Többváltozós függvények

Feladatok

2010. szeptember 30.

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, illetve torlódási pontjait!

1. $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n^2+1}{n^3}\right)$
2. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \frac{n^5}{5^n}, \frac{n^2+2n+1}{\sqrt{n}+1}\right)$
3. $\left(\sin(n\pi/2), \frac{100^n}{n!}\right)$

Határozzuk meg és ábrázoljuk az alábbi többváltozós függvények értelmezési tartományát!

4. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$
5. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
6. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$
7. $f(x,y,z) = \ln(xyz)$
8. $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$
9. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \arcsin(x) - \arcsin(y)$
10. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}$
11. $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y^2}$
12. $f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$
13. $f(x,y) = \arcsin(2y(1+x^2)-1)$

14. $f(x,y) = \arcsin(y - |x-1| - |x+1|) + \sqrt{(1-x)^2 - (y-2)^2}$

15. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4(x+y) + 7} - \sqrt[6]{x^2 - 4x + y^2 + 3}$

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és szintvonalait!

16. $f(x,y) = x^2 + y^2$

17. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

18. $f(x,y) = |x| + y$

19. $f(x,y) = \min(x^2, y)$

20. $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

21. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

22. $f(x,y) = \sqrt{|x| - |y|}$

23. $f(x,y) = 3 + \sqrt{16 - x^2 + 4x - y^2 + 8y}$

24. $f(x,y) = \sqrt{-1 + 2x^2 + 4y^2}$

25. $f(x,y) = \ln\sqrt{1 - |x+y|}$

26. $f(x,y) = \sqrt{\ln \operatorname{ctg}(x^2 + y^2)}$

27. $f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$

Számítsuk ki a következő határértékeket:

28. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

29. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

30. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$

31. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{\sin(x^2+y^2)}}$

32. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{\tan(x^2+y^2)}\right)$

33. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin(x)+x^2\sin(y)}{xy}$

34. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

35. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

36. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

37. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2y-x^2}{x^2+y^2-2y+1}$

38. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

39. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

40. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

41. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ és $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$ iterált határértékeket az alábbi esetekben:

42. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad (a,b) = (0,0)$

43. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} \quad (a,b) = (\infty,\infty)$

44. $f(x,y) = \frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy} \quad (a,b) = (0,\infty)$

Igazoljuk, hogy az alábbi határértékek nem léteznek; léteznek-e az ismételt határértékek? Ha igen, számítsuk ki!

45. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

46. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-1)+y(y+1)}{x+y}$

47. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

48.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } xy \neq 0, \\ 0, & \text{ha } xy = 0. \end{cases} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

49.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < y < x^2,\ x \in \mathbf{R}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

50. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0+)} \frac{x^y}{1+x^y}$

51. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$

Hol folytonosak az alábbi függvények? Ábrázoljuk a szakadási helyeket:

52. $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}$

53.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

54.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^4}{x^4+y^4}, & x^4+y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4+y^4 = 0. \end{cases}$$

55.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^4}, & |y| < x^2, \\ 1, & |y| \geq x^2. \end{cases}$$

56.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{y}\right|, & |y| \leq |x|,\ 0 < |x| \leq 1, \\ 1, & |y| \geq |x|,\ 0 < |x| \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

57.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^3+y^3}, & x+y\neq 0,\\ \frac{1}{x^2-xy+y^2}, & x+y=0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

58.

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

59.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, & x^4+y^4\neq 0,\\ 0, & x^4+y^4=0.\end{cases}$$

60.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0{,}0),\\ 0, & (x,y)=(0{,}0).\end{cases}$$

61.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0{,}0),\\ 0, & (x,y)=(0{,}0).\end{cases}$$

62.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0{,}0),\\ 0, & (x,y)=(0{,}0).\end{cases}$$

Hol differenciálhatók parciálisan x, illetve y szerint az alábbi függvények? Számítsuk is ki a deriváltakat!

63. $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$

64. $f(x,y)=\frac{1}{\sin(x)-\sin(y)}$

Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjainak az adott helyeken felvett értékét!

65. $f(x,y) = \tan \frac{y^2}{x}$, (1,2)

66. $f(x,y) = \arccos(x+y)$, $(0, \frac{1}{2})$

67. $f(x,y) = x^y$, (1,1)

68. $f(x,y) = \log_x(y)$, (2,3)

69. $f(x,y) = (\sin x)^{\cos y}$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$

70. $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, (2,3)

Határozzuk meg az alábbi függvények x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

71. $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{y^3}$

72. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{y})$

73. $f(x,y) = \frac{x^y + y^x}{x^y - y^x}$

74. $f(x,y) = \log_{\sin x}(\cos y)$

75. $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Állítsuk elő a következő függvények első és másodrendű parciális deriváltjait!

76. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

77. $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$

78. $f(x,y) = \frac{\cos(x^2)}{y}$

79. $f(x,y) = (x + y\sin x)^4$

80. $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z\right)^3$

81. $f(x,y,z) = \sin^3(2x + 3y + z)$

Számítsuk ki az adott függvények kijelölt magasabbrendű derivált függvényeit!

82. $f(x,y) = x^3 \sin(y) + y^3 \sin(x)$, f'''_{xy^2}

83. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, f''_{xy}

84. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+y}$, f'''_{x^2y}

A $z = f(x,y)$ felületet az (x_0, y_0) helyhez tartozó pontjában metsszük el az (x,z), illetve az (y,z) síkokkal párhuzamos síkokkal. Határozzuk meg a felületből kimetszett görbék érintőinek meredekségét, ha

85. $f(x,y) = -\sqrt{4-x^2-y^2}$, $\quad (x_0,y_0) = (1/2{,}1)$

86. $f(x,y) = x^2y$, $\quad (x_0,y_0) = (1{,}2)$

Hol deriválhatók totálisan az alábbi függvények? Írjuk fel a függvények totális differenciálját az adott pontban, valamint általános (x,y) pontban is!

87. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, (1{,}1)$

88. $f(x,y) = \ln\tan\frac{x}{y}$, $(\frac{\pi}{4}{,}1)$

89. $f(x,y) = x^y$, $(2{,}0)$

90. $f(x,y) = y\,\sin(x) + x\,\sin(y)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$

91. $f(x,y) = e^{x^2y}$, $(0{,}0)$

92. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(1{,}1)$

Deriválhatók-e totálisan az origóban a következő függvények?

93.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0{,}0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0{,}0). \end{cases}$$

94.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0{,}0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0{,}0). \end{cases}$$

95.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0{,}0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0{,}0).\end{cases}$$

96. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$

Hol differenciálhatók parciálisan, illetve totálisan az alábbi függvények?

97.

$$f(x,y)=\begin{cases}\exp(-\frac{1}{x^2+y^2}), & \text{ha } (x,y)\neq(0{,}0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0{,}0).\end{cases}$$

98. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

99.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0{,}0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0{,}0)\end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi felületek érintősíkjainak egyenletét az adott pontban!

100. $z=x^2+y^2,\ P(1{,}2{,}5)$

101. $z=\arctan\frac{y}{x},\ P(1{,}1,\frac{\pi}{4})$

102. $x^2+y^2+z^2=169,\ P(3{,}4{,}12)$

Határozzuk meg az alábbi függvények helyi szélsőértékeit:

103. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-3y+4$

104. $f(x,y)=x^2+3xy+3y^2-6x+3y-6$

105. $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+4x+4y-4$

106. $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+4x-4$

107. $f(x,y)=x^2+xy+3x+2y+5$

108. $f(x,y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

109. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

110. $f(x,y) = 9x^3 + y^3/3 - 4xy$

111. $f(x,y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$

112. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

113. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

114. $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

115. $f(x,y) = y\sin(x)$

116. $f(x,y) = e^{2x}\cos(y)$

117. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + x + y, \quad x, y > 0$

118. $f(x,y) = \big(x^2+1\big)^2 + \big(y+1\big)^3 - 12y + 42$

119. $f(x,y) = (x+y)\exp\big(-x-y\big)$

120. $f(x,y) = x(x^2+y-1)^2$

121. $f(x,y) = y^2 + 2x^2y + x^4$

122. $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

123. $f(x,y) = x^2 + y^3$

124. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

125. $f(x,y) = 2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 + 1$

126. $f(x,y) = \exp\big(-x^2 - 7y^2 + 3\big)$

127. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

128. $f(x,y) = (5-2x+y)\exp\big(x^2-y\big)$

129. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad (x>0, y>0)$

130. $f(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\exp\big(2x+3y\big)$

131. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln(x) - 10\ln(y)$

132. $f(x,y) = \sin(x) - \sin(y) + \cos(x-y)$, $(0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2)$

133. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

134. $f(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$

135. $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0)$

136. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

137. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x,y,z > 0)$

Határozzuk meg az alábbi függvények feltételes szélsőértékeit:

138. $f(x,y) = x + y, \qquad x^2 + y^2 = 1$

139. $f(x,y) = x - y, \qquad x^2 - y^2 = 1$

140. $f(x,y) = xy, \qquad x + y = 1$

141. $f(x,y) = \cos^2(x) + \cos^2(y), \qquad x + y = \pi/4$

142. $f(x,y) = x - 3y, \qquad x^2 + y^2 = 1$

143. $f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad x^4 + y^4 = 2$

144. Egy vállalat dobozokat gyárt három telephelyén, évente x, y és z darabot. Ebből évente $R(x,y,z) = 8xyz^2 - 200000(x+y+z)$ bevétele van. A vállalatnak évente pontosan 100000 darabot kell előállítania. Hogyan ossza el a termelést a telephelyek közt, hogy a bevétel maximális legyen?

145. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2, \qquad x^2 + y^2 = 1$

146. $f(x,y) = xy - y^2, \qquad x^2 + y^2 = 1$

147. $f(x,y) = \cos\left(x^2 - y^2\right), \qquad x^2 + y^2 = 1$

148. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad x + y = 1$

149. $f(x,y) = y^2 + x, \qquad x^2 + y^2 = 1$

150. $f(x,y) = xy, \qquad x^2 + y^2 = 1$

151. $f(x,y) = x + y, \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \quad (a > 0)$

152. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \quad (a > 0)$

153. $f(x,y) = 4x - y, \qquad x^2 - y^2 = 15$

154. $f(x,y) = \cos^2(x) + \cos^2(y), \qquad x - y = \pi/4$

155. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \qquad x^2 + y^2 = 1$

156. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

157. $f(x,y,z) = xy^2z^3, \qquad x + 2y + 3z = a \ (a > 0), \quad x,y,z > 0$

158. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$

159. $f(x,y) = xy, \qquad (x+y)/2 = a,\ x,y \geq 0$

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek az adott K kompakt halmazon felvett minimumát és maximumát:

160. $f(x,y) = x - 2y - 3, \qquad K : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$

161.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y,$$
$$K : y = 0, x = 0 \text{ és } x+y = 2 \text{ egyenesek által határolt tartomány}$$

162.

$$f(x,y) = x^2y(4 - x - y),$$
$$K : x = 0, y = 0 \text{ és } x+y = 6 \text{ egyenesek által határolt tartomány}$$

163. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \qquad K : |x| + |y| \leq 1$

164. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \qquad K : x^2 + y^2 \leq 25$

165. $f(x,y,z) = x + y + z, \qquad K : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

166. $f(x,y) = x - y, \qquad K : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1$

167. Egy téglatest egy pontba összefutó éleinek összege $12a$. Mekkorák a lehető legnagyobb térfogatú ilyen téglatest élei?

168. Egy félhenger alakú, felül nyitott kád felszíne adott S érték. Milyen méretek mellett lesz a térfogata maximális?

169. Adott R sugarú és M magasságú egyenes körkúpba írjunk be maximális térfogatú téglatestet!

170. Adott R sugarú félgömbbe írjunk maximális térfogatú téglatestet!

171. Adott ellipszisbe írjunk az ellipszis tengelyével párhuzamos alapú és legnagyobb területű egyenlőszárú háromszöget!

172. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe beírt kör sugara nem nagyobb mint a körülírt kör sugarának fele!

173. Határozzuk meg az $y = x^2$ és $y = 1 - (x + 2)^2$ görbék távolságát!

174. Adott R sugarú gömbbe írjunk be maximális teljes felszínű hengert!

175. Egy test egy egyenes körhengerből és egy rá illesztett körkúpból áll. A test teljes felszíne adott. Határozzuk meg a test méreteit úgy, hogy a test térfogata maximális legyen.

Fejezzük ki az $I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$ integrált szukcesszív integrálok segítségével, ha

176. D határai $x = y^2$, $x = 4$

177. $D : x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 \leq 0$

178. $D : x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq -2x$

179. D határai: $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ és $x = 2$.

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi szukcesszív integrálokban:

180.

$$\int_{-1}^{0} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x^2-1} f(x, y)dy \Big) dx$$

181.

$$\int_{1}^{3} \Big(\int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)dy \Big) dx$$

182.

$$\int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx \Big) dy$$

183.

$$\int_{-1}^1 \Big(\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy \Big) dx$$

184.

$$\int_0^1 \Big(\int_0^x f(x,y)dy \Big) dx$$

185.

$$\int_{-1}^1 \Big(\int_{x-1/2}^{|x|} f(x,y)dy \Big) dx$$

186.

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \Big) dx$$

187.

$$\int_0^1 \Big(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx \Big) dy$$

Számoljuk ki az alábbi függvények integrálját a megadott tartományokon!

188.

$$f(x,y) = e^{x+\sin y}\cos y, \quad D : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$$

189.

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$
$$D : y = x, x = 0, y = 1, y = 2 \text{ egyenesek által határolt trapéz}$$

190.

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y,$$
$$D: x = 0, x = y^2, y = 2 \text{ görbék által határolt korlátos zárt tartomány}$$

191.

$$f(x,y) = y \ln x,$$
$$D: xy = 1, y = \sqrt{x}, x = 2 \text{ görbék által határolt korlátos, zárt tartomány}$$

192.

$$f(x,y) = \cos(2x) + \sin y,$$
$$D: x = 0, y = 0, 4x+4y = \pi \text{ egyenesek által határolt háromszög}$$

193.

$$f(x,y) = x,$$

ahol D: a (2,0) és (0,2) pontokat összekötő egyenes, valamint a (0,1) középpontú, 1 sugarú kör által határolt kisebbik körszelet.

194.

$$f(x,y) = xy^2,$$
$$D: y^2 = 4x, x = 2 \text{ görbék által határolt parabolaszelet}$$

195.

$$f(x,y) = xy, \ D: \text{(2,0) középpontú, 1 sugarú kör felső félköre}$$

196.

$$f(x,y) = 1 - y, \ D: x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq x^2, x \geq 0$$

197.

$$f(x,y) = (1+y)^{-2}, \ D: y \leq x, xy \geq 1, 1 \leq x \leq 2$$

198.

$$f(x,y) = e^{\frac{x}{y}},$$
$$D: x = y^2, x = 0, y = 1 \text{ görbék által határolt görbevonalú háromszög}$$

199.

$$f(x,y) = x^2 + y,\ D \text{ határai: } y = x^2, y^2 = x$$

200.

$$f(x,y) = xy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}},\ D : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Számoljuk ki az alábbi szukcesszív alakban megadott integrálokat.

201.

$$\int_0^2 \Big(\int_0^1 (x^2 + 2y) dx \Big) dy$$

202.

$$\int_{-3}^{3} \Big(\int_{y^2-4}^{5} (x + 2y) dx \Big) dy$$

203.

$$\int_0^1 \Big(\int_0^y \sin x dx \Big) dy$$

204.

$$\int_0^{\pi/2} \Big(\int_{\cos x}^{1} y^4 dy \Big) dx$$

205.

$$\int_3^4 \Big(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \Big) dx$$

206.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y dx \Big) dy$$

207.

$$\int\limits_{1}^{2}\Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy\Big)dx$$

208.

$$\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{y^2}^{y^{\frac{2}{3}}} ye^{x^2}dx\Big)dy$$

209.

$$\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} y\frac{\sin x}{x}dx\Big)dy$$

210.

$$\int\limits_{0}^{\pi}\Big(\int\limits_{0}^{1+\cos x} y^2\sin x dy\Big)dx$$

211.

$$\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{\arcsin(y)}^{\arcsin(y^{\frac{1}{3}})}\frac{x}{\sin x}dx\Big)dy$$

212.

$$\int_0^1\Big(\int_x^1\sin(y^2)dy\Big)dx$$

213.

$$\int_0^1\Big(\int_{\sqrt{x}}^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}\Big)dx$$

214.

$$\int_0^1\Big(\int_{\sqrt[3]{y}}^1\sqrt{1+x^4}dx\Big)dy$$

215.

$$\int_1^2 \Big(\int_1^y \frac{\ln x}{x} dx \Big) dy + \int_2^4 \Big(\int_{y/2}^2 \frac{\ln x}{x} dx \Big) dy$$

216.

$$\int_{-1}^1 \Big(\int_{|y|-1}^{1-|y|} (x+y)^3 dx \Big) dy$$

217.

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \exp(x^2) \cos(y) dx \Big) dy$$

218.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^1 \exp(x) \sin^3(y) dx \Big) dy$$

219.

$$\int_0^1 \Big(\int_0^y \frac{2}{1+x^2} dx \Big) dy$$

Polárkoordináták bevezetésével írjuk át az $I = \iint_D f(x,y) dxdy$ integrált, ha:

220. $D: x^2 + y^2 \leq a^2$

221. $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0, x \geq -\sqrt{3}y$

222. $D: y \leq 1$, $-y \leq x \leq y$

223. $I = \iint\limits_D f\big(\frac{y}{x}\big) dxdy$, $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $-x \leq y \leq x$.

Polárkoordináták bevezetésével számoljuk ki az alábbi függvények integráljait a megadott tartományokon:

224. $x^2 + y^2$, $D: x^2 + y^2 \leq 2x$

225. $\sqrt{x^2 + y^2}$, $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$

226. y, $D: x^2+y^2 \le ax$, $y \ge -x$

227. $\sqrt{x^2+y^2}$, $D: ax \le x^2+y^2 \le 2ax$, $y \ge 0$

228. $\sqrt{1-x^2-y^2}$, $D: (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ egyenletű lemniszkáta belseje

229. $\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}$, $D: x^2+y^2 \le 1$, $x, y \ge 0$

230. $\ln(x^2+y^2)$, $D: e^2 \le x^2+y^2 \le e^4$

231. $1+\frac{y^2}{x^2}$, $D: x = y$, $x = -y$, $1 \le x^2+y^2 \le 4$ negyedkörcikk

232. $\arctan\frac{y}{x}$, $D: 1 \le x^2+y^2 \le 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}$

Keressünk olyan változótranszformációkat, amelyek a megadott tartományokat téglalappá transzformálják! Írjuk fel a transzformált integrált!

233.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$$

234.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D: 1 \le xy \le 2, x \le y \le 3x$$

235.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D: 0 \le x \le 2, 1 \le x+y \le 2$$

236.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D: 0 \le x, y, \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1$$

237.

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-2} \cdot f\big(\frac{x}{x^2+y^2}\big) \cdot f\big(\frac{y}{x^2+y^2}\big)dxdy,$$

$$D: \frac{x}{2} \le x^2+y^2 \le x, \frac{y}{2} \le x^2+y^2 \le y$$

Számoljuk ki az alábbi függvények integrálját a megadott tartományokon!

238.

$$x + y, D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

239.

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

240.

$$x + y, \quad D : 1 \leq x + y \leq 13, x \leq y \leq 5x$$