a^3+pa-q)(a^3+ap+q)=4ra^2,$$

azaz

$$a^6+2pa^4+(p^2-4r)a^2-q^2=0. \tag{8}$$

Írjunk a^2 helyére y-t, akkor a következő harmadfokú egyenletet kapjuk:

$$y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0. \tag{9}$$

Amint tudjuk, ez a harmadfokú egyenlet algebrailag megoldható. Legyenek (9) gyökei y_1, y_2, y_3. (8) gyökei tehát

$$a_{1,2}=\pm\sqrt{y_1},\quad a_{3,4}=\pm\sqrt{y_2},\quad a_{5,6}=\pm\sqrt{y_3}.$$

Nyilvánvaló, hogy például a_1, majd a_2 behelyettesítése (7)-be csupán b és c felcserélését eredményezi, azaz (3)-ban a jobb oldali tényezők felcseréléséhez vezet. Hasonló igaz a_3 és a_4, valamint a_5 és a_6 esetén. Ez azt jelenti, hogy b-re és c-re lényegében három-három értéket kapunk, amiből az is következik, hogy a (3) felbontás sorrendtől eltekintve háromféleképpen lehetséges. A háromféle másodfokú egyenletpár gyökei azonban sorrendtől eltekintve ugyanazt a számnégyest adják. A (2) egyenlet gyöktényezős felbontásából ugyanis világos, hogy a gyöktényezők párokba való foglalása sorrendtől eltekintve a következőképpen lehetséges:

$$\begin{aligned}x^4+px^2+qx+r &= \big((x-z_1)(x-z_2)\big)\big((x-z_3)(x-z_4)\big)=\\ &=\big((x-z_1)(x-z_3)\big)\big((x-z_2)(x-z_4)\big)=\\ &=\big((x-z_1)(x-z_4)\big)\big((x-z_2)(x-z_3)\big).\end{aligned}$$

Ezek szerint (2) megoldásához elegendő (9)-nek egyetlen gyökét és ennek egyik négyzetgyökét meghatározni, ebből (7) alapján b-t és c-t kiszámítjuk. Az így kapott a, b, c értékek segítségével felírt

$$x^2+ax+b=0,\quad x^2-ax+c=0$$

másodfokú egyenlet gyökei adják a (2) alatti negyedfokú egyenlet gyökeit.

Mivel a (2) egyenlet megoldásának a kulcsát a (9) egyenlet adta a kezünkbe, azért a (9) alatti egyenletet a (2) egyenlet harmadfokú (vagy kubikus) *rezolvens*ének nevezzük.

A fenti eljárásból látható, hogy a negyedfokú egyenlet algebrai úton megoldható.

Példa

Oldjuk meg az

$$x^4+2x^2-24x+72=0$$

negyedfokú egyenletet.

A tekintett egyenlet harmadfokú rezolvense (9) alapján

$$y^3+4y^2-284y-576=0.$$

Ennek egyik gyöke 16. Legyen ezért $a=4$, (7) alapján akkor $b=12$, $c=6$. Ezért

$$x^4+2x^2-24x+72=(x^2+4x+12)(x^2-4x+6).$$

Az $x^2+4x+12=0$ egyenlet gyökei: $-2\pm i\sqrt{8}$. Az $x^2-4x+6=0$ egyenlet gyökei pedig $2\pm i\sqrt{2}$. Ezért a tekintett negyedfokú egyenlet gyökei:

$$-2+i\sqrt{8},\quad -2-i\sqrt{8},\quad 2+i\sqrt{2},\quad 2-i\sqrt{2}.$$

14. ALACSONYABB FOKÚRA REDUKÁLHATÓ EGYENLETEK

Mint már említettük, a Ruffini—Abel-féle tétel nem jelenti azt, hogy a 4-nél magasabb fokú egyenletek közül egyiket sem lehet algebrai módszerrel megoldani. A 4-nél magasabb fokú egyenletek között is vannak olyanok, amelyeket meg tudunk oldani algebrai módszerekkel. Ilyenek a már említett $x^n-a=0$, ún. binom egyenletek is. Ebben a paragrafusban néhány olyan típusú egyenletet tárgyalunk, amelyeket alacsonyabb fokú egyenletekre lehet visszavezetni.

1. Nyilvánvaló, hogy ha az

$$f(x)=0 \tag{1}$$

egyenlet bal oldalán álló $f(x)$ polinom (legalább) két polinom szorzata, azaz

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),$$

akkor az (1) egyenlet megoldása ekvivalens az

$$f_1(x)=0 \quad \text{és} \quad f_2(x)=0$$

egyenletek megoldásával. Ebben az esetben tehát az eredeti egyenletnél alacsonyabb fokú egyenleteket kell megoldanunk.

2. Tekintsünk most egy racionális együtthatós egyenletet. Ebből egy konstanssal (a nevezők legkisebb közös többszörösével) való szorzással mindig egész együtthatós egyenletet kapunk. Legyen a tekintett egész együtthatós egyenlet

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{2}$$

Kézenfekvő, hogy a (2) egyenletnek előbb a racionális gyökeit keressük meg, ha ilyenek egyáltalán vannak. Mely racionális számok lehetnek (2) gyökei? Erre ad feleletet a következő tétel:

14.1. tétel *(Rolle-tétel). A (2) alatti egész együtthatós egyenletnek csak olyan (nem egyszerűsíthető) $\frac{r}{s}$ racionális szám lehet gyöke, amelyre*

$$r|a_n,\quad s|a_0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $x=\frac{r}{s}$ $((r,s)=1)$ racionális szám gyöke (2)-nek, azaz

$$a_0\frac{r^n}{s^n}+a_1\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{r}{s}+a_n=0.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt s^n-nel, akkor

$$a_0r^n+a_1r^{n-1}s+\ldots+a_{n-1}rs^{n-1}+a_ns^n=0.$$

Innen

$$a_ns^n=-r(a_0r^{n-1}+a_1r^{n-2}s+\ldots+a_{n-1}s^{n-1}),$$

illetve

$$a_0r^n=-s(a_1r^{n-1}+\ldots+a_{n-1}rs^{n-2}+a_ns^{n-1}).$$

Minthogy $(r,s)=1$, azért ezekből $r|a_n$ és $s|a_0$ következik, ami bizonyítandó volt.

A tételből az is kiderül, hogy racionális együtthatós egyenletek racionális gyökeit mindig meghatározhatjuk véges számú próbálgatással.

Nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy Rolle tétele csak azt állítja, hogy a (2) egyenlet racionális gyökei ilyen alakúak lehetnek. Azt, hogy egy ilyen alakú racionális szám valóban gyöke-e a (2) egyenletnek, behelyettesítéssel döntjük el.

Ha az derül ki, hogy valamely $\frac{r}{s}$ racionális szám gyöke a (2) alatti egyenletnek, akkor tudjuk, hogy az $x-\frac{r}{s}$ gyöktényező leválasztható, azaz

$$f(x)=\left(x-\frac{r}{s}\right)f_1(x),$$

ahol $f_1(x)$ az $f(x)$-nél eggyel alacsonyabb fokú polinom. Az adott egyenlet megoldását tehát alacsonyabb fokúra redukáltuk. (Ha lehet, akkor az előbbi eljárást $f_1(x)$-re is megismételjük, és így tovább.)

Példa

Oldjuk meg a

$$6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$$

egyenletet.

Előbb azt nézzük meg, hogy van-e racionális gyöke. Rolle tétele szerint ennek az egyenletnek olyan nem egyszerűsíthető $\frac{r}{s}$ racionális számok lehetnek gyökei, amelyekre

$$r|12,\quad s|6,$$

azaz $r=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$; $s=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ lehetséges. A racionális számok közül tehát a következők lehetnek az egyenlet gyökei:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12;$$

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2};$$

$$\pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3};$$

$$\pm\frac{1}{6}.$$

Behelyettesítéssel eldönthető, hogy ezek közül csupán $z_1=-3$, $z_2=\frac{1}{2}$ gyökei az egyenletnek. Az $(x+3)$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ gyöktényezők leválasztása után

$$6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x^2+4x-8).$$

A

$$6x^2+4x-8=0$$