

FELADATOK A „LEKÉPEZÉSEK, PERMUTÁCIÓK” TÉMAKÖRHÖZ

DISZKRÉT MATEMATIKA

4. LEKÉPEZÉSEK

Értelmezési tartomány és értékészlet meghatározása :

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából („zöld könyv”): XIII. fejezet: 1583, 1587, 1588, 1590, 1600.

Matematikai feladatgyűjtemény II. („zöld csíkos”): I./ 22, 43, 44, 50

Szorzás : „zöld csíkos”: I/227, 231, 233

Inverz számítás : „zöld csíkos”: I/236, 239, 241

DM II/10-12.,14-25. feladatok

4.1. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

- (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- (b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
- (c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
- (d) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

Mutasson rá egy példával, hogy általában $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$.

4.2. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékészletét, és döntse el, hogy melyik parciális leképezés, illetve melyik leképezés:

(\mathbb{H} : a sík nemelfajuló háromszögeinek halmaza; \mathbb{E} : az emberek halmaza)

- (a) $\alpha = \{(x, y) : y = |x|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (b) $\beta = \{(x, y) : x = |y|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (c) $\gamma = \{(x, y) : |x| = |y|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (d) $\delta = \{(x, y) : 2x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (e) $\varepsilon = \{(x, y) : x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (f) $\zeta = \{(x, y) : 10x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (g) $\eta = \{(x, y) : x = \lg y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (h) $\vartheta = \{(a, b) : a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;
- (i) $\iota = \{(a, b) : a = b^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

- (j) $\kappa = \{(a, b) : a^2 = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
- (k) $\lambda = \{(a, b) : a \leq b^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;
- (l) $\mu = \{(x, y) : yx = 8\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
- (m) $\nu = \{(x, y) : xy = 4\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
- (n) $\xi = \{(x, y) : x + |y| = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (o) $o = \{(x, y) : y^2 < x\} \subseteq \mathbb{R} \times (-2; 2)$;
- (p) $\pi = \{(a, b) : \sin a = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$;
- (q) $\varrho = \{(x, y) : (x - 1)^2 = 2y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
- (r) $\sigma = \{(x, y) : x + 3 = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
- (s) $\tau = \{(x, y) : \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$;
- (t) $v = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

4.3. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ leképezéseket!

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = x^2$, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\beta = 3x + 1$;
- (b) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = |x|$, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\beta = 2x + 3$.

4.4. Feladat. Tekintsük a következő $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$x\varphi = \begin{cases} -x, & \text{ha } x > 0, \\ x^2, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases} \quad x\psi = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x > 1, \\ 1 - x, & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

Határozza meg a $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ leképezéseket!

4.5. Feladat. Legyen $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tekintsük a következő $\varphi: X \rightarrow X$ leképezést:

$$x\varphi = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \leq 3, \\ 1, & \text{ha } x = 4. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy egyetlen olyan $\psi: X \rightarrow X$ leképezés van, amelyre $1\psi = 3$, és $\varphi\psi = \psi\varphi$!

4.6. Feladat. Adjon minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

- (a) nem szürjektív;
- (b) szürjektív, de nem bijektív;
- (c) injektív, de nem bijektív;
- (d) bijektív.

Igazolja is a fenti tulajdonságokat!

4.7. Feladat. Vizsgálja meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, illetve szürjektívek-e:

- (a) $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = \frac{4}{x}$;
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\beta = 1 - |x|$;
- (c) $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\gamma = 3x^2 - 2$;
- (d) $\delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\} \subseteq [-2; 2] \times [0; 2]$;
- (e) $\epsilon = \{(x, y) : \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}^+$;
- (f) $\zeta = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$;
- (g) $\eta = \{(x, y) : x \text{ hajszálainak száma } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{N}_0$.

4.8. Feladat. Injektívek-e, illetve szürjektívek-e az alábbi leképezések?

- (a) $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto (n-2)^2 + 1$;
- (b) $\beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto |n-3| + 1$;
- (c) $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma;
- (d) $\delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n$ pozitív osztóinak összege;
- (e) $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n$ prímosztóinak száma;
- (f) $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n$ legnagyobb páratlan osztója.

4.9. Feladat. Injektívek-e, illetve szürjektívek-e az alábbi leképezések?

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$;
- (b) $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 2x + 1$;
- (c) $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x-1, 1)$;
- (d) $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$;
- (e) $\zeta: [-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\sqrt{x+3} - 6$;
- (f) $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x+1}{x+2}, & \text{ha } x \neq -2, \\ 1, & \text{ha } x = -2; \end{cases}$
- (g) $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)x(x+1)$;
- (h) $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x + 1$;
- (i) $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto (-1)^x \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$;
- (j) $\lambda: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (n, m) \mapsto nm - n + m$.

4.10. Feladat. Vizsgálja meg, hogy szürjektív-e, illetve injektív-e az alábbi ψ leképezés, és adja meg a $\psi^2 (= \psi\psi)$ leképezést:

- (a) $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, a\psi = (a-2)^2 + 3$;
- (b) $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a\psi = |a+3| - 2$;
- (c) $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a\psi = \begin{cases} \frac{a}{2}, & \text{ha } a \text{ páros,} \\ a, & \text{ha } a \text{ páratlan;} \end{cases}$
- (d) $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a\psi = \begin{cases} a-1, & \text{ha } a < 0, \\ 0, & \text{ha } a = 0, \\ a+1, & \text{ha } a > 0. \end{cases}$

4.11. Feladat. A $\varphi, \psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n\varphi = 2n, n\psi = 2n+1$ leképezésekhez adjon meg olyan $\eta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ leképezést, amelyre $\varphi\eta = \text{id}$ és $\psi\eta = \text{id}$ egyszerre teljesülj.

4.12. Feladat. Jelöljük \mathbb{R}_0^+ -szal a nemnegatív valós számok halmazát és tekintsük ennek a halmaznak az alábbi transzformációját:

$$\varphi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Mutassa meg, hogy φ injektív, és adjon meg két különböző olyan ψ, η leképezést, hogy $\varphi\psi = \varphi\eta = \text{id}_{\mathbb{R}_0^+}$ teljesüljön.

4.13. Feladat. Ellenőrizze, hogy bijektívek az alábbi leképezések, és adja meg az inverzüket!

- (a) $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x\alpha = (x+2)^2 - 4$;
 (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\beta = \begin{cases} 2x-6, & \text{ha } x \geq 4, \\ \frac{1}{4}x+1, & \text{ha } 0 \leq x < 4, \\ -x^2+1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$;
 (c) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \times [0; 1)$, $x\gamma = ([x], \{x\})$.

4.14. Feladat. Tekintsük a következő $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$x\varphi = \begin{cases} 1-x, & \text{ha } x \geq 0, \\ x^2, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad x\psi = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ x-1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Határozza meg a $\varphi\psi$ és $\psi\varphi$ szorzatokat, és vázolja a grafikonjukat. Igazolja, hogy $\psi\varphi$ bijektív, és adja meg az inverzét. Injektív-e, illetve szürjektív-e az $\varphi\psi$ leképezés?

4.15. Feladat. Határozza meg a értékét úgy, hogy ψ bijektív legyen, majd adja meg az inverzét:

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\psi = \begin{cases} \frac{3x+2}{-x+5}, & \text{ha } x \neq 5, \\ a, & \text{ha } x = 5. \end{cases}$$

4.16. Feladat. Adjon meg minél egyszerűbben olyan φ és ψ leképezéseket, amelyekre

- (a) a $\varphi\psi$ szorzat injektív, de φ és ψ közül legalább az egyik nem injektív;
 (b) a $\varphi\psi$ szorzat szürjektív, de φ nem az.

4.17. Feladat. Legyen $\varphi: A \rightarrow B$ tetszőleges, $\psi: B \rightarrow C$ bijektív leképezés. Mutassa meg, hogy $\varphi\psi$ akkor és csak akkor injektív, ha φ az.

5. PERMUTÁCIÓK

DM II./26.-30. feladatok

5.1. Feladat. Mely permutációk azonosak π_1 -gyel, és melyek különböznek az alábbi permutációk közül? (Válaszát indokolja!)

$$\pi_1 = (1234) \in S_4, \quad \pi_2 = (1234) \in S_5, \quad \pi_3 = (4321) \in S_4, \quad \pi_4 = (3412) \in S_4$$

5.2. Feladat. Tekintsük a következő S_5 -beli permutációkat:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ada meg az $(\alpha\beta)^2$, $\alpha^2\gamma$, $\alpha^2\beta^2$, $\gamma\alpha^2$ permutációkat idegen ciklusokra bontott alakban.

5.3. Feladat. Adja meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat, és számítsa ki az $\alpha^{-1}\beta$ és $\beta^2\alpha$ szorzatokat.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5.4. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

$$(a) \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{2002};$$

$$(b) \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2002}.$$

5.5. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

$$(a) (2341)(5126);$$

$$(b) ((5621)(3421))^{-1};$$

$$(c) ((152)((1546)(47523))^{-1})^{2001};$$

$$(d) ((1546)((47523)(152))^{-1})^{2002};$$

$$(e) (2134)^{-1}((123)(431))^{101};$$

$$(f) ((2134)(123))^{-1}(431)^{101};$$

$$(g) ((123)(347))^{-1}(567321)^{65};$$

$$(h) ((241)^2(25614)^{-1})^{26}(1345);$$

$$(i) ((1456)^{18}(613)(245)^{-1})^3;$$

$$(j) ((136)(14563)^{17}(245)^2)^{-1};$$

$$(k) ((134)^{47}(23671)^{-1})^3;$$

$$(l) ((236)^{29}(1453)^{-1}(27))^2;$$

$$(m) ((347)^{40}(26))^2(1573)^{-1};$$

$$(n) ((123)^{-1}(2345)(123)(4567))^{2002}(13);$$

$$(o) \left(((123)(1234))^{-1}(3456)(123) \right)^{2002}(12);$$

$$(p) ((45723)(1324))^{17}((1273)(534))^{-1};$$

$$(q) (13)((12346)(7531)^{-1})^{2000}(142)^{-2}.$$

5.6. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} (234)^{-1}(1452);$$

$$(b) ((1345)(234)(123))^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^4;$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{23} ((765)(543))^{-1};$$

5.7. Feladat. Legyen $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként a $\pi((124)(567))^{-1}$ és a π^{2002} permutációkat.

5.8. Feladat. Mely $\pi \in S_5$ permutációra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$\pi(12)(34)\pi = \pi(125)\pi^{-1}(23)\pi.$$

5.9. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként azokat a $\gamma \in S_3$ permutációkat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

- (a) $(231)\gamma(32) = \text{id}$;
- (b) $(12)\gamma(123) = \text{id}$.

5.10. Feladat. Határozza meg azokat a $\sigma \in S_7$ permutációkat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

- (a) $(136)\sigma(345) = (412)$;
- (b) $(153)\sigma(621)(413) = (315)$;
- (c) $(621)(413)\sigma(153) = (315)$;
- (d) $(142)(135)\sigma(267) = (12)$;
- (e) $(125)\sigma(137)(267) = (34)$;
- (f) $(123)(45)\sigma(142) = (213)^5$;
- (g) $(1263)(413)\sigma(514) = (12346)^6$;
- (h) $(1452)^{-1}(4531)\sigma(143) = (123546)^7$.

5.11. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként azokat a $\varrho \in S_7$ permutációkat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

- (a) $(326)\varrho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{2000} = (24)$;
- (b) $((4563)(34))^{-10}\varrho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = ((1273)(534))^{6002}$;
- (c) $((324)(13))\varrho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{2001} = ((123)(14))^{-2}$;
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{1611}\varrho^{-1}(12)(23)(34) = (147)$;
- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2003}\varrho^{-1}(275)(132) = (56)$.

5.12. Feladat. Oldja meg S_3 -ban a $\sigma^2 = (123)$ egyenletet.