Rekurzió, avagy egy módszer anatómiája

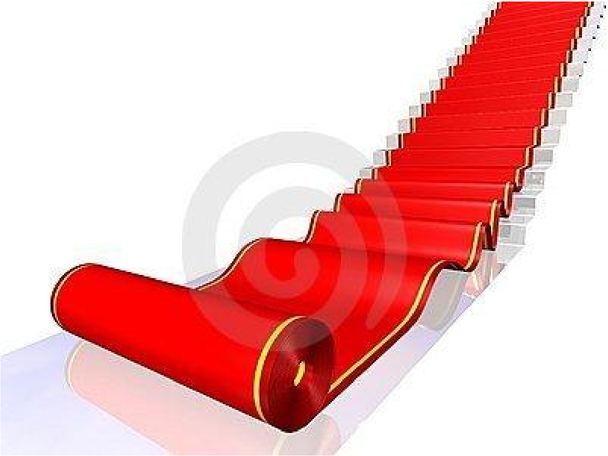
Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2018. március 24.

Mi is az a rekurzió?

Mi is az a rekurzió?



Mi is az a rekurzió?

Egy végtelen matematikai objektum kigöngyölítésére szolgáló módszer?

Mi is az a rekurzió? II

Mi is az a rekurzió? II

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter I.

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter I.

Akhilleusz: Ó, nagyon-nagyon köszönöm, Szellem. De kíváncsi lettem valamire. Mielőtt elmondanám a kívánságomat, elárulná, hogy ki – vagy mi – az ÚR?

Szellem: Szívesen. Az ÚR egy rövidítés., ami azt jelenti, hogy „ÚR Rajtunk". A „Rajtunk" szó itt a Szellemeket, Meta-Szellemeket, Meta-Meta-Szellemeket stb. jelenti. Típustalan szó.

Akhilleusz: De... de hogy szerepelhet az „ÚR" a saját rövidítésében? Ez értelmetlen!

Szellem: Ó, ön nem ismeri a rekurzív mozaikszavakat? Azt hittem, mindenki ismeri őket. Tudja, az „ÚR" azt jelenti, hogy „ÚR Rajtunk" , ami úgy fejthető ki, hogy „ÚR ÚR Rajtunk", ez viszont úgy fejthető ki, hogy „ÚR ÚR ÚR Rajtunk", ez viszont tovább bővíthető... Olyan messzire mehetünk, amennyire csak akarunk.

Akhilleusz: De ennek soha nincs vége!

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter II.

Mi is az a rekurzió? Douglas Hofstadter II.

Néha úgy tűnik, hogy a rekurzió nagyon közelről súrolja a paradoxont. Vannak például *rekurzív definíciók*. Egy ilyen definíció azt a benyomást keltheti a figyelmetlen szemlélőben, hogy *saját magával* definiálunk valamit. Ez körkörös lenne és végtelen regresszióhoz vezetne, ha ugyan nem valódi paradoxonhoz. Valójában egy rekurzív definíció (helyes megfogalmazás esetén) sohasem vezet végtelen regresszióhoz vagy paradoxonhoz. Ez azért van így, mert a rekurzív definíció sohasem saját magával definiál valamit, hanem saját maga *egyszerűbb változataival*. Hogy ezen mit értek, az hamarosan világosabb lesz, ha már mutattam néhány példát a rekurzív definíciókra.

D.R. Hoftadter – *Gödel, Esher, Bach*, Typotex, Budapest 1998. (113., 127., 137-138. oldal)

Egy egyszerű példa: exponenciális sorozat

Kettő hatványok sorozata klasszikusan

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots$$

Egy egyszerű példa: exponenciális sorozat

Kettő hatványok sorozata klasszikusan

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots$$

Általában

$$h_n = 2^n.$$

Egy egyszerű példa: exponenciális sorozat

Kettő hatványok sorozata klasszikusan

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots$$

Általában

$$h_n = 2^n.$$

Kettő hatványok sorozata rekurzióval

$$h_0 = 1,$$

$$\text{ha } n \geq 0, \text{ akkor } h_{n+1} = 2 \cdot h_n.$$

Egy egyszerű példa: exponenciális sorozat

Kettő hatványok sorozata klasszikusan

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots$$

Általában

$$h_n = 2^n.$$

Kettő hatványok sorozata rekurzióval

$$h_0 = 1,$$

$$\text{ha } n \geq 0, \text{ akkor } h_{n+1} = 2 \cdot h_n.$$

Azaz,

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots$$

Motiváció I: részhalmazok

Részhalmazok összeszámlálása

Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

Részhalmazok összeszámlálása

Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \emptyset \\
 & \nearrow & \\
\emptyset & & \\
 & \searrow & \\
 & & \{3\}
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{ccc}
 & & \{1\} \\
 & \nearrow & \\
\{1\} & & \\
 & \searrow & \\
 & & \{1,3\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \{2\} \\
 & \nearrow & \\
\{2\} & & \\
 & \searrow & \\
 & & \{2,3\}
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{ccc}
 & & \{1,2\} \\
 & \nearrow & \\
\{1,2\} & & \\
 & \searrow & \\
 & & \{1,2,3\}
\end{array}
$$

Motiváció II: papírhajtogatás

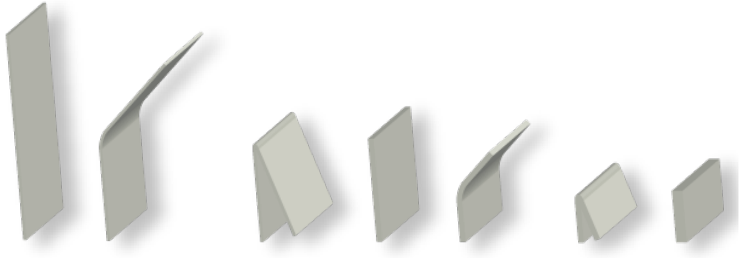
Papírhajtogatás

Egy „hosszú” papírcsíkot félbehajtunk hosszában. Majd a fébehajtott csíkot még egyszer hosszában félbehajtjuk. Ezt ismételgetjük, amíg n hajtást nem végzünk.

Motiváció II: papírhajtogatás

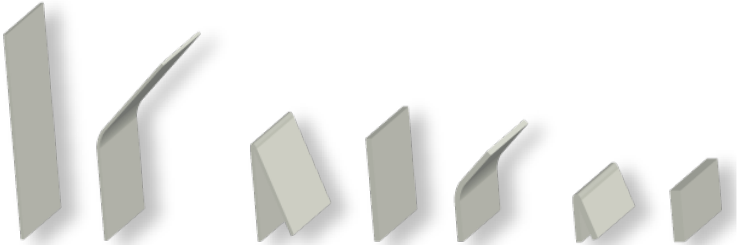
Papírhajtogatás

Egy „hosszú” papírcsíkot félbehajtunk hosszában. Majd a fébehajtott csíkot még egyszer hosszában félbehajtjuk. Ezt ismételgetjük, amíg n hajtást nem végzünk.



Papírhajtogatás

Egy „hosszú” papírcsíkot félbehajtunk hosszában. Majd a fébehajtott csíkot még egyszer hosszában félbehajtjuk. Ezt ismételgetjük, amíg n hajtást nem végzünk.



A kérdés

Szúrjuk át a papírt tűvel. Hajtsuk szét a csíkot. Hány lyuk lesz a széthajtás után?

Újabb kérdések

Másik kérdés

A kiinduló papírlapunk v vastagságú. n hajtás után milyen vastag lesz a kezünkben levő hajtogatás? Dolgozzunk egy internetről beszerzett reális v papírvastagsággal.

Újabb kérdések

Másik kérdés

A kiinduló papírlapunk v vastagságú. n hajtás után milyen vastag lesz a kezünkben levő hajtogatás? Dolgozzunk egy internetről beszerzett reális v papírvastagsággal.

A válasz

Ha a papírlap v vastagságú volt, akkor n hajtás után $2^n \cdot v$ vastagságú lesz.

Szünet

Szünet

Újabb kérdés

Hányszor kell összehajtanunk, hogy a vastagsága a Föld-Hold távolság legyen? (0,1 mm-es papírvastagsággal dolgozzunk.)

Újabb kérdés

Hányszor kell összehajtanunk, hogy a vastagsága a Föld-Hold távolság legyen? (0,1 mm-es papírvastagsággal dolgozzunk.)

Tippeljünk!

Újabb kérdés

Hányszor kell összehajtanunk, hogy a vastagsága a Föld-Hold távolság legyen? (0,1 mm-es papírvastagsággal dolgozzunk.)

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár!

Szünet

Újabb kérdés

Hányszor kell összehajtanunk, hogy a vastagsága a Föld-Hold távolság legyen? (0,1 mm-es papírvastagsággal dolgozzunk.)

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár! Logikai játék.

Újabb kérdés

Hányszor kell összehajtanunk, hogy a vastagsága a Föld-Hold távolság legyen? (0,1 mm-es papírvastagsággal dolgozzunk.)

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár! Logikai játék.

42

Újabb kérdés

Még újabb kérdés

n hajtáshoz milyen hosszú v vastagságú papírcsík szükséges?

Tétel

Egy v vastagságú papírcsík n hajtásához legalább

$$(2^n + 4)(2^n - 1)\frac{\pi}{6} \cdot v.$$

hosszú csík szükséges.

Britney Gallivan (1985—) tétele (2002)

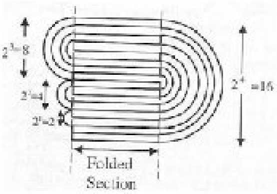
Tétel

Egy v vastagságú papírcsík n hajtásához legalább

$$(2^n + 4)(2^n - 1)\frac{\pi}{6} \cdot v.$$

hosszú csík szükséges.

A modell:



Szünet

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a hajtás?

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Tippeljünk!

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár!

Szünet

A valóságban fizikailag hányszor hajtható végre a hajtás?

Pontosabb hányszor tudták megcsinálni azt, azok akik nagyon akarták?

Tippeljünk!

A legjobb tippért jutalom jár! Logikai játék.

A válasz

A válasz

$$13$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$$

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143,$$

Klasszikus alappélda: Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143, \ldots$$

Motiváció: dominó fedések

Motiváció: dominó fedések

FELADAT

Hányféleképpen lehet kiparkettázni 2×2018 méretű táblát 2018 darab dominóval?

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.
  "I believe there are
  15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,
  717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296
  protons in the universe and the same number of electrons. (1938)"

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.
  "I believe there are 15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044, 717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296 protons in the universe and the same number of electrons. (1938)"
- A matematikusok tudnak ennél is nagyobbat:

Vissza az exponenciális robbanáshoz: nagy számokról

- A legnagyobb címletű pénz.

10^{20} pengő (1946).

- Eddington-szám: A protonok száma az univerzumban.
  "I believe there are 15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044, 717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296 protons in the universe and the same number of electrons. (1938)"
- A matematikusok tudnak ennél is nagyobbat:

$$10^{100}$$

Kasner (1938).

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz:

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve.

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a “googol” szóban.

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a “googol” szóban. Sean Anderson leül a gépe elé és lefoglalja a “google.com” domain nevet.

Szünet: Nagy számokról, 10^{100}

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

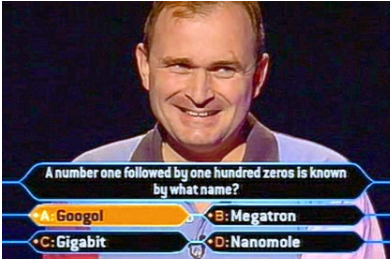
1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a "googol" szóban. Sean Anderson leül a gépe elé és lefoglalja a "google.com" domain nevet.

2001 Ingram eljut a "Legyen ön is milliomos" vetélkedő döntő kérdéséhez.

1938 Kasner megkérdezi 9 éves unokahugát (Milton Sirotta) hogyan lehetne elnevezni ezt a számot (egy 1-es, amit 100 darab 0 jegy követ). A válasz: googol.

1997 Sean Anderson és Larry Page gondolkodnak mi legyen a vállalkozásuk neve. Megállapodnak a "googol" szóban. Sean Anderson leül a gépe elé és lefoglalja a "google.com" domain nevet.

2001 Ingram eljut a "Legyen ön is milliomos" vetélkedő döntő kérdéséhez.



Szünet: Még nagyobb számok

Szünet: Még nagyobb számok

Definíció

$$\text{googolplex} = 10^{googol}$$

Definíció

$$\text{googolplex} = 10^{googol}$$

Googleplex

Ackermann—Péter-számok

Ackermann—Péter-számok

$A(n, m)$ Ackermann-számok

$$A(1, m) = 2m, \qquad A(n+1, 1) = 2,$$

Ha nem a táblázat szélén vagyunk, akkor

$$A(n+1, m+1) = A(n, A(n+1, m)).$$

Ackermann—Péter-számok

$A(n,m)$ Ackermann-számok

$$A(1,m) = 2m, \qquad A(n+1,1) = 2,$$

Ha nem a táblázat szélén vagyunk, akkor

$$A(n+1,m+1) = A(n, A(n+1,m)).$$

$A(n,m)$ értékei kis paraméterek esetén:

n\m	1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	8	10	12
2	2	4	8	16	32	64
3	2	4	16	2^{16}	$2^{2^{16}}$	$2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}$
4	2	4	$2^{2^{2^{2}}}$	?		
5	2	4	?	??		

Kérdések

Fogos kérdés

Határozzuk meg $A(4,4)$-öt.

Kérdések

Fogos kérdés

Határozzuk meg $A(4,4)$-öt.

A „millió fontos” kérdés

Határozzuk meg $A(5,5)$-ot.

Vissza a részhalmazokhoz

Definíció

Legyen n és k két természetes szám.

$$\binom{n}{k}$$

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazainak száma.

Vissza a részhalmazokhoz

Definíció

Legyen n és k két természetes szám.

$$\binom{n}{k}$$

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazainak száma.

Ha $K > n$, akkor

$$\binom{n}{K} = 0$$

Vissza a részhalmazokhoz

Definíció

Legyen n és k két természetes szám.

$$\binom{n}{k}$$

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazainak száma.

Ha $K > n$, akkor

$$\binom{n}{K} = 0$$

A továbbiakban

$$0 \leq k \leq n.$$

Binomiális együtthatók rekurziója

Binomiális együtthatók rekurziója

Definíció

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

Ha $\binom{n}{m}$ nem a Pascal hármszög szélén van, akkor

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Kérdések

FELADAT

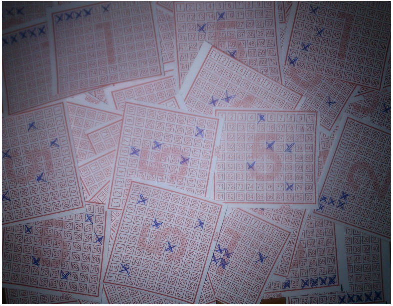
Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).

Kérdések

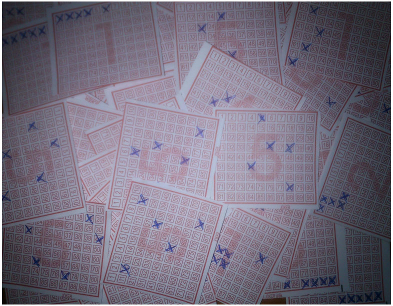
FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).
Páros vagy páratlan szelvényünk lesz-e?

Megoldás szavak/formulák nélkül



Megoldás szavak/formulák nélkül



$\Rightarrow$

További kérdések

További kérdések

FELADAT

$\binom{1995}{1365}$ páros vagy páratlan? És $\binom{1995}{682}$?

További kérdések

FELADAT

$\binom{1995}{1365}$ páros vagy páratlan? És $\binom{1995}{682}$?

KÉRDÉS

Hogyan dönthető el, hogy adott $\binom{n}{m}$ binomiális együttható páros-e?

A BINÁRIS Pascal-háromszög

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

					1					
				1		1				
			1		0		1			
		1						1		
	1								1	
1										1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \color{red}{1} & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 0 1

1 1 1 1

1 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & \color{red}{0} & & & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & \color{red}{0} & & & & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Mintázatok, sejtések

1

1 **1**

1 2 **1**

1 **3** **3** **1**

1 4 6 4 **1**

1 **5** 10 10 **5** **1**

1 6 **15** 20 **15** 6 **1**

1 **7** **21** **35** **35** **21** **7** **1**

1 8 28 56 70 56 28 8 **1**

1 **9** 36 84 126 126 84 36 **9** **1**

1 10 **45** 120 210 252 210 120 **45** 10 **1**

1 **11** **55** **165** 330 462 462 330 **165** **55** **11** **1**

1 12 66 220 **495** 792 924 792 **495** 220 66 12 **1**

1 **13** 78 286 **715** **1287** 1716 1716 **1287** **715** 286 78 **13** **1**

1 14 **91** 364 **1001** 2002 **3003** 3432 **3003** 2002 **1001** 364 **91** 14 **1**

1 **15** **105** **455** **1365** **3003** **5005** **6435** **6435** **5005** **3003** **1365** **455** **105** **15** **1**

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod{2},$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod{2},$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod{2},$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell+1} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell+1} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+\alpha}{2\ell+\beta} \equiv \binom{n}{\ell}\binom{\alpha}{\beta} \pmod 2.$$

Egy tétel

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = {n_s n_{s-1} \ldots n_1 n_0}_2$ és ${\ell_s \ell_{s-1} \ldots \ell_1 \ell_0}_2$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = {n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}$ és ${\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

$n_i, \ell_j \in \{0, 1\}$, így $\binom{n_i}{\ell_j} \in \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} = \{0, 1\}$

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = {n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}$ és ${\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

$n_i, \ell_j \in \{0,1\}$, így $\binom{n_i}{\ell_j} \in \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} = \{0,1\}$

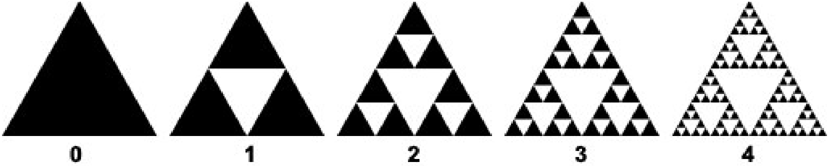
Lucas tétele újból

$$\binom{{n_s n_{s-1} \dots n_1 n_0}_{\mathbf{2}}}{{\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_0}_{\mathbf{2}}}$$

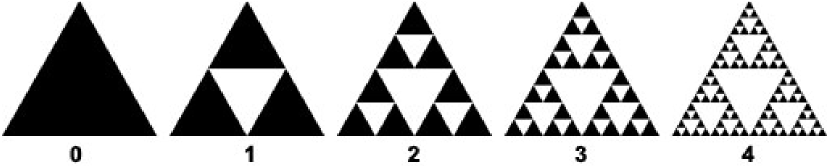
akkor és csak akkor páros, ha egy alsó 1-est fed egy 0.

Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög

Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög



Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög



Definíció

Egy sorozat meta-Fibonacci sorozat, ha a harmadiktól kezdve minden eleme valamely két előző elemének összege.

Hofstadter Q-sorozat

Egy kaotikus sorozat

A számelméleti rekurzióra adott utolsó példánk egy kis rejtély. Vizsgáljuk meg a következő rekurzív függvénydefiníciót:

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \qquad \text{ha } n>2$$

$$Q(1) = Q(2) = 1$$

Egy kaotikus sorozat

A számelméleti rekurzióra adott utolsó példánk egy kis rejtély. Vizsgáljuk meg a következő rekurzív függvénydefiníciót:

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \qquad \text{ha } n>2$$

$$Q(1) = Q(2) = 1$$

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 9, 10, \ldots$$

Hofstadter Q-sorozat

Hofstadter Q-sorozat

Ez annyiban hasonlít a Fibonacci-féle definícióhoz, hogy minden új érték az előző két érték összege – de nem a *közvetlenül* megelőző két értéké. A közvetlenül megelőző két érték csupán azt közli, hogy *milyen messze kell visszalépni* ahhoz, hogy megkapjuk azokat az új számokat, amelyek összeadásával az új érték megkapható! Az első 17 Q-szám a következő:

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 5,\quad 6,\quad 6,\quad 6,\quad 8,\quad 8,\quad 8,\quad 10,\quad \underbrace{9,\quad 10}_{\text{milyen messze mozogjunk balra}}, \ldots$$

$$5 + 6 = \underbrace{11}_{\text{új tag}}$$

Ha a következő tagot szeretnénk megkapni, akkor (a három ponttól) balra kell mennünk 10, illetve 9 taggal; ekkor az 5-höz és a 6-hoz érünk, ahogy ezt a nyilak mutatják. Összegük – 11 – adja az új értéket, Q(18)-at. Furcsa ez az eljárás, ahol az ismert Q-számok listáját használjuk fel önmaga kiterjesztéséhez. Az eredményül kapott sorozat enyhén szólva szeszélyes.

A matematikában már nincs új?

EGY PROBLÉMA

Jól definiált a Q-sorozat?

Definíció, $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ Conway $10.000-os sorozata

$$T(1) = T(2) = 1,$$

Ha $T(n)$-hez van két megelőző tag, akkor

$$T(n) = T(T(n-1)) + T(n - T(n-1)).$$

Definíció, $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ Conway \$10.000-os sorozata

$$T(1) = T(2) = 1,$$

Ha $T(n)$-hez van két megelőző tag, akkor

$$T(n) = T(T(n-1)) + T(n - T(n-1)).$$

$$1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, \ldots$$

A $10.000-os kérdés

Conway tétele

(i) $T(n+1) - T(n) \in \{0, 1\}$, speciálisan $T(n) \nearrow$.

(ii)
$$\frac{T(n)}{n} \to \frac{1}{2}.$$

A $10.000-os kérdés

Conway tétele

(i) $T(n+1) - T(n) \in \{0,1\}$, speciálisan $T(n) \nearrow$.

(ii)
$$\frac{T(n)}{n} \to \frac{1}{2}.$$

Conway kérdése

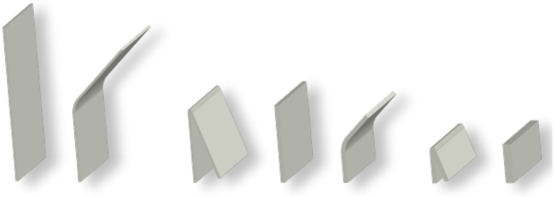
Mi az a legkisebb τ, hogy $\tau \leq n$ esetén

$$\left| T(n) - \frac{n}{2} \right| \leq \frac{1}{20}?$$

Vissza a papírhajtogatáshoz

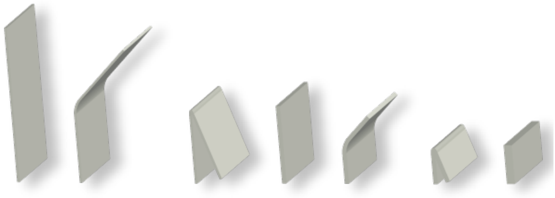
Meg van még az öszehajtogatott papírcsíkunk? John E. Heighway (1966, NASA) is hajtogatott így egy unalmas ülésen.

Meg van még az öszehajtogatott papírcsíkunk? John E. Heighway (1966, NASA) is hajtogatott így egy unalmas ülésen.



Vissza a papírhajtogatáshoz

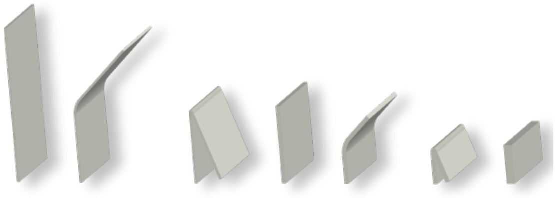
Meg van még az öszehajtogatott papírcsíkunk? John E. Heighway (1966, NASA) is hajtogatott így egy unalmas ülésen.



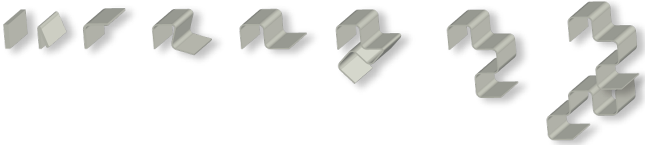
Majd széthajtotta a papírcsíkot.

Vissza a papírhajtogatáshoz

Meg van még az öszehajtogatott papírcsíkunk? John E. Heighway (1966, NASA) is hajtogatott így egy unalmas ülésen.



Majd széthajtotta a papírcsíkot.



Szünet

Szünet

Jurrasic park

Jurrasic park

Regény

Jurrasic park

Regény (1990, Michael Crichton)

Jurrasic park

Regény (1990, Michael Crichton)

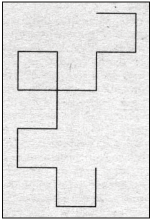
Fejezetek

Jurrasic park

Regény (1990, Michael Crichton)

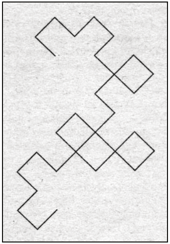
Fejezetek/iterációk

FIRST ITERATION



"At the earliest drawings of the fractal curve few clues to the underlying mathematical structure will be seen."
IAN MALCOLM

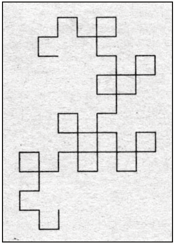
SECOND ITERATION



"With subsequent drawings of the fractal curve, sudden changes may appear."
IAN MALCOLM

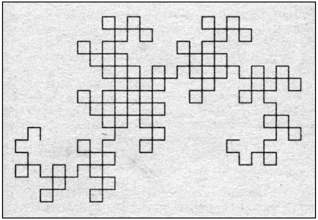
Jurrasic park, Iterációk

THIRD ITERATION



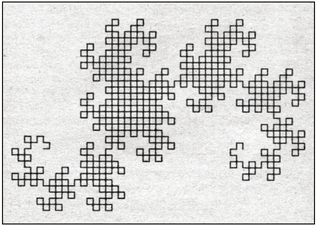
"Details emerge more clearly as the fractal curve is redrawn."
IAN MALCOLM

FOURTH ITERATION



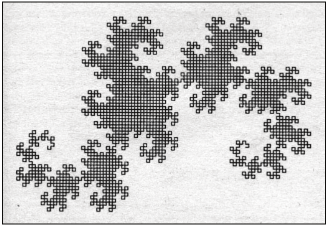
"Inevitably, underlying instabilities begin to appear."
IAN MALCOLM

FIFTH ITERATION



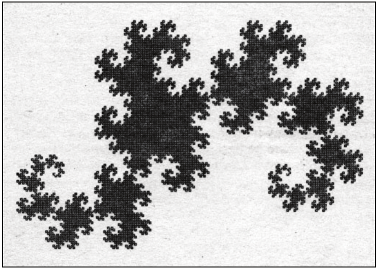
"Flaws in the system will now become severe."
IAN MALCOLM

SIXTH ITERATION



"System recovery may prove impossible."
IAN MALCOLM

SEVENTH ITERATION



"Increasingly, the mathematics will demand the courage to face its implications."
IAN MALCOLM

A kihajtogatott papír kódolása

A kihajtogatott papír kódolása

$$D_4 = \vee, \vee, \wedge, \vee, \vee, \wedge, \wedge, \vee, \vee, \vee, \wedge, \wedge, \vee, \wedge, \wedge$$

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

$$D_n = D_{n-1} \vee -\overleftarrow{D_{n-1}}.$$

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

$$D_n = D_{n-1} \vee -\overleftarrow{D_{n-1}}.$$

$n-1$ hajtást végzünk, majd még egyet

Rekurziók D_n-re

Hajtunk egyet, majd még $n-1$-et

$$D_n = D_{n-1} \vee -\overleftarrow{D_{n-1}}.$$

$n-1$ hajtást végzünk, majd még egyet

Ha

$$D_{n-1} = d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9 \ldots,$$

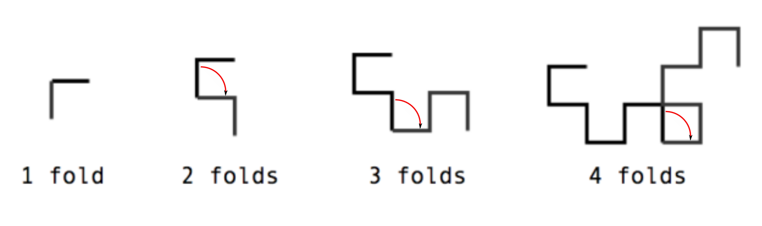
akkor

$$D_n = \vee d_1 \wedge d_2 \vee d_3 \wedge d_4 \vee d_5 \wedge d_6 \vee d_7 \wedge d_8 \vee d_9 \ldots$$

Rekurziók a sárkánygörbére

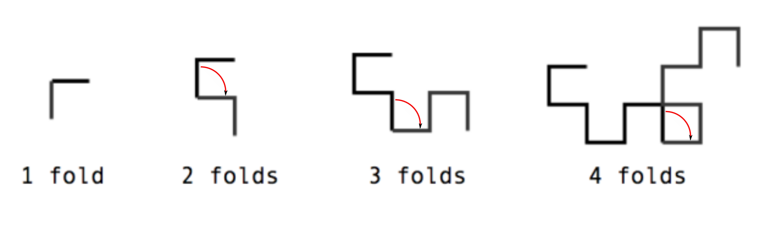
Első rekurzió

Első rekurzió



Rekurziók a sárkánygörbére

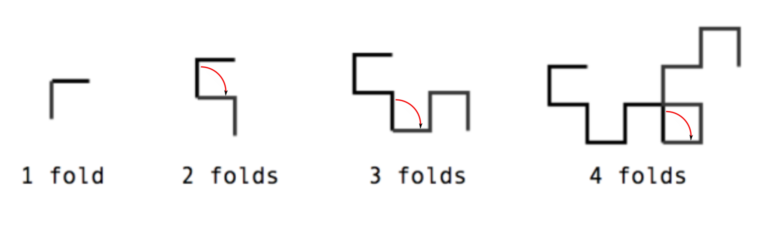
Első rekurzió



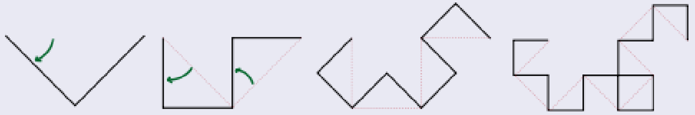
Második rekurzió

Rekurziók a sárkánygörbére

Első rekurzió



Második rekurzió



A sárkánygörbe főtétele

A sárkánygörbe főtétele

A fenti görbesorozat határértéke D^∞, D_∞, a sárkánygörbe

A sárkánygörbe főtétele

A fenti görbesorozat határértéke D^∞, D_∞, a sárkánygörbe

Davis—Knuth-tétel

(i) A D^∞ sárkánygörbe lekerekített változata nem metszi át önmagát.

A sárkánygörbe főtétele

A fenti görbesorozat határértéke D^∞, D_∞, a sárkánygörbe

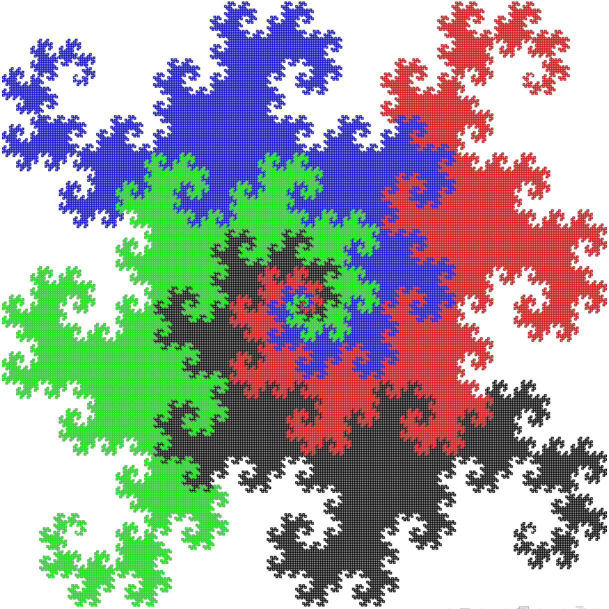
Davis—Knuth-tétel

(i) A D^∞ sárkánygörbe lekerekített változata nem metszi át önmagát.

(ii) A D^∞ sárkánygörbe és 90°-, 180°-, 270°-kal elforgatott példánya egyszeresen lefedi a végtelen négyzethálót alkotó egységszakaszokat.

A sárkánygörbe főtétele látványosan

A sárkánygörbe főtétele látványosan

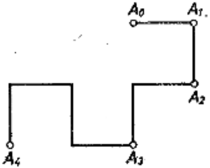


Bizonyítsuk be!

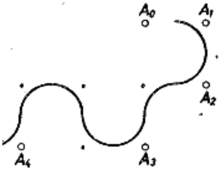
A sárkánygörbe

Hátsó borítónkon levő vonal a következőképpen készült. Kiindultunk egy A_0A_1 szakaszból (1. ábra). A szakaszt A_1 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2$ töröttvonalat. Ezt A_2 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2A_3$ töröttvonalat stb., egészen A_{12}-ig. Ezután a töröttvonal sarkait „lekerekítettük" (2. ábra). Ezt a „kerekded" vonalat azután A_0 körül 4-szer 90°-kal elforgatva kapjuk a sárkánygörbét.

A görbe nem metszi magát — legalábbis addig nem, ameddig felrajzoltuk —, és az A_0 körüli részt egészen kitölti. Igaz marad-e ez mindig? Mindazok, akik bizonyítják, hogy így van vagy bizonyítják, hogy nincs így és bizonyításukat legkésőbb március 15-ig a szerkesztőség címére (Budapest Postafiók 129, 1443) elküldik, egy-egy TÁBLA CSOKOLÁDÉT kapnak. Feltéve, hogy a bizonyításuk jó! Cs. L.



1. ábra



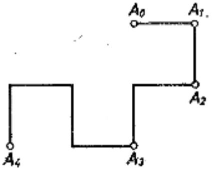
2. ábra

Bizonyítsuk be!

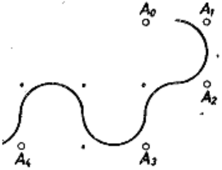
A sárkánygörbe

Hátsó borítónkon levő vonal a következőképpen készült. Kiindultunk egy A_0A_1 szakaszból (1. ábra). A szakaszt A_1 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2$ töröttvonalat. Ezt A_2 körül pozitív irányban 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az $A_0A_1A_2A_3$ töröttvonalat stb., egészen A_{12}-ig. Ezután a töröttvonal sarkait „lekerekítettük" (2. ábra). Ezt a „kerekded" vonalat azután A_0 körül 4-szer 90°-kal elforgatva kapjuk a sárkánygörbét.

A görbe nem metszi magát — legalábbis addig nem, ameddig felrajzoltuk —, és az A_0 körüli részt egészen kitölti. Igaz marad-e ez mindig? Mindazok, akik bizonyítják, hogy így van vagy bizonyítják, hogy nincs így és bizonyításukat legkésőbb március 15-ig a szerkesztőség címére (Budapest Postafiók 129, 1443) elküldik, egy-egy TÁBLA CSOKOLÁDÉT kapnak. Feltéve, hogy a bizonyításuk jó! Cs. L.



1. ábra



2. ábra

61

KÖMAL 1979, 2. szám (február)

Egy alkalmazás

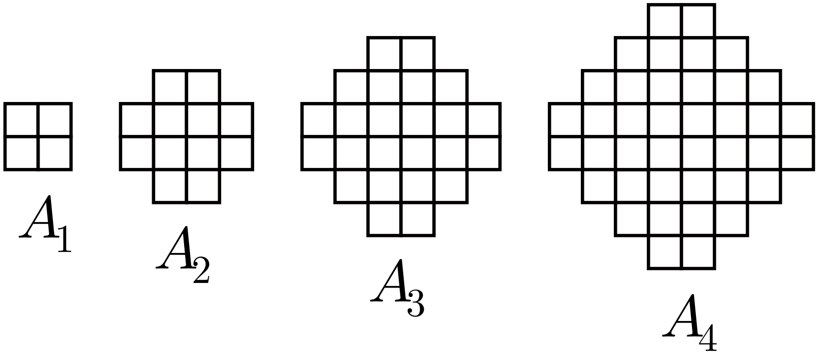
Vissza a dominó fedésekhez: középiskolás feladat

FELADAT

Egy 2048×2048 méretű tábláról egy tetszőleges mezőt letörlünk. Igazoljuk, hogy a maradék mezők L-alakú triominóval kiparkettázhatók.

Azték gyémánt

Azték gyémánt



A kérdés

A kérdés

A kérdés

Hány parkettázása van A_n-nek dominókkal?

A kérdés

Hány parkettázása van A_n-nek dominókkal?

A választ nevezzük el a_n-nek.

Egy sejtés

Egy sejtés

Első néhány elem kiszámolása és fejvakarás

$$a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\Delta(n)}?$$

Egy sejtés

Első néhány elem kiszámolása és fejvakarás

$$a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\Delta(n)}?$$

Elkies—Kuperberg—Larsen—Propp-tétel (1992)

Két rekurzió

Kuo 1998

$$2 \cdot a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}.$$

Két rekurzió

Kuo 1998

$$2 \cdot a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}.$$

Kuo 1998

$$a_n = 2^n \cdot a_{n-1}.$$

Kuo 1998

$$2 \cdot a_n^2 = a_{n+1}a_{n-1}.$$

Kuo 1998

$$a_n = 2^n \cdot a_{n-1}.$$

Majdnem középiskolás bizonyítások.

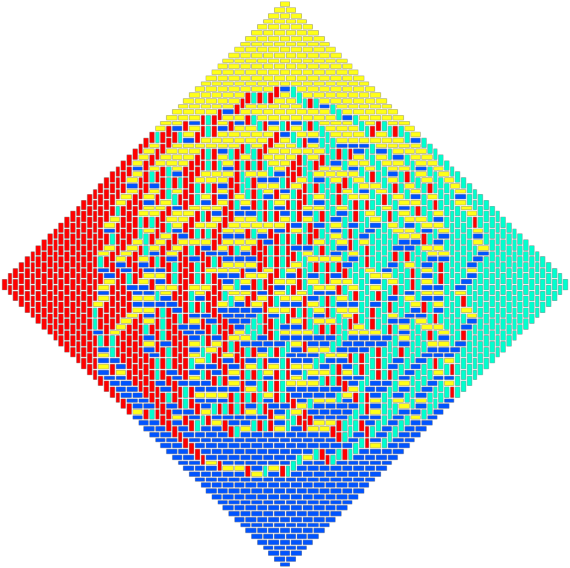
Egy középiskolás feladat

FELADAT

Az azték-gyémánt tetszőleges dominó parkettázásában található két dominó, amelyek a hosszú oldaluknál illeszkednek.

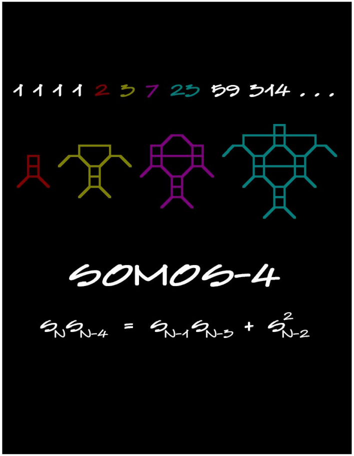
Egy véletlen parkettázás

Egy véletlen parkettázás

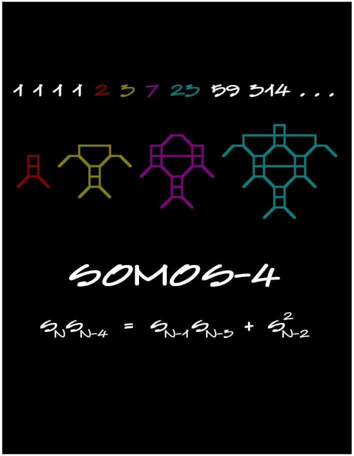


Egy Harvard T-shirt

Egy Harvard T-shirt



Egy Harvard T-shirt



http://faculty.uml.edu/~jpropp/reach/shirt.html

A mozinak vége, a szereplők

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

Ackermann—Péter-számok: A143796

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

Ackermann—Péter-számok: A143796

Hofstadter Q: A005185

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

Ackermann—Péter-számok: A143796

Hofstadter Q: A005185

Conway \$10.000: A004001

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

Ackermann—Péter-számok: A143796

Hofstadter Q: A005185

Conway \$10.000: A004001

Azték gyémánt: A006125

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

Ackermann—Péter-számok: A143796

Hofstadter Q: A005185

Conway $10.000: A004001

Azték gyémánt: A006125

Somos-sorozat A006720

A mozinak vége, a szereplők

Kettő hatványai: A000079

Fibonacci-számok: A000045

Ackermann—Péter-számok: A143796

Hofstadter Q: A005185

Conway $10.000: A004001

Azték gyémánt: A006125

Somos-sorozat A006720

Online Encyclopedia of Integer Sequences

Neil Sloan: OEIS

http://oeis.org/

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!