POLYGON PÁLYÁZAT MATEMATIKÁBÓL KÖZÉPISKOLÁSOKNAK
2017/18.

Absztraktok

Encz Koppány:

A Simson-egyenes

A geometria egyik legérdekesebb, legváltozatosabb ága a háromszög nevezetes vonalaival, pontjaival, köreivel foglalkozó terület. Ezen belül is kitüntetett helyet foglal el az egyik kevésbé ismert nevezetes vonal, a Simson-egyenes témaköre. Rendkívül sok érdekes tétel, összefüggés kapcsolódik ehhez a témához, melyek között vannak egyszerűbbek, (például a Simson-egyenesek létezésének igazolása sem igényel mély szakmai ismereteket), néhány szép tétel igazolásához azonban már komoly háttértudás szükséges (például a Simson-egyenesek burkoló görbéjét érintő összefüggések). A pályázat célja e gazdag tételcsokor egy kis szeletének felmutatása, esetleg az érdeklődés felkeltése a témába való komolyabb elmélyülés iránt.

Geometriai szélsőérték-feladatok vizsgálata Geogebra segítségével

Markó Gábor

Ebben a cikkben néhány nevezetes geometriai szélsőérték-feladatot mutatunk be bizonyításukkal együtt, szemléltető ábrák segítségével. Megvizsgáljuk a hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének egy minimum tulajdonságát, amelynek a matematika sokoldalúságának köszönhetően több különböző levezetése is ismert. Tanulmányozzuk a jeles magyar matematikus, Fejér Lipót által kidolgozott elemi megoldást, továbbá Schwarz megállapítását is igazoljuk. Bemutatjuk a háromszög izogonális pontjának tulajdonságait, valamint adunk egy bizonyítást az ismert magyar matematikus, Erdős Pál nevéhez fűződő Erdős-Mordell egyenlőtlenségre. A tételek igazolásán kívül továbbgondoljuk a feladatokat és azok jelentőségét. Emellett minden feladathoz a GeoGebra geometriai szerkesztőprogram segítségével készült animációkat mellékelünk. A nehezebb szerkesztések a programnak köszönhetően jól szemléltethetők, a bizonyítandó állítások helyessége pedig könnyen megsejthető az animációk segítségével. A cikkhez tartozó szerkesztések megtalálhatók a cikk mellékletét képző CD-n.

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

SZÉCHENYI 2020
MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Záhorsky Ákos:

Érdekességek a körök és háromszögek geometriájából:
A pályamunka a háromszögek különleges ún. nemközéppontjaival foglalkozik (olyan pontok a háromszögben, melyek definíciója a háromszög szögeire vonatkozóan nem szimmetrikus (pl. oldalfelező pontok, hozzáírt körök középpontjai...). Azok közül is az ún. Švrček-ponttal, amely a csúcs melletti belső szögfelezőjének, az azzal szembeni oldal felezőmerőlegesének és a háromszög körülírt körének közös pontja. Ez a 3 pont, és a velük szembeni Antišvrček-pontok figyelemreméltó kapcsolatot teremtenek a körülírt kör és a beírt- illetve hozzáírt körök között (természetesen a Feuerbach-körvonal is említést kap ezen a körtalálkozón). A cikk második harmadában megismerkedünk a magasságpont valamilyen értelemben vtt legközelebbi rokonaival, köztük a Brocard-pontokkal és magasságpontt súlyvonalakra vett merőleges vetületeivel. A cikk utolsó harmadában az oldalak egymásba vitelét vizsgáljuk a nem csúcsközéppontú forgatva nyújtásaikkal, és ezeknek a középpontjait vizsgálva teszünk rengeteg érdekes megállapítást. Aztán meglepődve vesszük észre, hogy a második és harmadik harmad pontjai között igen szép párosítás van: az előbbi 3 pont izogonális konjugáltjai rendre az utóbbi 3 pont. Néhány további kör berajzolásával aztán belátjuk, hogy tulajdonképpen a Feuerbach-kör- és a háromszög kapcsolatáról láttunk be valamit. Végül pedig általánosítjuk a tételünket, így megkapva a gyengített Barrow-tételt.

Ruff István Zalán:

Játék a számokkal, számelméleti kalandozás egy OKTV-feladat kapcsán

A dolgozatomban arra keresem a választ, hogy melyik egész számok állíthatók elő úgy, hogy egy másik egész számot elosztunk az első számjegye elhagyásával kapott számmal.

A kérdés egy OKTV-feladat továbbgondolásából származik, amely úgy tette fel a kérdést, hogy 57-re találjunk megoldást. Először fejben megnéztem, melyik kétjegyű számok adnak egész eredményt, ha elosztom őket utolsó számjegyükkel. Következőnek lefuttattam egy programot 10000-ig, amely a hányadosok között csupán néhány új egész számot talált.

Nem álltam meg itt, hanem tudni akartam, hogy vajon a végtelenségig folytatva jelentősen több számot lehet a kérdésben szereplő módon megkapni, vagy örökké szórványos jelenség marad.

A feladatot hallva gondolhatjuk, hogy a számok igen kicsiny része lesz egész, ha elosztjuk az utolsó számjegyükkel. Arra nem biztos, hogy számítunk, hogy a hányadosok is egészen kis

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

halmazból kerülnek ki. Ha pedig mégis így gondoljuk, valószínűleg egy nevezetes számhalmazt képzelünk el. Azonban a számok, amelyeket meg lehet kapni az említett módon, relatív prímek. Nemcsak osztóikat illetően, de más szempontból sincsen sok közük egymáshoz, például szerepel köztük a 16, a 17 és az 51, de nem szerepel a 48. A kétjegyű prímszámok közül szerepel csaknem mind, de mégsem találjuk a halmazban például a 23-at vagy a 89-et. Egyetlen 2-hatvány szerepel a halmazban: a 16. Látszólag tehát semmilyen szabályszerűség nem vehető észre.

Elegendő azonban egy apró változtatást végrehajtani a halmazon, és máris látható lesz, melyik számok kerültek bele, sőt, már sejtjük a probléma megoldását más számrendszerekre is…

Bánszki Bea: Egy Csodálatos Elme - Blackout

Dolgozatomban az **Egy Csodálatos Elme** c. film által ismertté tett logikai játékkal, a ***Blackout***tal foglalkoztam. Ennek az egyszemélyes játéknak a lényege, hogy egy 3x3-as táblán kétszínű korongokat fordítunk felfelé vagy lefelé. A cél az, hogy mind a 9 korong egyszínű legyen, természetesen minél kevesebb lépésben.

A játék mögött rejlő matematika megkeresésével bebizonyítottam, hogy minden 3x3-as játéknak van megoldása, és minden állást maximum 6 lépésben meg lehet oldani. A bizonyításhoz egy 9 ismeretlenes egyenletrendszert használtam, amelyben az ismeretleneket a 9 lehetséges lépés adta, hiszen 9 különböző mezőre lehet kattintani. Az egyenletrendszerre kapott megoldás megmutatta, hogy melyik mezőre kell klikkelnünk ahhoz, hogy a táblán csak egyféle színű korongok legyenek. Az egyenletrendszert legkönnyebben mátrixokkal lehet felírni, ami szemléletesen mutatja a különböző lépéseket.

Azt, hogy minden lehetséges állásnak van megoldása, a mátrixok determinánsának vizsgálatával tudtam megállapítani. Ekkor már nemcsak a 3x3-as játékkal foglalkoztam, hanem a 4x4-es, 5x5-ös és 6x6-os játékok megoldhatóságát is vizsgáltam.

SZÉCHENYI 2020

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

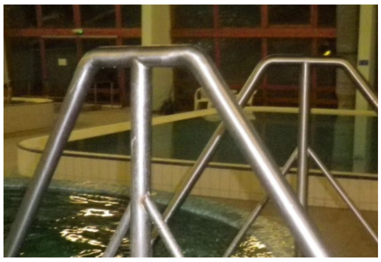
„*Majdnem*”-matematika a túrkevei fürdő vizuális érdekességeiből kiindulva

Domokos Konrád
Felkészítő tanár: Achs Károly
Karcagi SzC Teleki Blanka Gimnáziuma, Szakgimnáziuma és Kollégiuma, Mezőtúr

A túrkevei strandnak és felkészítő tanáromnak köszönhetően „fedeztem fel”, hogy nem csak a füzetemben tudok szemezni szinuszhullámokkal, és nem csak táblára rajzolt parabolák léteznek. A körülmények miatt nem tökéletes görbéket, csak majdnem-szinuszt, majdnem-parabolát, majdnem-ellipszist láthatunk a felvételeken.

Ezért pályamunkámat a „majdnem” szó alapozta meg. Az első fejezetben felsorolok néhány kirajzolódó függvényt: a medence falán látható sinx-et, a vízsugár paraboláját, a tető chx-ét, a merevítő $|x|$-ét.

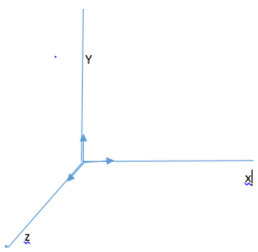
Később két, ellipszisnek látszó kör alakú szellőző pixeleiből számolva becsülöm meg a szellőzők magasságát, egy eresz látványának módosulását pedig a GeoGebra segítségével modellezem.



Végül a jakuzzi korlátjából kiindulva néhány lépést teszek a fuzzy logika felé, amely matematikai környezetbe próbálja tenni az ilyen szavak sorát, mint az *alig, kicsit, félig-meddig, nagyjából, majdnem*: egy órán vett matematikai példa határvonalát próbálom elmosódottá tenni, illetve a mindennapi életből vett drámás improvizációkkal bemutatni az éles és életlen szituációk megoldásának különbségét.

Az egyenes egyenletei a síkban és a térben

Készítette: Tóth Boglárka, XI.A osztályos tanuló
Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Témavezető: Mészár Julianna tanárnő



A dolgozatomban az egyenes egyenleteivelfoglalkoztam, összehasonlítva az egyenletek alakját a síkban és a térben.

Az iskolában tanultuk az egyenes egyenleteit a síkban.

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

Ez a része a koordinátageometriának felkeltette az érdeklődésemet. Kíváncsi lettem, hogy miként jelennek meg ezek az egyenletek a három dimenziós térben.

A dolgozat elkészítése során azt vettem észre, hogy az egyenes térbeli egyenleteinek felírásakor a keletkező képletek nagyban hasonlítanak az egyenes síkbeli egyenleteihez. A különbség az, hogy megjelenik a harmadik dimenzió, a z koordináta, miként a derékszögű koordináta-rendszer megrajzolásakor is megjelenik a harmadik tengely, amely merőleges az xOy síkra.

Dolgozatom két részből áll. Az első részben összefoglaltam azokat a képleteket, amelyeket az egyenesről tanultam a síkban és ezeket illusztráltam néhány példával, alkalmazással.

A második részben a sík és az egyenes térbeli egyenleteivel foglalkoztam. Mindegyik egyenlethez kerestem olyan feladatokat, amelyek megoldásához alkalmazni kellett az általam bemutatottsík és egyenes képleteit a térben.

Az egyenes egy kiterjedésű (egy dimenziós), a sík két dimenziós, a tér három dimenziós.

A térben a síkot egy egyenlet írja le. Az egyenes a térben úgy jelenik meg mint két különböző, nem párhuzamos sík metszete, mert ha két különböző síknak van közös pontja, akkor a közös rész egy egyenes.Ha egy metszetből kapott matematikai objektumot akarunkmeghatározni, akkor megoldjuk az egyenleteik által alkotott egyenletrendszert.

Azt tapasztaltam, hogy nagyon hasonlatos a sík és a tér egyeneseinek a tanulmányozása.

Kombinatorika

Készítette: Filep Lilla, XI.A osztályos tanuló
Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Témavezető: Mészár Julianna tanárnő

Dolgozatomban megpróbáltam bemutatni diáktársaimnak, hogy az iskolában tanult matematikát a való életben is használjuk. Bár ennek most csupán a kombinatorikai ágazatát tárgyaltam és próbáltam példáimon keresztül vonzóbbnak feltüntetni mások előtt, de úgy gondolom, hogy ez a tudományág több mint számok és betűk bonyolult halmaza, hisz különböző területeken dolgozó szakemberek is gyakran találkoznak tárgyak kiválasztására, sorrendjére, szétosztására vonatkozó feladatokkal. Ma a kombinatorikai módszereket a matematika és az alkalmazások, mint például a bankrendszerek, információ tárolás és továbbítás, digitális technika nagyon sok területén használják, egyszerű kombinatorikai feladatok megoldása nélkül nagyon sok technikai eszköz megalkotása nem lehetett volna megvalósítható.

Pályamunkámban a kombinatorikai szabályok ismertetése után megvizsgáltam ezek gyakorlati alkalmazását: egy csoport részcsoportba sorolását, a lottójáték nyerési esélyét, függvények számát az értelmezési és értéktartomány függvényében, a nagyszalontai park egyes útszakaszának a lekövezési módjainak a számát, ruletten való nyerés lehetőségét. Érdekelt a személyiségtípusok és temperamentumtípusok egymáshoz való viszonya és ennek hatása a pályaválasztásra. Valamint megvizsgáltam az iskola gyorsbüféjéből való étel és üdítőfogyasztás eseteit.

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

Számtani és mértani haladványok

Szommer Petra: XI. osztály
Tasnádi Technológiai Liceum
Irányítótanár : R□ff Zsófia

A számtani és mértani sorozat fogalmát már az ókori egyiptomiak is ismerték, az összegükkel is foglalkoztak. A Rhind-papiruszon a található a következő feladat megoldása: *„Ha 7 ház mindegyikében 7 macska van, mindegyik megfogott 7 egeret, minden egér megevett 7 búzaszemet, minden búzaszemből 7 hekat búza termett volna, hány hekat búza lett volna abból?”*. A feladat nyilvánvalóan a mértani sorozat tagjainak az összegéhez vezet. Valószínű, hogy az általános képletet nem ismerték.

A legegyszerűbb, mindenki által ismert számtani sorozat: 1, 2, 3, 4,... és a mértani sorozatok közül: 1, 2, 4, 8, …

Ezeknek a segítségével mutattam be módszereket számtani vagy mértani halavány tagjainak az összegének a kiszámítására. A dolgozat következő részében szemléletes bizonyítások segítségével meghatároztam az első n pozitív páratlan szám, az első n pozitív páros szám és az első n négyzetszám összegét.

Olyan módszereket kerestem, melyekkel ki lehet számítani és általánosítani a következő összegeket:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}, n \in N^*.$$

a) $$S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, n \in N^*.$$

$$S_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n, n \in N^*.$$

Bibliográfia:

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

1. https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mattan/2011/matusik_edina.pdf
2. http://math.ubbcluj.ro/~andrasz/dokumentumok/kv/sorozatok.pdf
3. https://hu.wikipedia.org/wiki/Rhind-papirusz
4. http://tamop412.elte.hu/tananyagok/algoritmusok/lecke8_lap1.html
5. http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/osszegek/index.html

A KOMPLEX SZÁMOK ALKALMAZÁSAI

MEZŐSI HELGA, XII. osztály
TASNÁDI TECHNOLÓGIAI LICEUM
Irányitótanár: Mezősi Edith

Matematika órán gyakran feltesszük azt a kérdést, hogy a tanultakat hol fogjuk majd felhasználni. Ezért úgy gondoltam, hogy a választott témámhoz több felhasználási területet is bemutatok.

Dolgozatomban a komplex számok eredetét és tulajdonságait mutattam be először, hogy miért volt fontos ezeknek a számoknak a bevezetése. Utána mértan feladatokat oldottam meg a komplex számok segitségével, ez a módszer kicsit szokatlanabb és talán ezért érdekesnek tűnik. Dolgozatom végén pedig egy fizika feladatot oldottam meg a komlex számok segitségével, amelyben egy váltakozó áramú áramkör jellemzőit kellett kiszámitani.

Talán ezekkel a példákkal sikerül közelebb hozni a száraz elméletet a gyakorlathoz, hogy miért is van helyük ezeknek a matematikai fogalmaknak a tananyagban.

Varga Zita:

Fraktálok

Pályamunkámban célom volt bemutatni a környezetünkben lévő fraktálokat. Kicsiny városom, Makó természeti szépségeit is megmutatva bontottam fel a Maros folyó kanyarulatait szakaszokra, melyekből egy idő után tisztán kivehetővé vált az ismétlődő rész. Másban is próbáltam meglátni a rejtett fraktált, ekkor fedeztem fel a folyosó végén álló páfrány egyre kisebb leveleit, amelyek szintén sorozatosan követték egymást. Az ablakon kinézve az ablaküvegen csillogó dér és hópelyhek kristályos szerkezetét vizsgálva találtam meg egy újabb fraktált közvetlen környezetemben. Rájöttem, hogy én magam is képes vagyok fraktált alkotni ismétlődő formák segítségével, és ehhez a Geogebra síkidomszerkesztő-programot választottam. A fraktál alapja egy félkör, melyet 60°-os szögekkel osztok 3 részre, majd a három részből kiválasztok 2-2

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.

egymás melletti pontot, melyekkel újból ismétlem az eljárást a végtelenségig. Véleményem szerint, ha elég időt és energiát szánunk ilyen apróságokra, akkor megláthatjuk a fraktálokban rejlő szépséget, és a bonyolult alakzatok lenyűgöző formavilágát.

Kovács Zsófia, Ottó Panna, Gazda Fanni:

Összefoglaló

Projektünkben a végtelennel kapcsolatos pár problémát vetettünk fel, és állításokat igazoltunk. Az első a Kronecker-tételhez kapcsolódó gyengébb állítás volt, miszerint a π-t és annak többszöröseit 11-szereséig vizsgálva találunk köztük 2-t úgy, hogy azok adott helyiértékeken végtelen számjegyben megegyeznek.
Ezután azt bizonyítottuk be: Ha $a; b \in Z$ és $z \in Q^*$, akkor $a + b \times z$ alakú számok sűrűk R-ben, és biztos, hogy egy egész számhoz találunk 1/100-nál közelebb esőt.
Továbbá a munkánk közben felvetődő, a végtelen megfoghatatlansága okozta kérdésekre tértünk ki.(Pl: $1 = 0{,}999 \ldots$)
A közös munka során nemcsak sok érdekes dologra derült fény, hanem jó társasági program is volt.

Xu Dávid:

A végtelen a matematikában

A pályamunkámban a végtelen történetét jártam be a legősibb filozófiaitól a modern matematikai értelmezéséig, majd a számosságokról kezdtem el feladatokat tárgyalni. Először az egyiptomi feljegyzésekben találtam említést róla, ahol a világ végtelenségéről, úgynevezett kozmikus végtelenként volt említve, de feltehetően már ősibb civilizációknak is volt képe róla. Először a görögök fogalmazták meg, de nem tartották a végtelent a matematika nyelvével leírhatónak. Az ókori indiai kultúrában is esik szó a végtelenről, de ekkor már a számossághoz jóval közelebb állt, ekkor volt először nagyságrendekre osztva(Kr.e. 400), és emellett még több vallási iratban is megtalálható. Később először Galilei és Salviati munkássága folytatta a szálat (1638 körül). Végül a pályamunkám fókuszáról, Cantor munkásságáról írtam(1874-84), a számosságokra, és a végtelen halmazokra koncentrálva, majd ezekhez kapcsolódó feladatokat írtam le, melyek során az alef null és continuum számosságú halmazok tulajdonságait vizsgáltam meg bijekció segítségével.

A program az EFOP-3.4.4-16-2017-00015, a Szegedi Tudományegyetem készségfejlesztő és kommunikációs programjainak megvalósítása a felsőoktatásba való bekerülés előmozdítására és az MTMI szakok népszerűsítésére c. pályázat keretében valósul meg.