Számrendszerek

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2015. március 21.

10-es számrendszer

10-es számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots \text{tízezresek, ezresek, százasok, tizesek, egyesek}$$

10-es számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots \text{tízezresek, ezresek, százasok, tizesek, egyesek}$$

Számjegyek:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$$

2-es számrendszer

2-es számrendszer

Helyi értékek:

...tizenhatosok, nyolcasok, négyesek, kettesek, egyesek

2-es számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots \text{tizenhatosok, nyolcasok, négyesek, kettesek, egyesek}$$

Számjegyek:

$$0, 1$$

Egy ki nem mondott feladat

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n 2^n + \gamma_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \gamma_i 2^i + \ldots + \gamma_1 2^1 + \gamma_0 2^0$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$.

Egy ki nem mondott feladat

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n 2^n + \gamma_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \gamma_i 2^i + \ldots + \gamma_1 2^1 + \gamma_0 2^0$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$.

$$2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

Egy ki nem mondott feladat

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n 2^n + \gamma_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \gamma_i 2^i + \ldots + \gamma_1 2^1 + \gamma_0 2^0$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$.

$$2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

$$2015 = 11111011111_2$$

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye.

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye.
  // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024 512 256 128 64 32 16 8 4 2 1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
										1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
									1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
								1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
							1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
						1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
					0	1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
				1	0	1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
			1	1	0	1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
		1	1	1	0	1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás HÁTULRÓL ELŐRE

- Osszuk el a számunkat maradékosan 2-vel.
- A maradék lesz a kettes számrendszerbeli felírás utolsó jegye. // A maradékok adják hátulról-előre a kettes számrendszerbeli felírást.
- A hányadossal folytassuk (amíg 0 nem lesz).

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

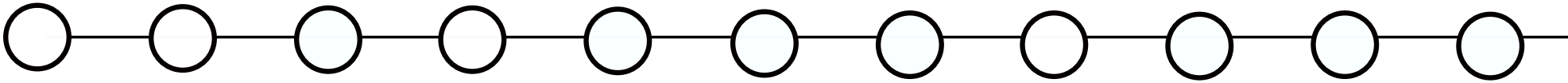
Példa

11

Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

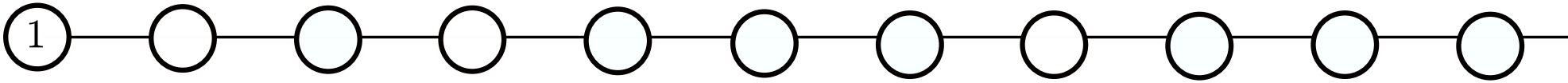
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

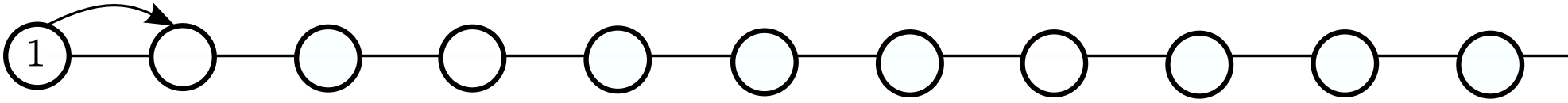
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

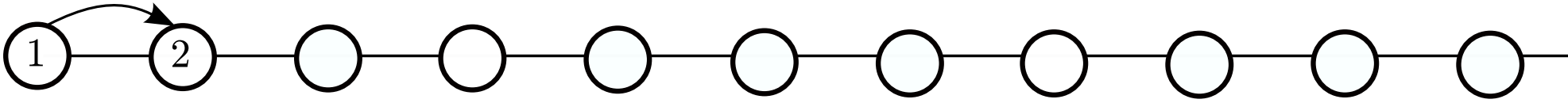
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

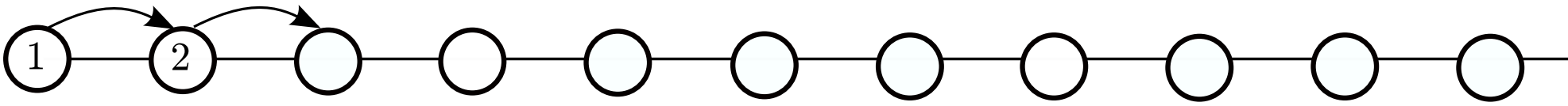
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

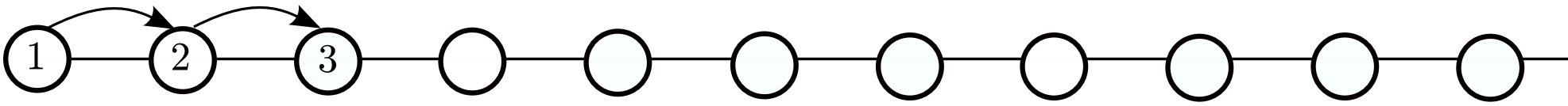
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

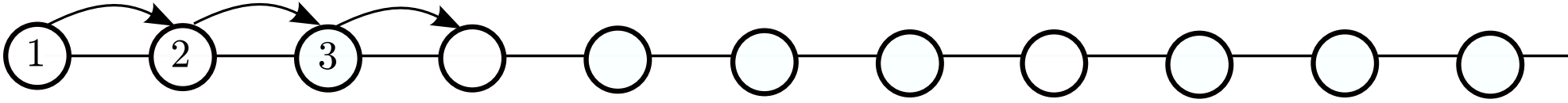
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

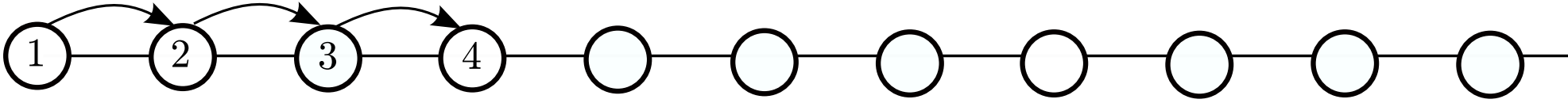
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

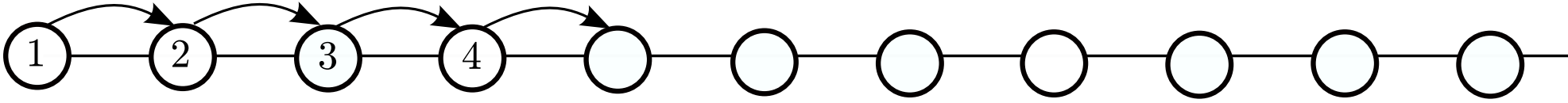
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

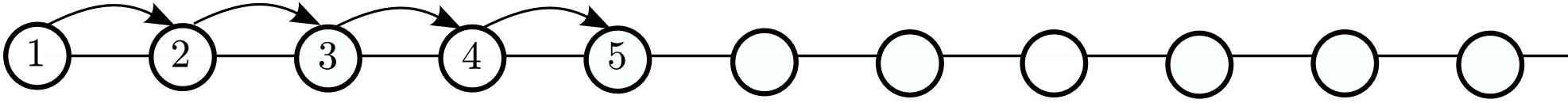
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

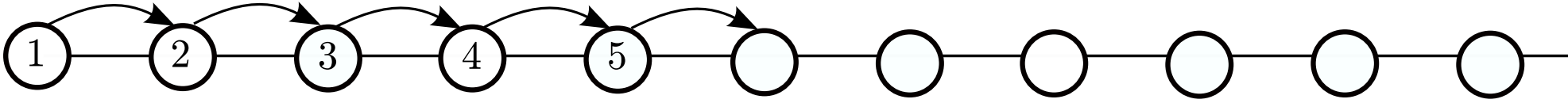
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

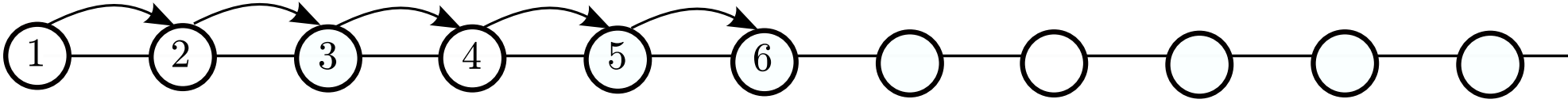
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

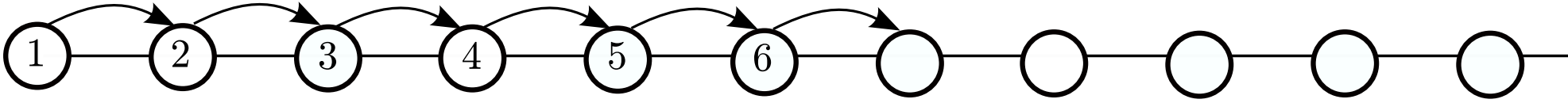
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

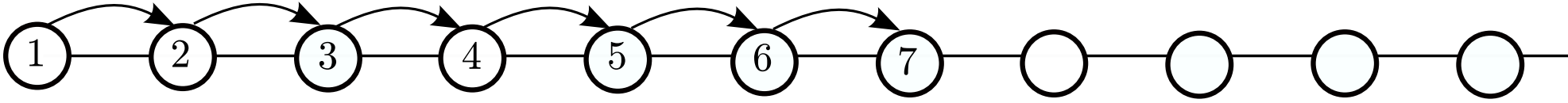
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

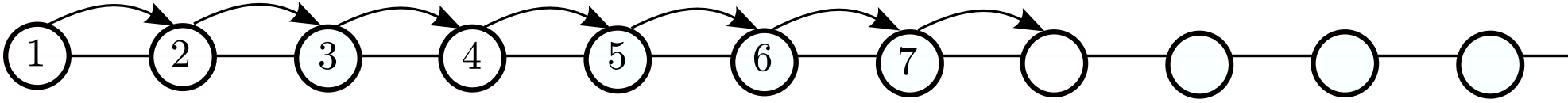
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

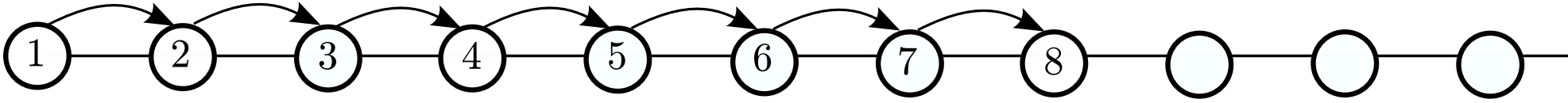
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

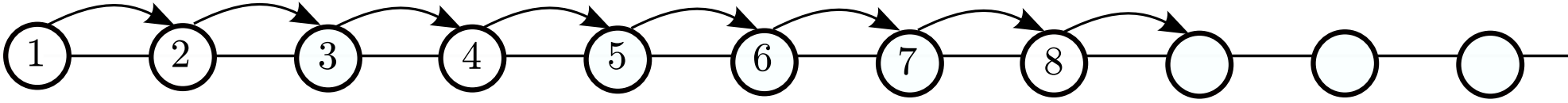
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

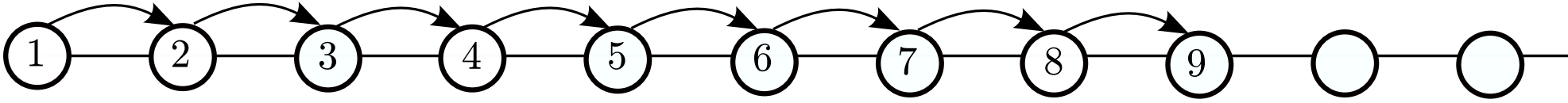
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

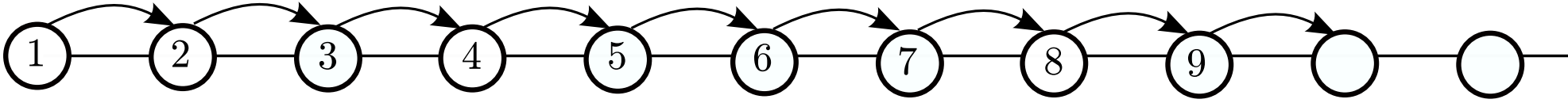
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

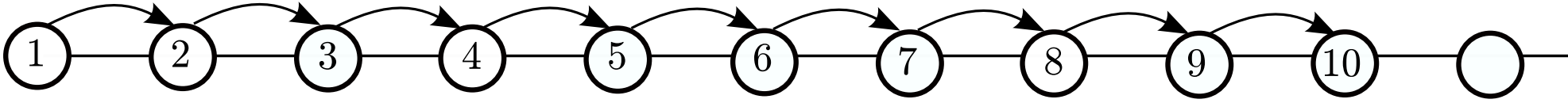
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

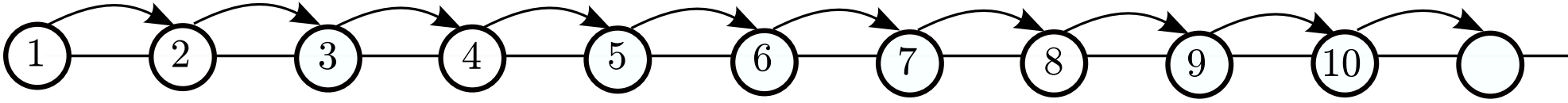
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

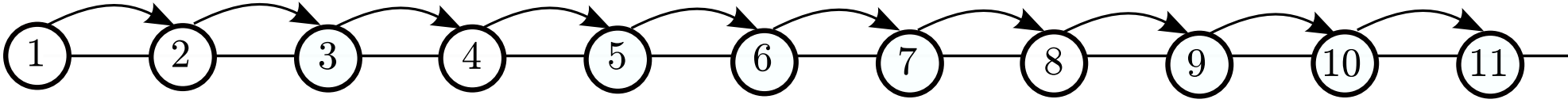
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

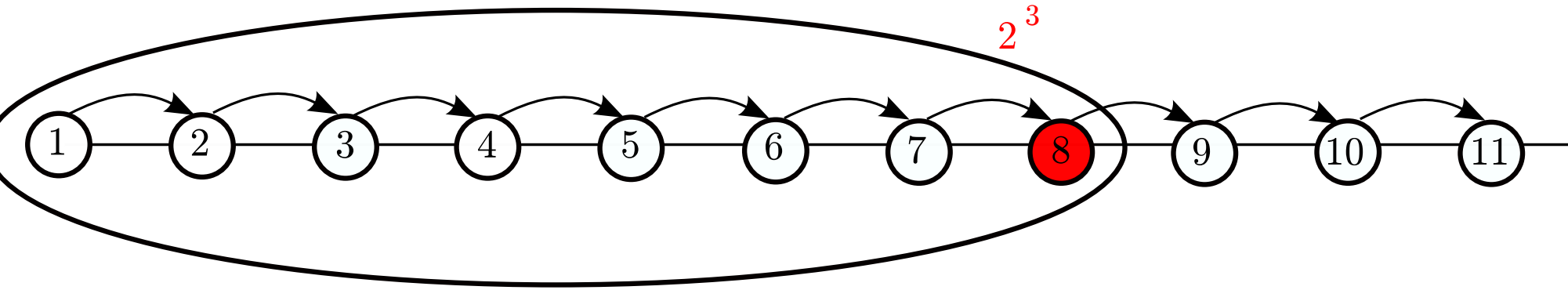
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

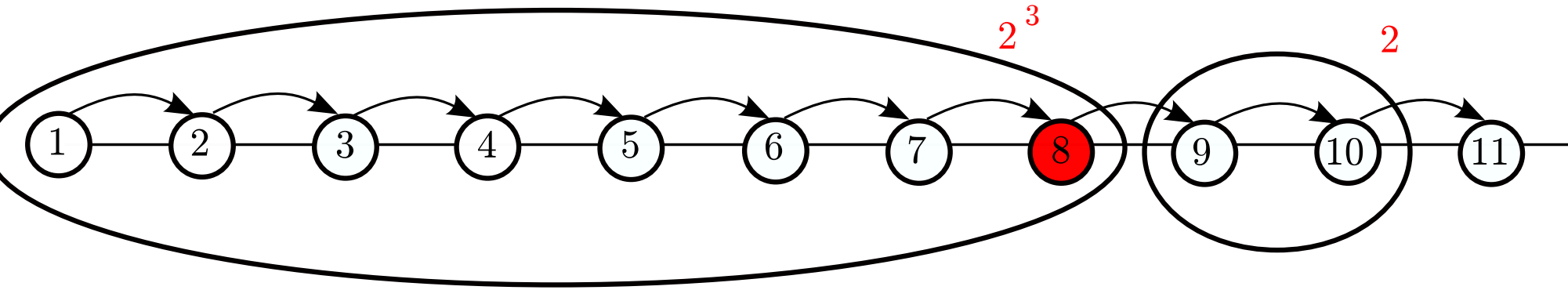
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

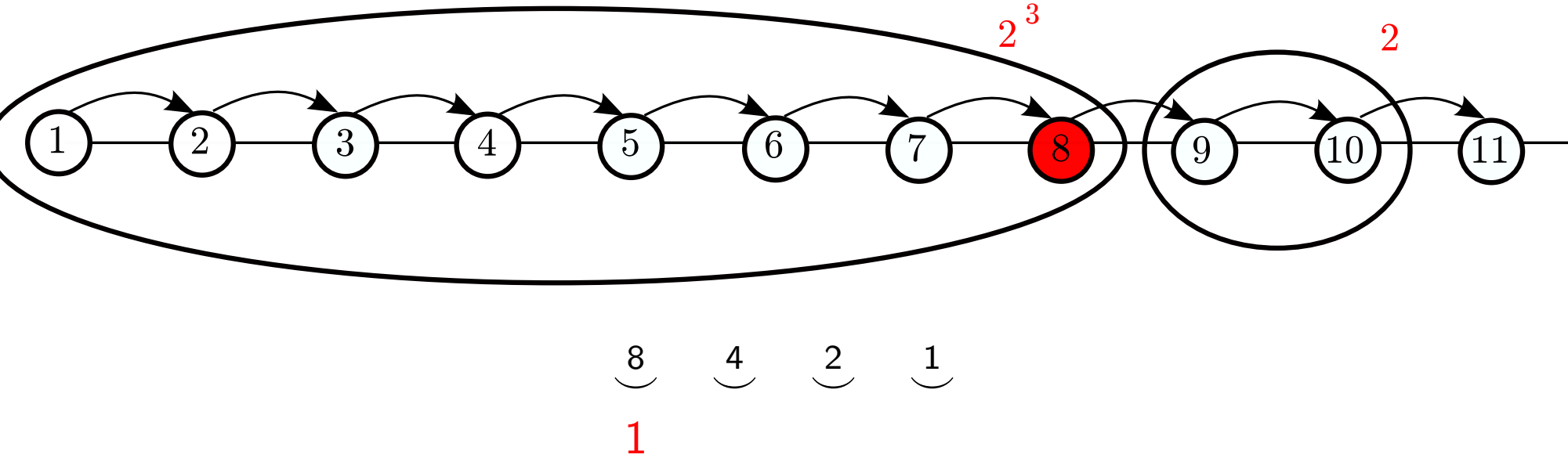
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

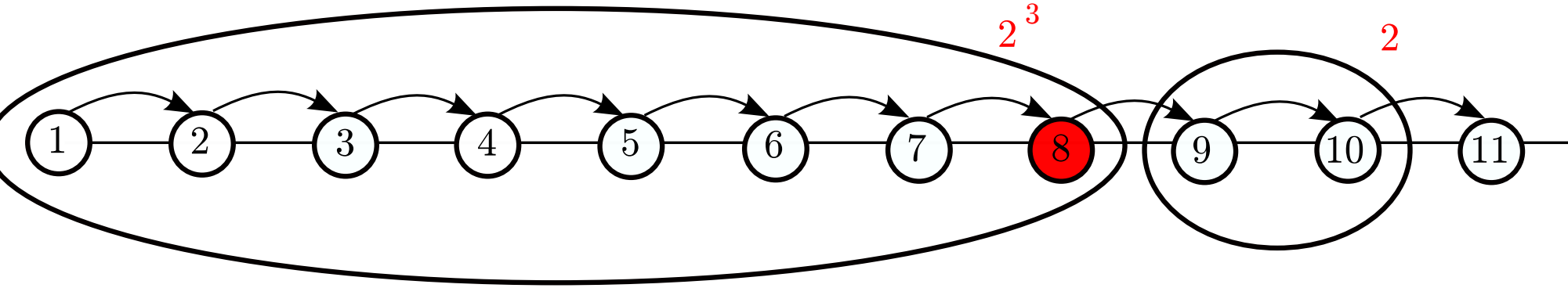
11



Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

11

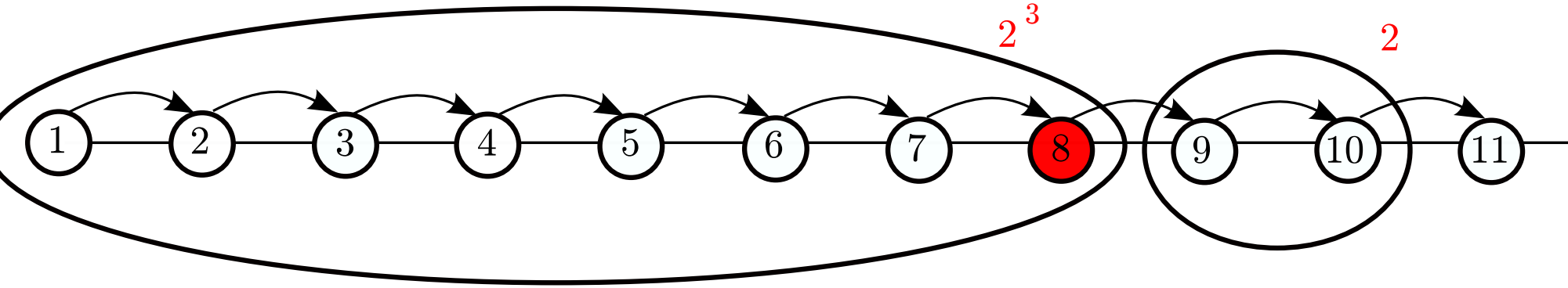


8	4	2	1
1	0		

Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

11

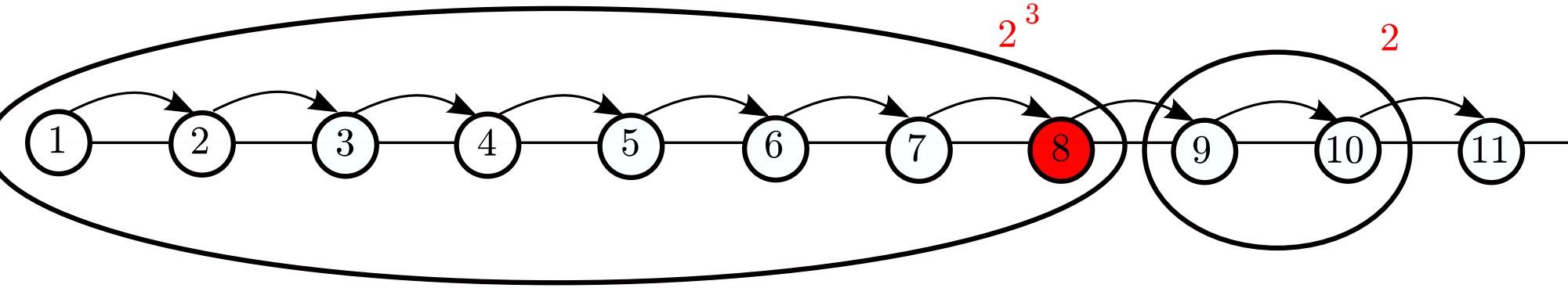


8	4	2	1
1	0	1	

Kettes számrendszerbe való átírás ELŐRŐL HÁTULRA

Példa

11



8	4	2	1
1	0	1	1

A kettes számrendszer alaptétele újból:

Polinomok és számrendszerek

A kettes számrendszer alaptétele újból:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) =& 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\\ &+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+\\ &+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}.\end{aligned}$$

Polinomok és számrendszerek

A kettes számrendszer alaptétele újból:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) =& 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\\ &+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+\\ &+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}.\end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots =& 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\\ &+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+\\ &+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+\\ &+x^{15}+\ldots.\end{aligned}$$

Problémák

Probléma

Adjunk oszthatósági szabályokat kettes számrendszerben felírt számokra.

Problémák

Probléma

Adjunk oszthatósági szabályokat kettes számrendszerben felírt számokra.
Egy kettes számrendszerben felírt szám mikor osztható 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 7-tel, ...?

And now for something completely different!

And now for something completely different!

Az UNALMAS változat

And now for something completely different!

Az UNALMAS változat

Páros-e $\binom{90}{5}$?

And now for something completely different!

Az UNALMAS változat

Páros-e $\binom{90}{5}$?

Talán érdekesebb megfogalmazás

FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).

And now for something completely different!

Az UNALMAS változat

Páros-e $\binom{90}{5}$?

Talán érdekesebb megfogalmazás

FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).
Páros vagy páratlan szelvényünk lesz-e?

And now for something completely different!

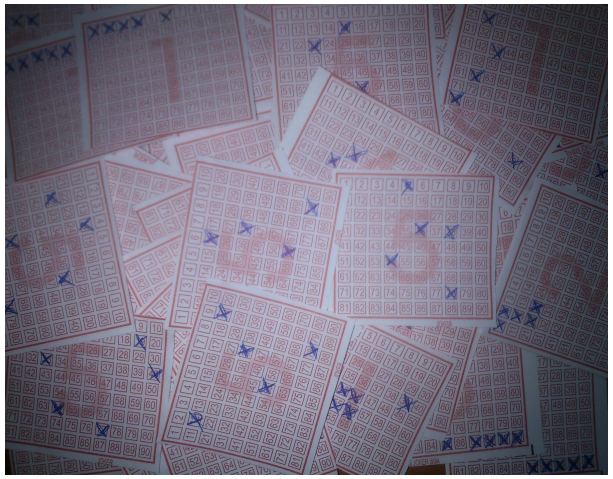
Az UNALMAS változat

Páros-e $\binom{90}{5}$?

Talán érdekesebb megfogalmazás

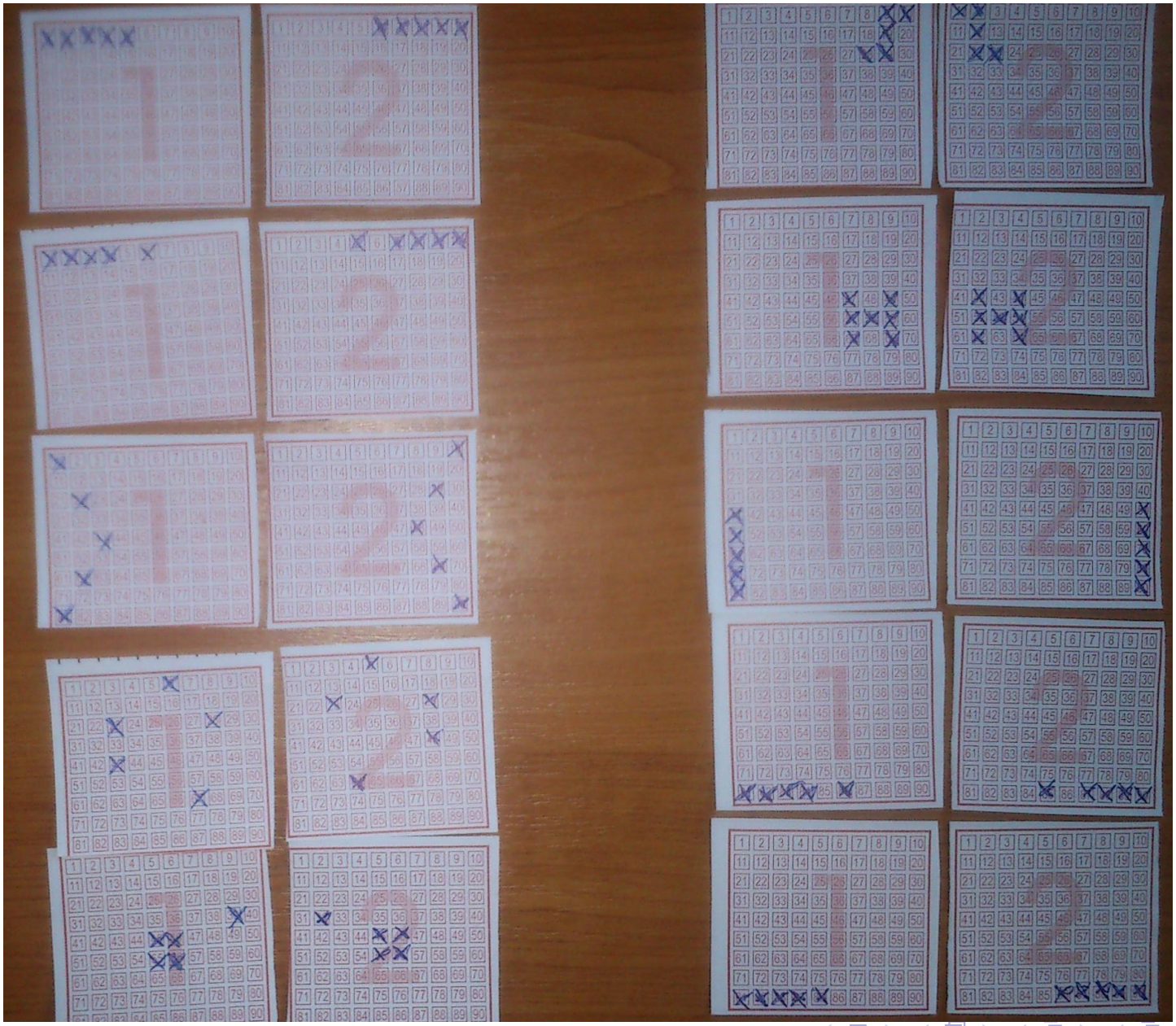
FELADAT

Az összes lehetséges módon kitöltjük az ötöslottó szelvényét (minden lehetséges kitöltés külön szelvény).
Páros vagy páratlan szelvényünk lesz-e?



Nem annyira unalmas megoldás

Nem annyira unalmas megoldás



ÁLTALÁNOSÍTÁS

FELADAT

$\binom{2015}{1365}$ páros vagy páratlan? És $\binom{2015}{682}$?

ÁLTALÁNOSÍTÁS

FELADAT

$\binom{2015}{1365}$ páros vagy páratlan? És $\binom{2015}{682}$?

KÉRDÉS

Hogyan dönthető el, hogy adott $\binom{n}{m}$ binomiális együttható páros-e?

A BINÁRIS Pascal-háromszög

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 1

1 1

1 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 0 1

1 1

1 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 0 1

1 1 1

1 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 0 1

1 1 1 1

1 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 0 1

1 1 1 1

1 0 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

1

1 1

1 0 1

1 1 1 1

1 0 0 1

1 1

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

A BINÁRIS Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Mintázatok, sejtések

Mintázatok, sejtések

1														
1	1													
1	2	1												
1	3	3	1											
1	4	6	4	1										
1	5	10	10	5	1									
1	6	15	20	15	6	1								
1	7	21	35	35	21	7	1							
1	8	28	56	70	56	28	8	1						
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell+1} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$

Újabb feladatok

Feladat

- $$\binom{2n}{2\ell+1} \equiv 0 \pmod 2,$$
- $$\binom{2n}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+1}{2\ell+1} \equiv \binom{n}{\ell} \pmod 2,$$
- $$\binom{2n+\alpha}{2\ell+\beta} \equiv \binom{n}{\ell}\binom{\alpha}{\beta} \pmod 2.$$

Egy tétel

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = n_s n_{s-1} \dots n_1 n_{0\mathbf{2}}$ és $\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_{0\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = n_s n_{s-1} \dots n_1 n_{0\mathbf{2}}$ és $\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_{0\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

$n_i, \ell_j \in \{0,1\}$, így $\binom{n_i}{\ell_j} \in \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} = \{0,1\}$

Egy tétel

Tétel, Lucas 1878

Legyen $n = n_s n_{s-1} \dots n_1 n_{0\mathbf{2}}$ és $\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_{0\mathbf{2}}$. Ekkor

$$\binom{n}{\ell} \equiv \binom{n_s}{\ell_s} \cdot \binom{n_{s-1}}{\ell_{s-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{n_1}{\ell_1} \cdot \binom{n_0}{\ell_0} \pmod 2.$$

$n_i, \ell_j \in \{0,1\}$, így $\binom{n_i}{\ell_j} \in \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} = \{0,1\}$

Lucas tétele újból

$$\binom{n_s n_{s-1} \dots n_1 n_{0\mathbf{2}}}{\ell_s \ell_{s-1} \dots \ell_1 \ell_{0\mathbf{2}}}$$

akkor és csak akkor páros, ha egy alsó 1-est fed egy 0.

Példák

Példák

$$\binom{2015}{1365} = \binom{11111011111_2}{10101010101_2} \equiv \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \pmod 2.$$

Példák

$$\binom{2015}{1365} = \binom{11111011111_2}{10101010101_2} \equiv \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \pmod 2.$$

$$\binom{2015}{682} = \binom{11111011111_2}{01010101010_2} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0} = 0 \pmod 2.$$

Példák

$$\binom{2015}{1365} = \binom{11111011111_2}{10101010101_2} \equiv \binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \pmod 2.$$

$$\binom{2015}{682} = \binom{11111011111_2}{01010101010_2} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0} = 0 \pmod 2.$$

FELADAT

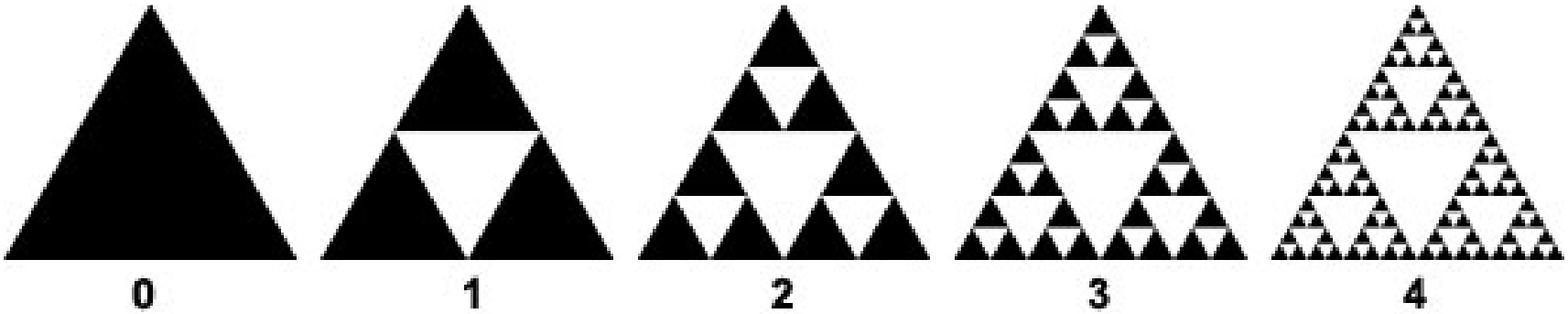
A Pascal-háromszög n indexű sorában lévő számok

$$\left\{\binom{n}{\ell}\right\}_{\ell=0}^{n}$$

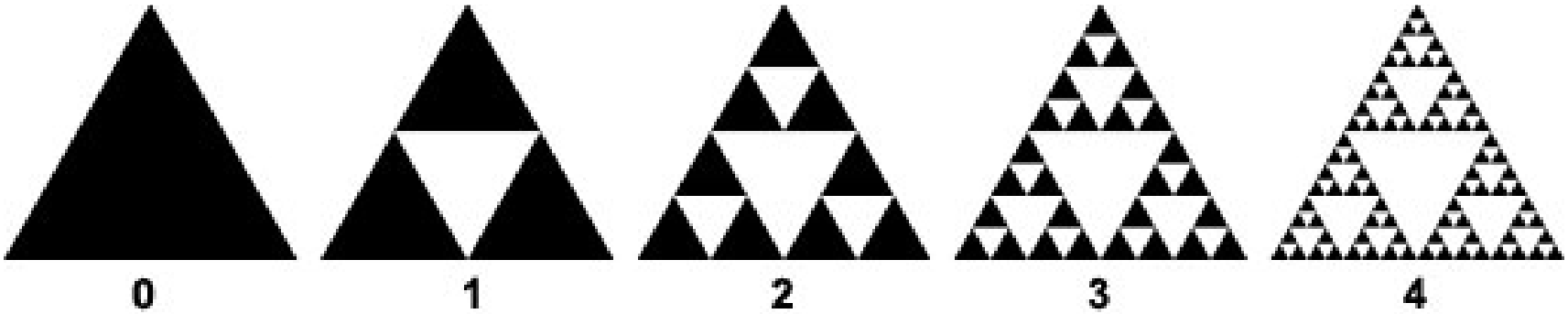
akkor és csak akkor mind páratlanok, ha n egy $2^k - 1 = 11\ldots11_2$ alakú szám.

Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög

Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög

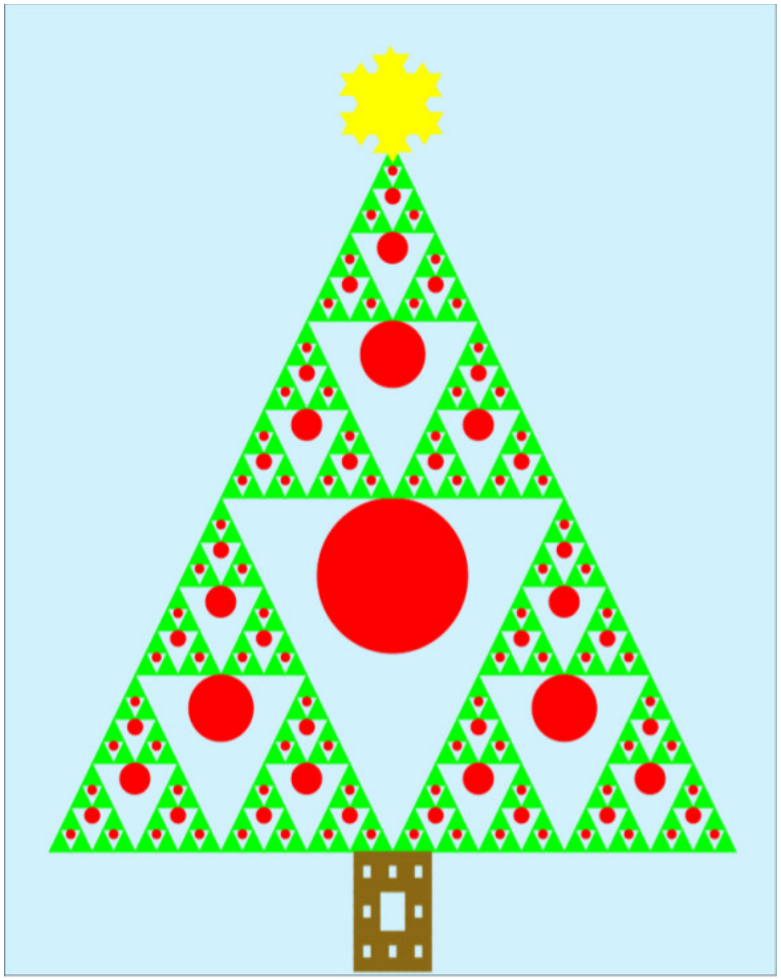


Geometriai analóg: Sierpinski-háromszög



Egy alkalmazás

Egy alkalmazás



Kellemes ünnepeket kíván a
Bolyai Intézet!

And now for something completely different!

And now for something completely different!

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a 2015! szám?

And now for something completely different!

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a 2015! szám?

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható az $n!$ szám?

And now for something completely different!

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a 2015! szám?

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható az $n!$ szám?

FELADAT

Mi 2 legmagasabb kitevős hatványa, amivel osztható a $(2n)!$ szám?

Inverz probléma

Inverz probléma

FELADAT

Adott k kitevő. Határozzuk meg azt a legkisebb n-et, hogy

$$2^k | (2n)!$$

teljesüljön.

Inverz probléma

FELADAT

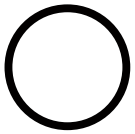
Adott k kitevő. Határozzuk meg azt a legkisebb n-et, hogy

$$2^k | (2n)!$$

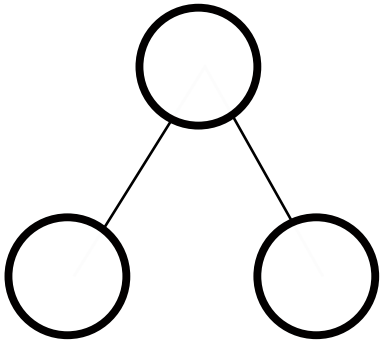
teljesüljön.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2n	2	4	4	6	8	8	8	10	12	12	14	16
n=i(k)	1	2	2	3	4	4	4	5	6	6	7	8

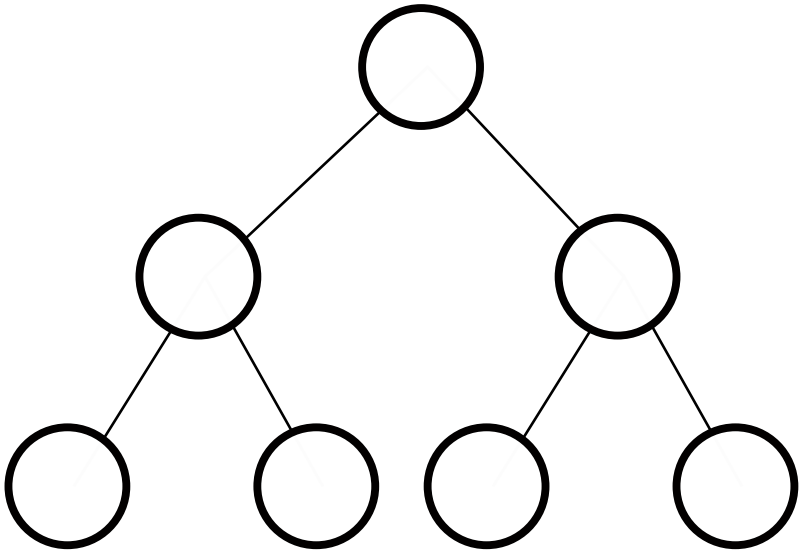
Egy fa



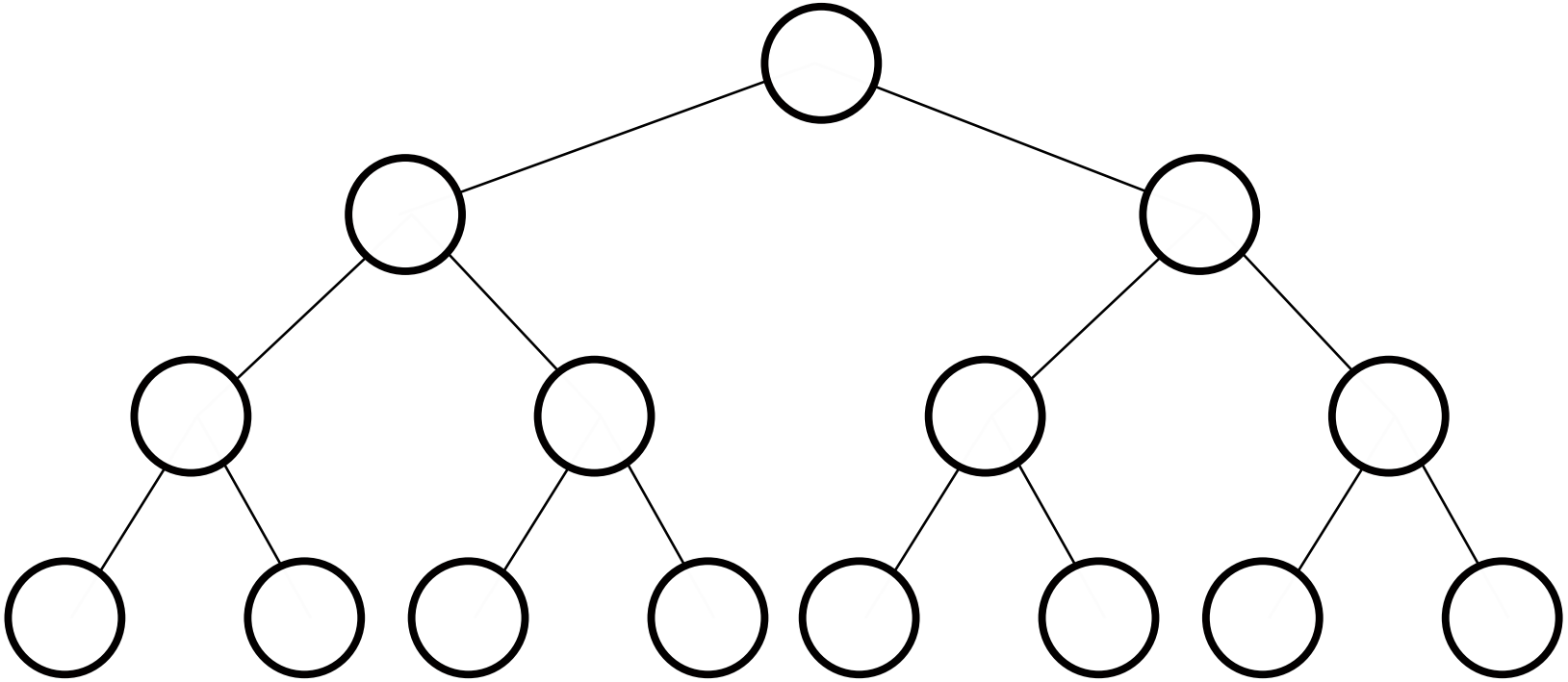
Egy fa



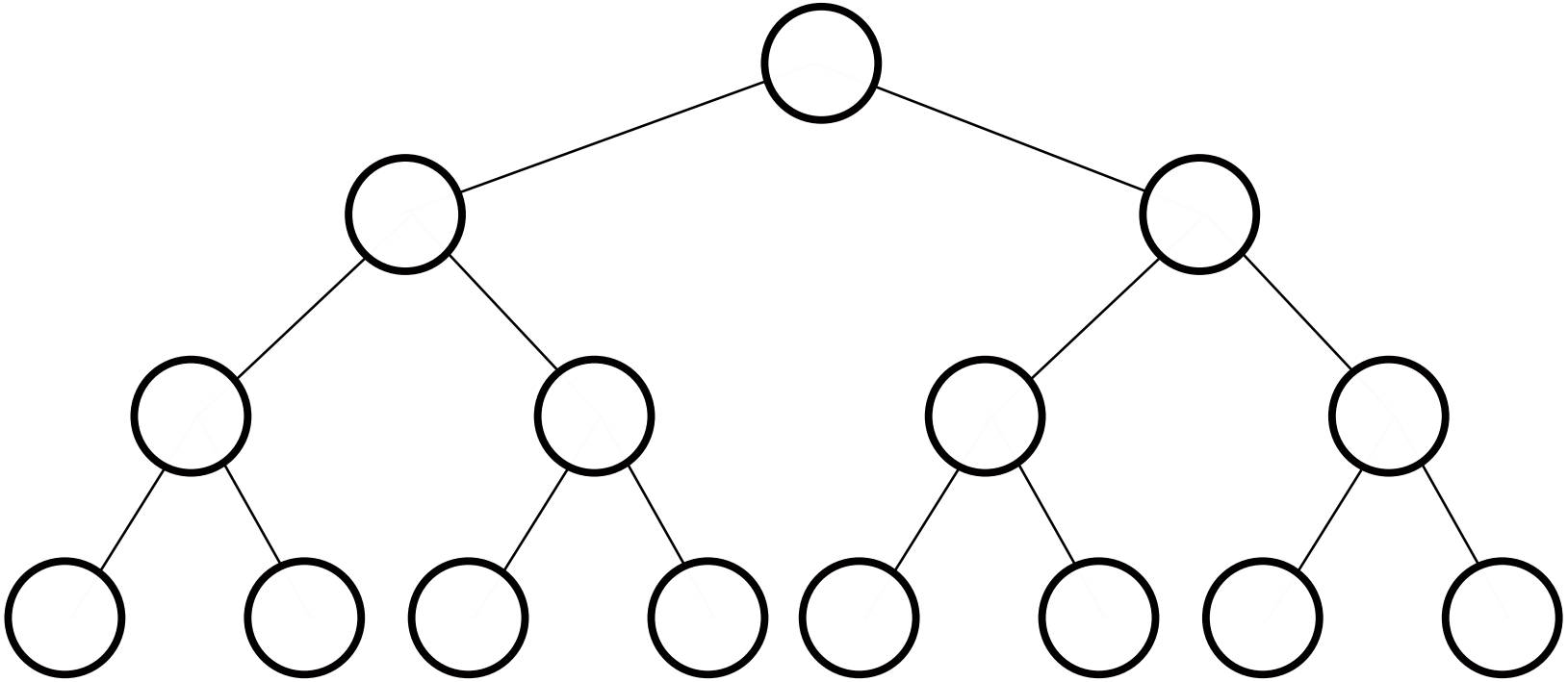
Egy fa



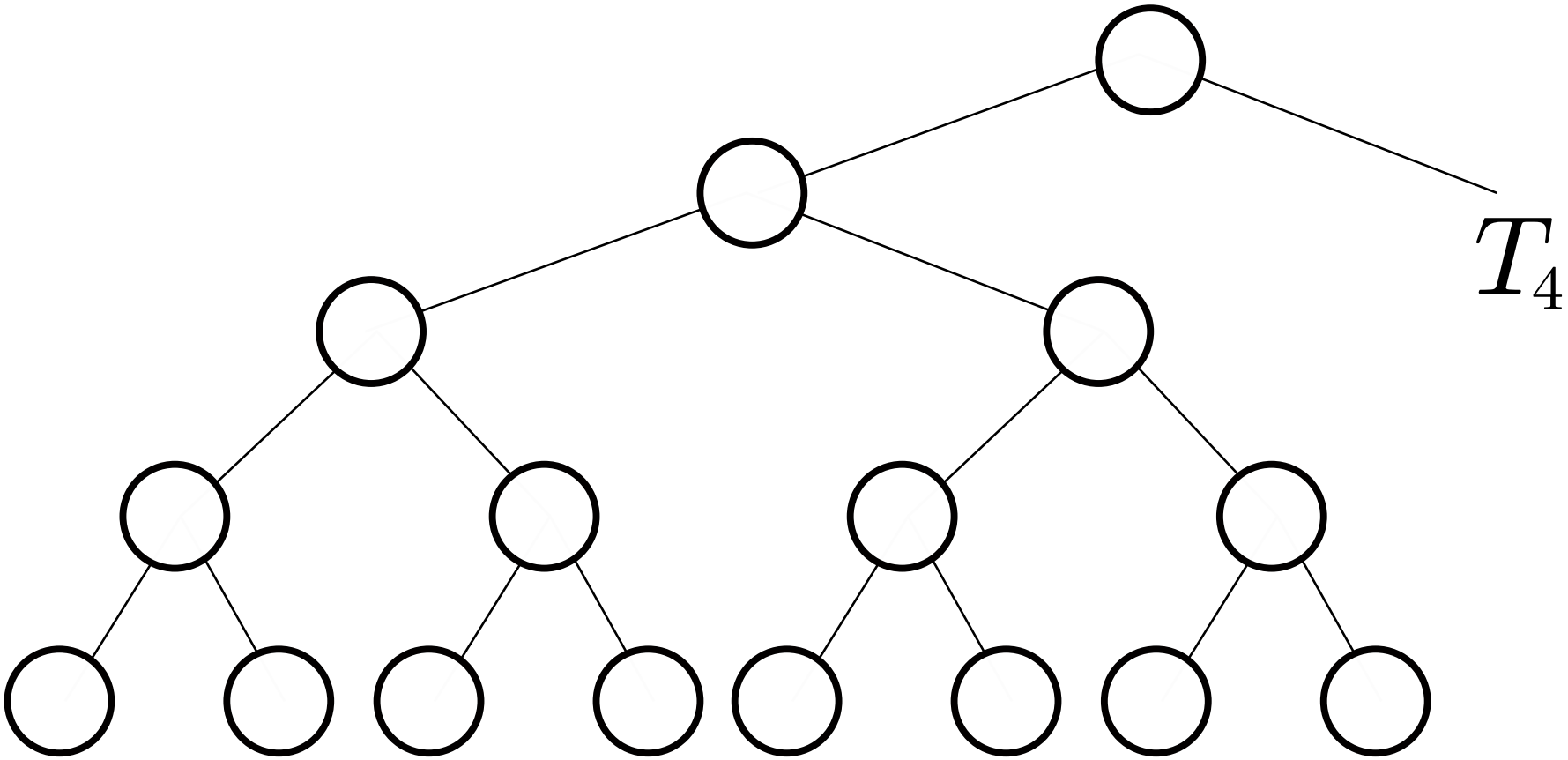
Egy fa



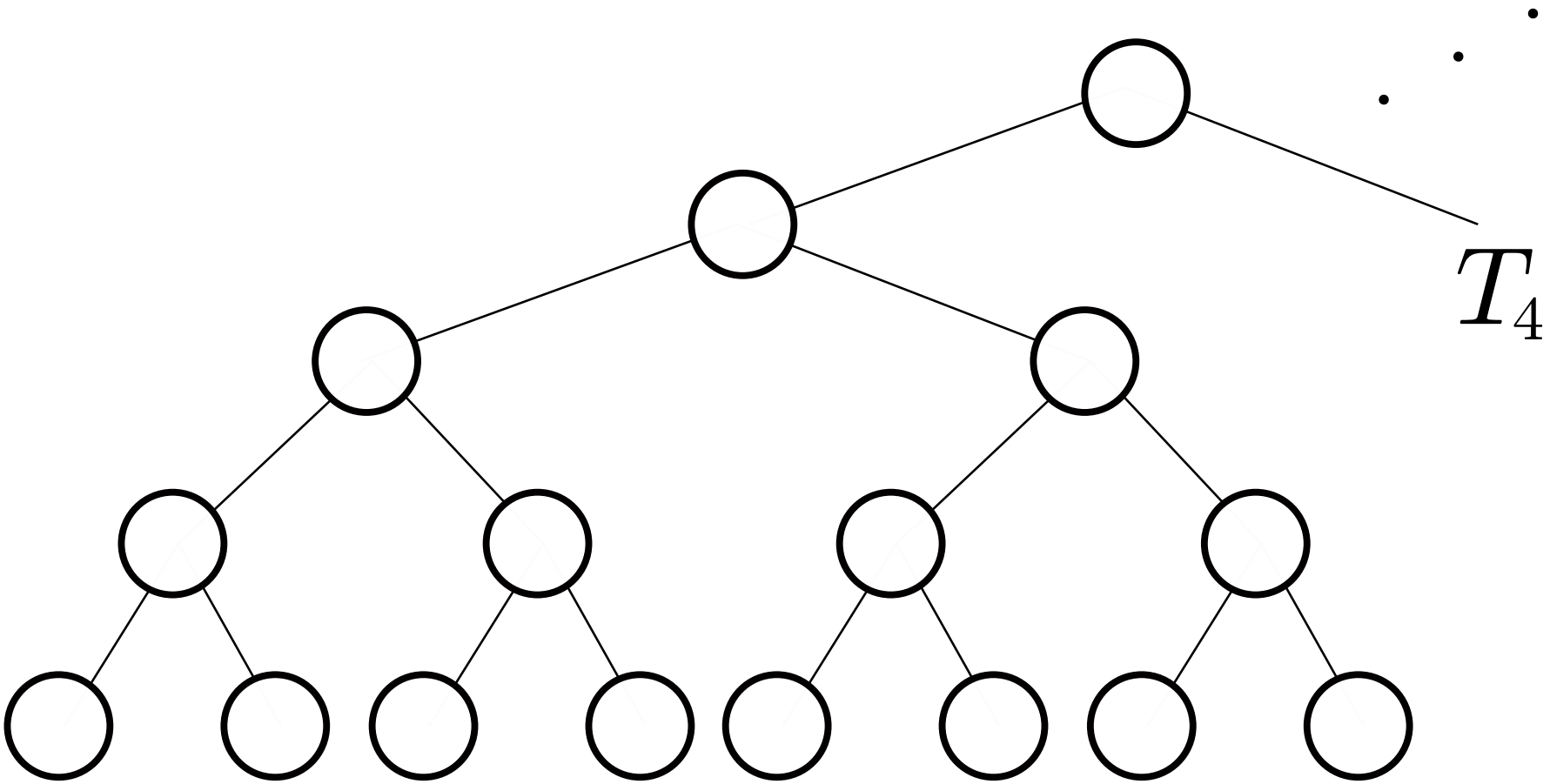
Egy fa



Egy fa



Egy fa

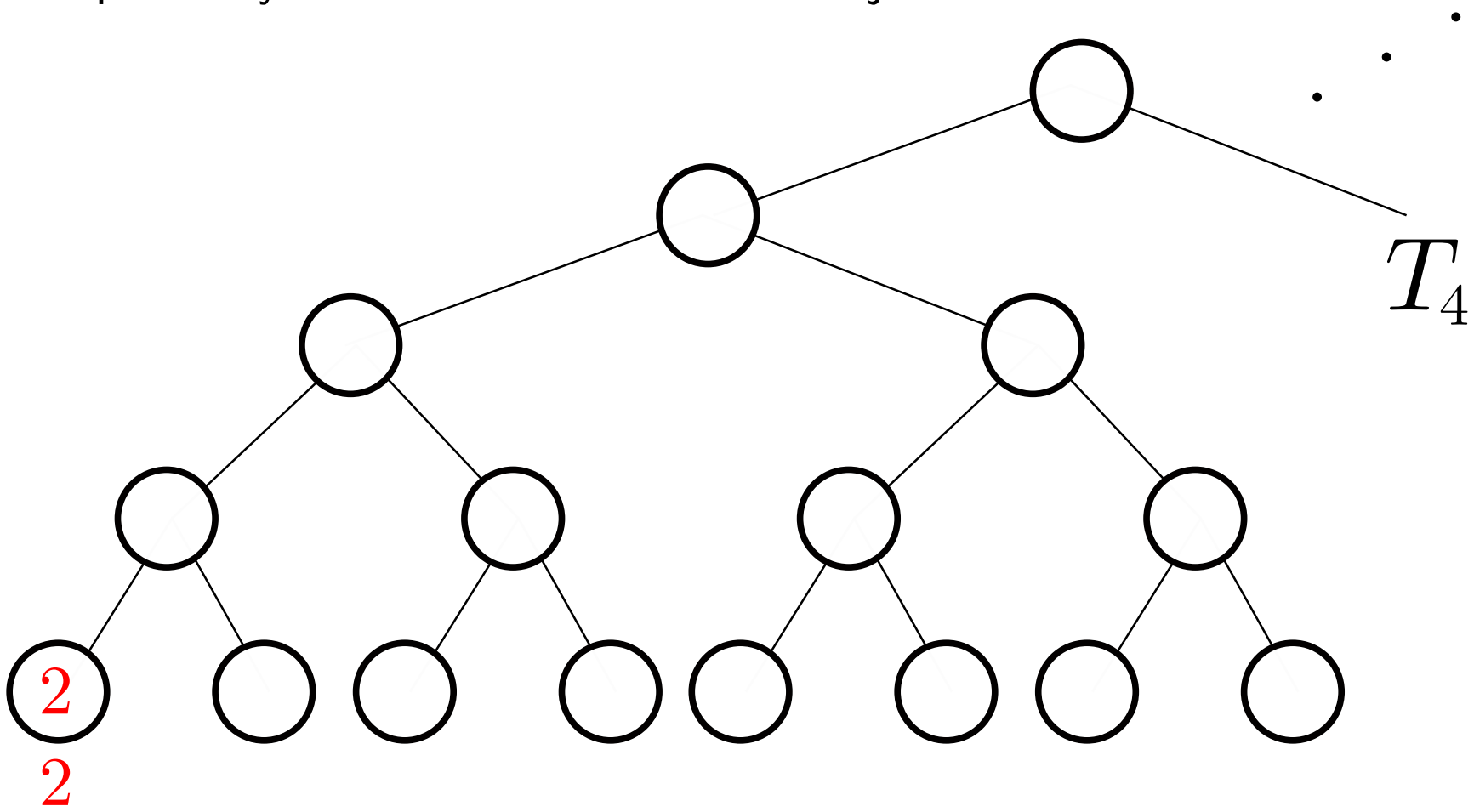


$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?

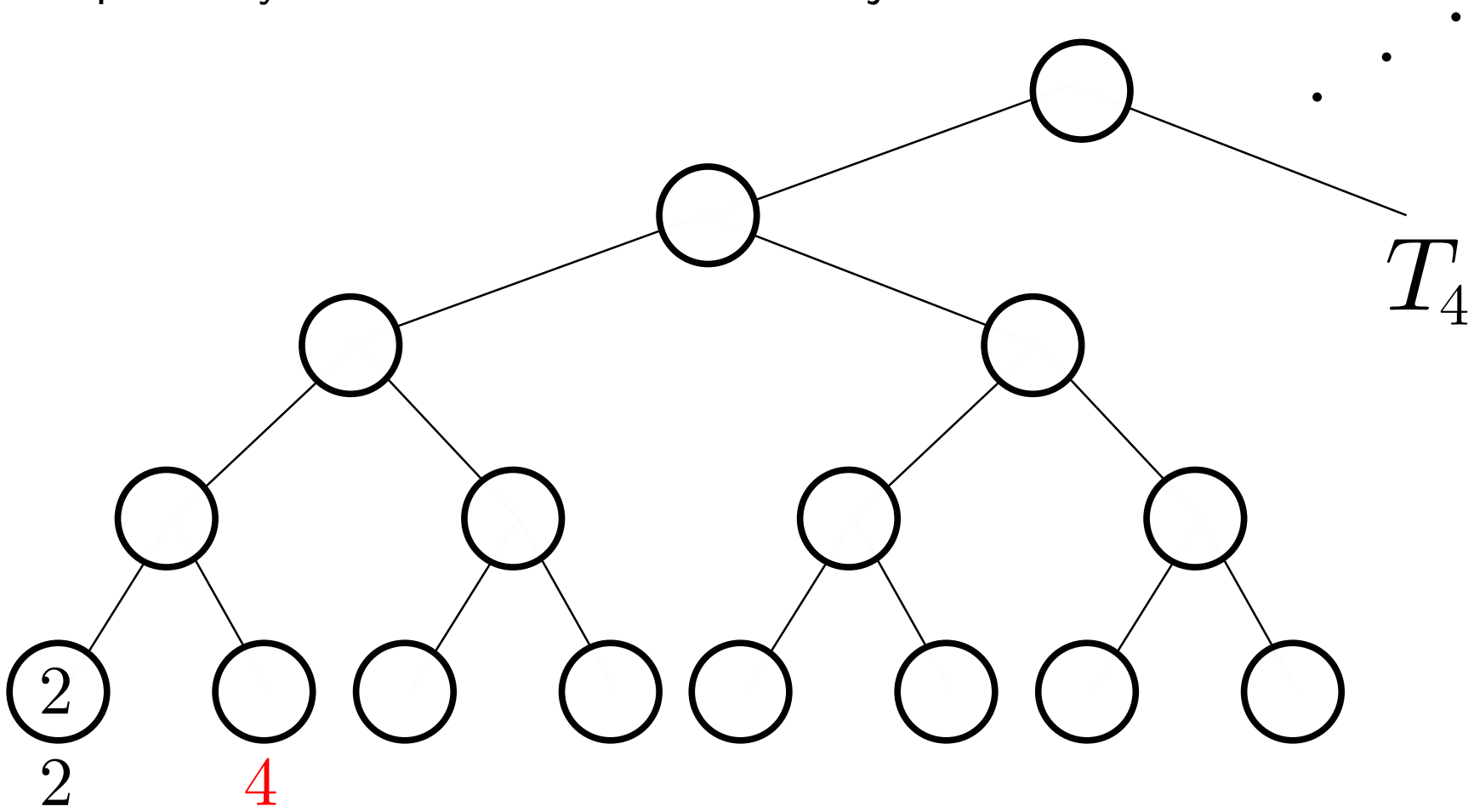
$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



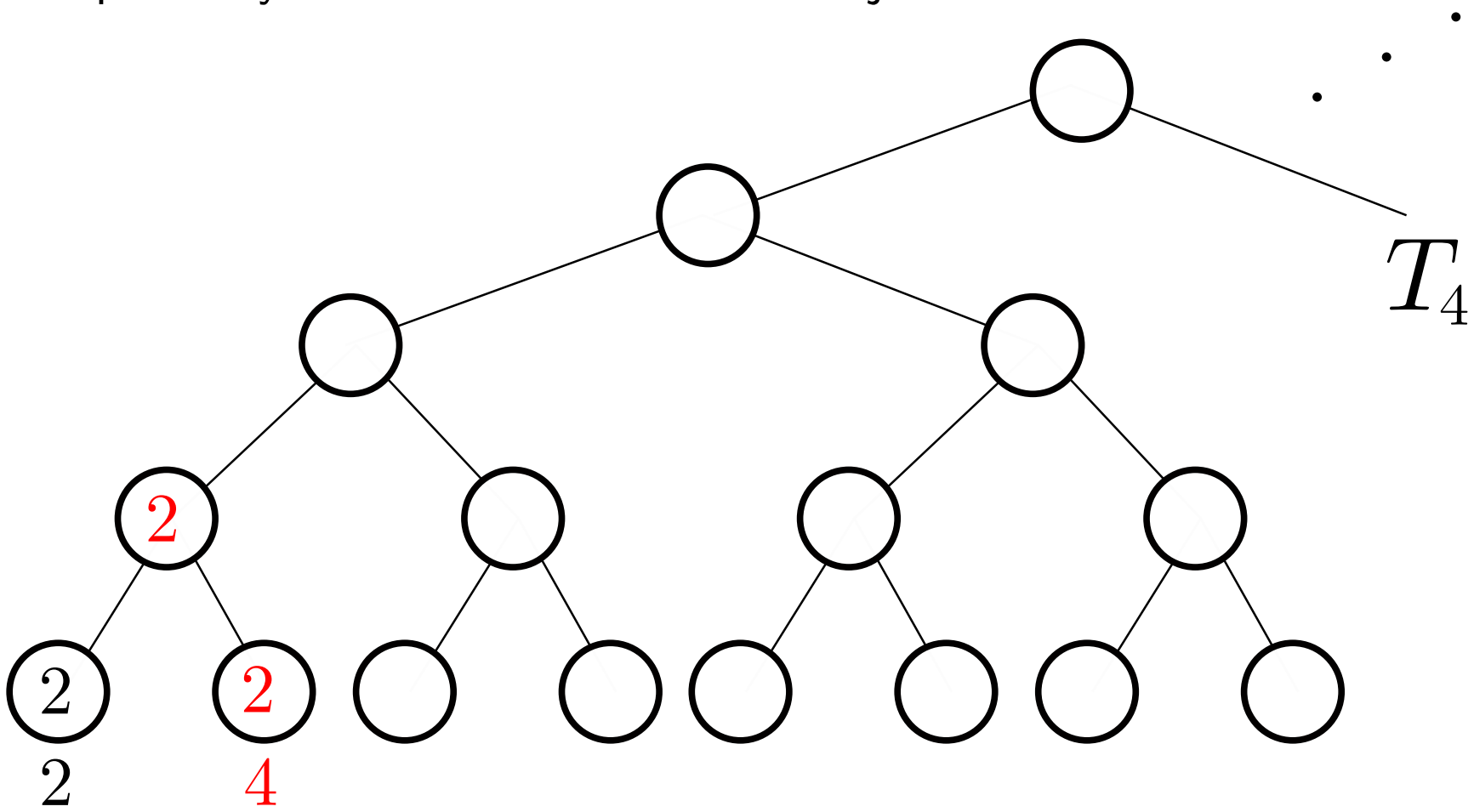
$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



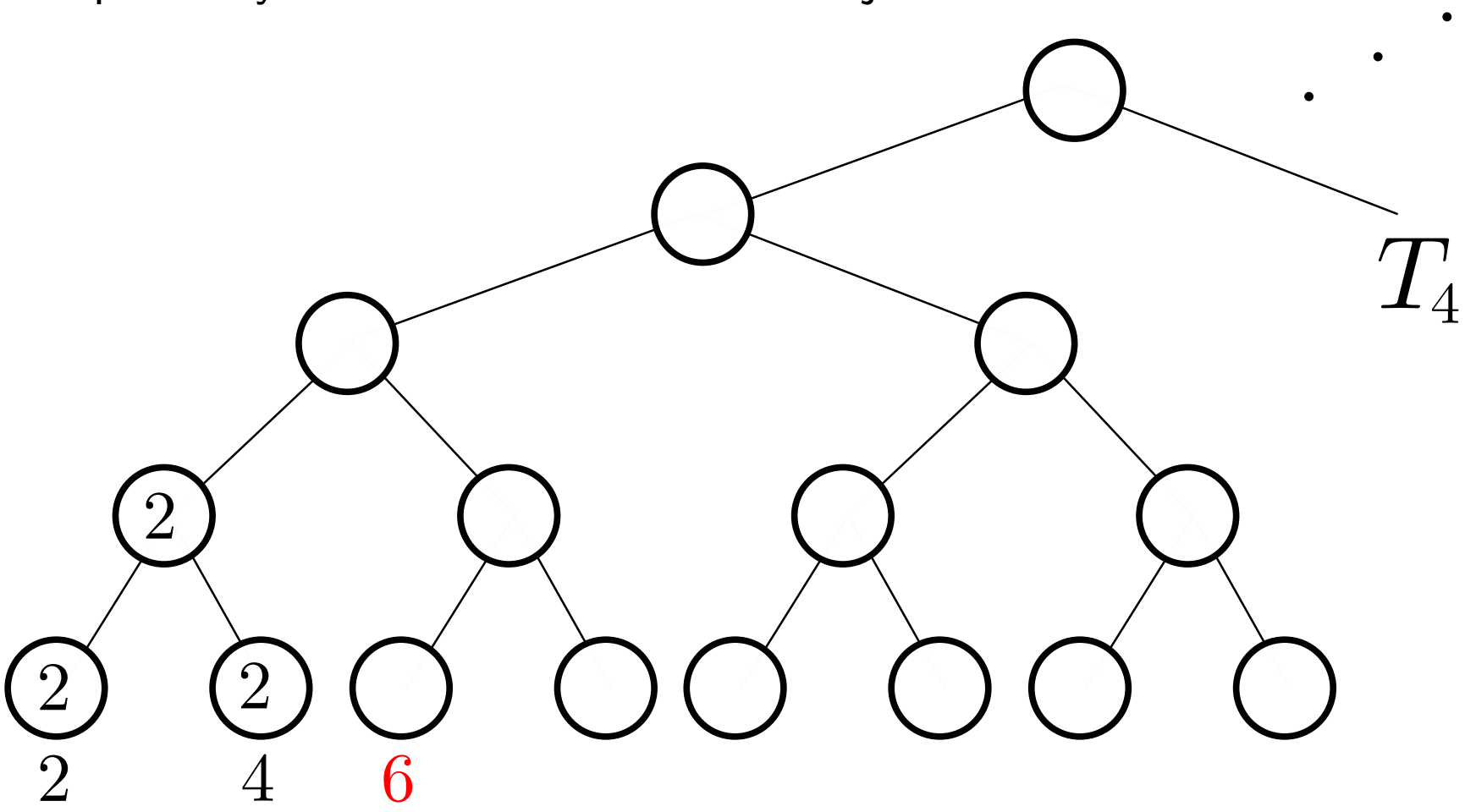
$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



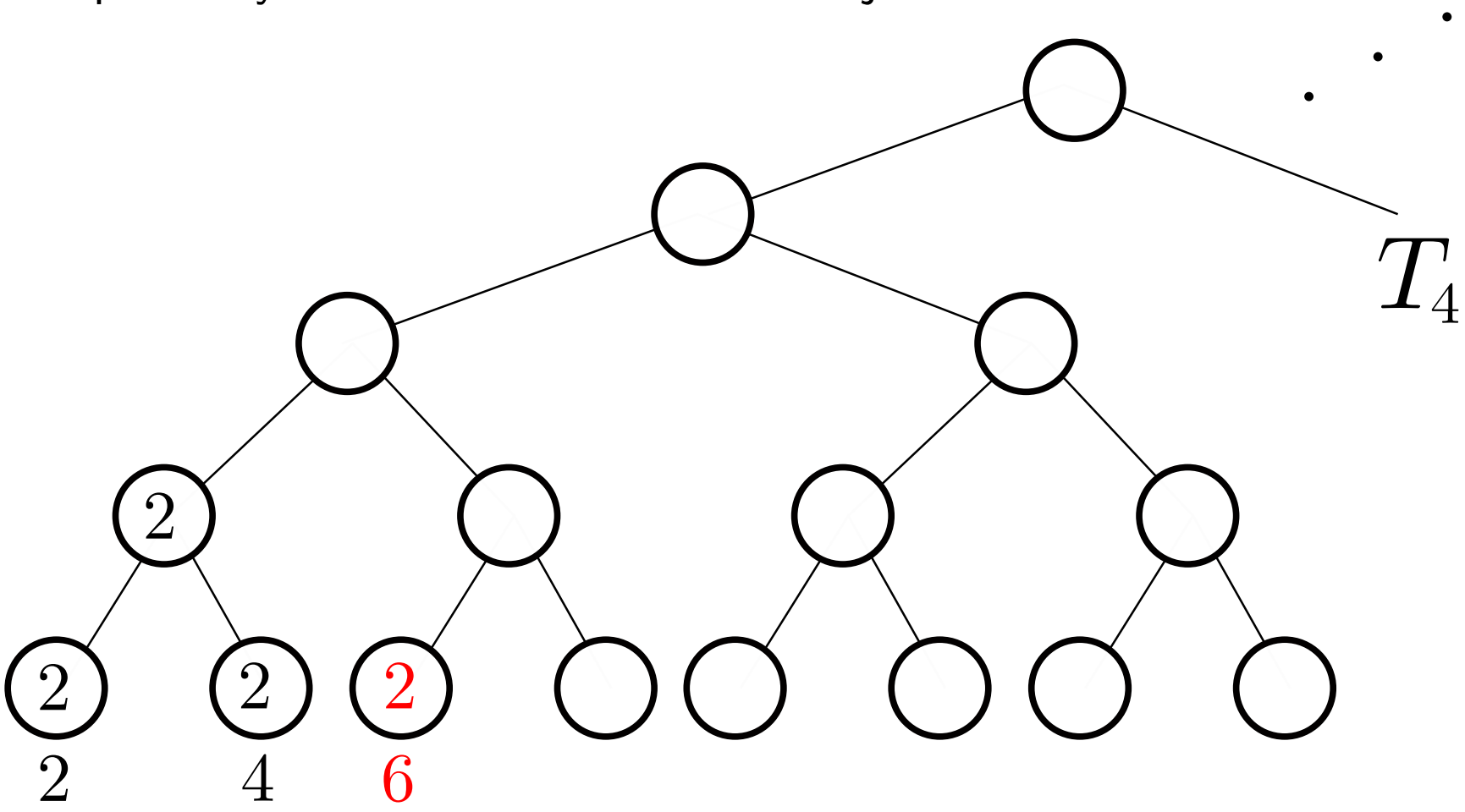
$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



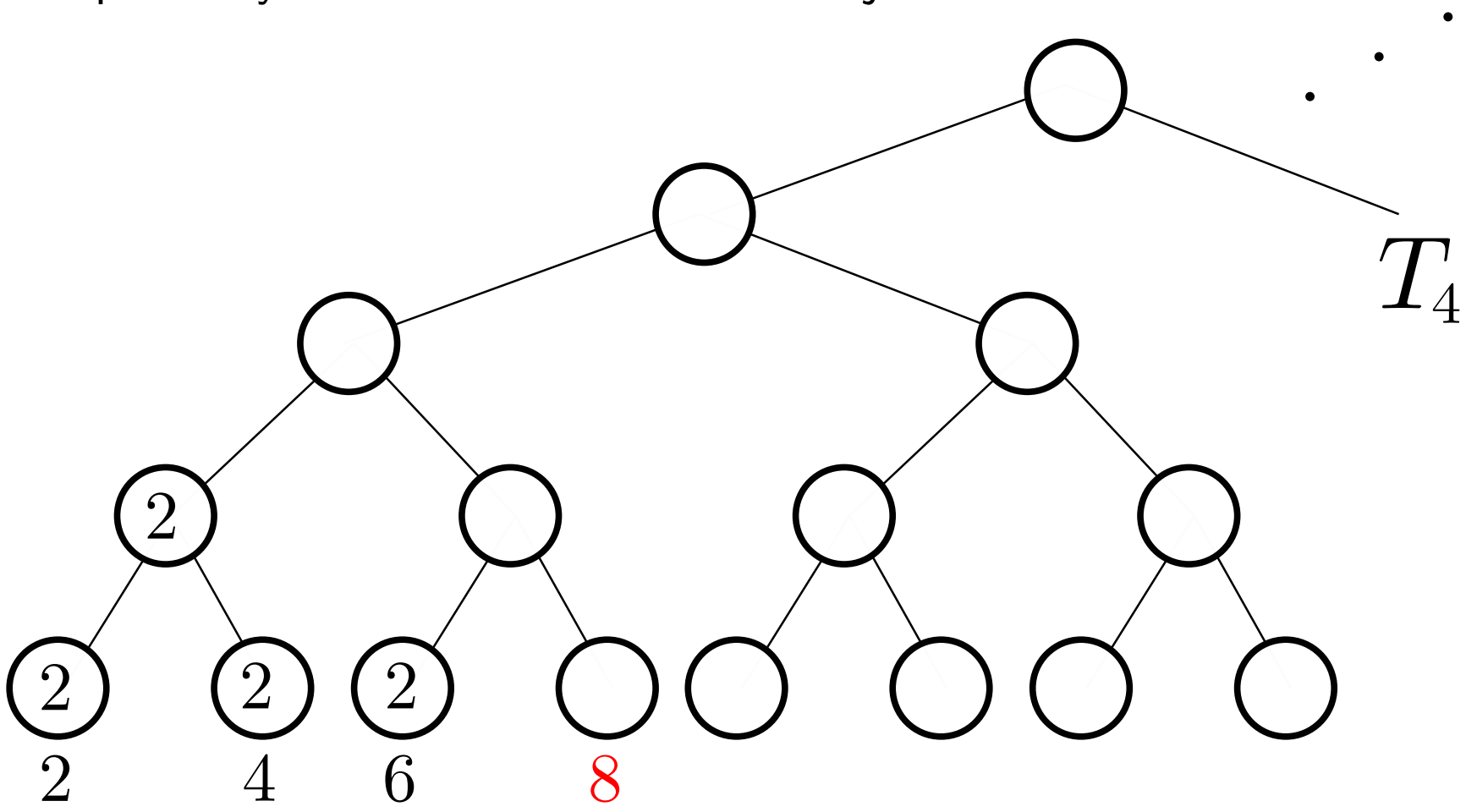
$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?

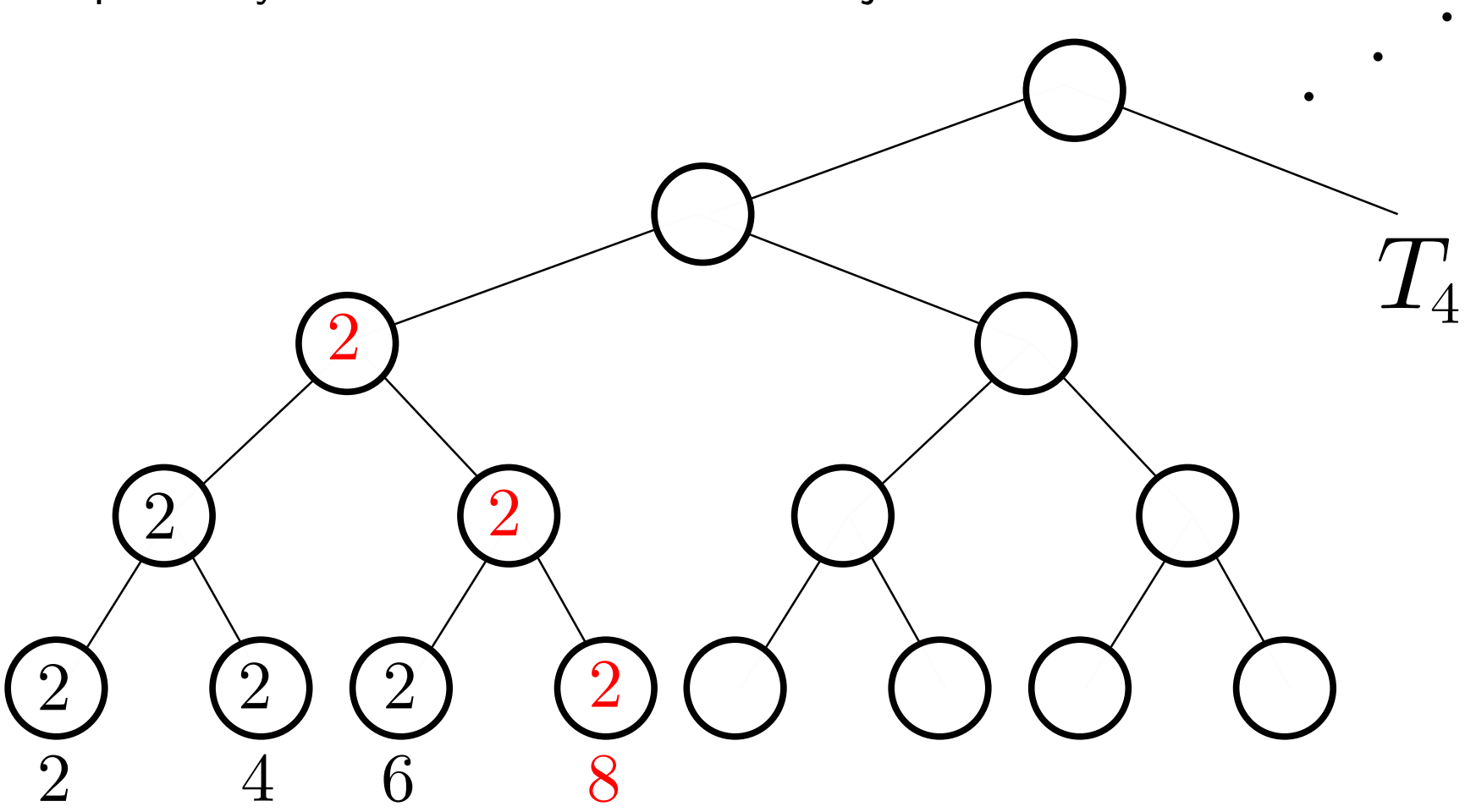


$2^? | 14!$

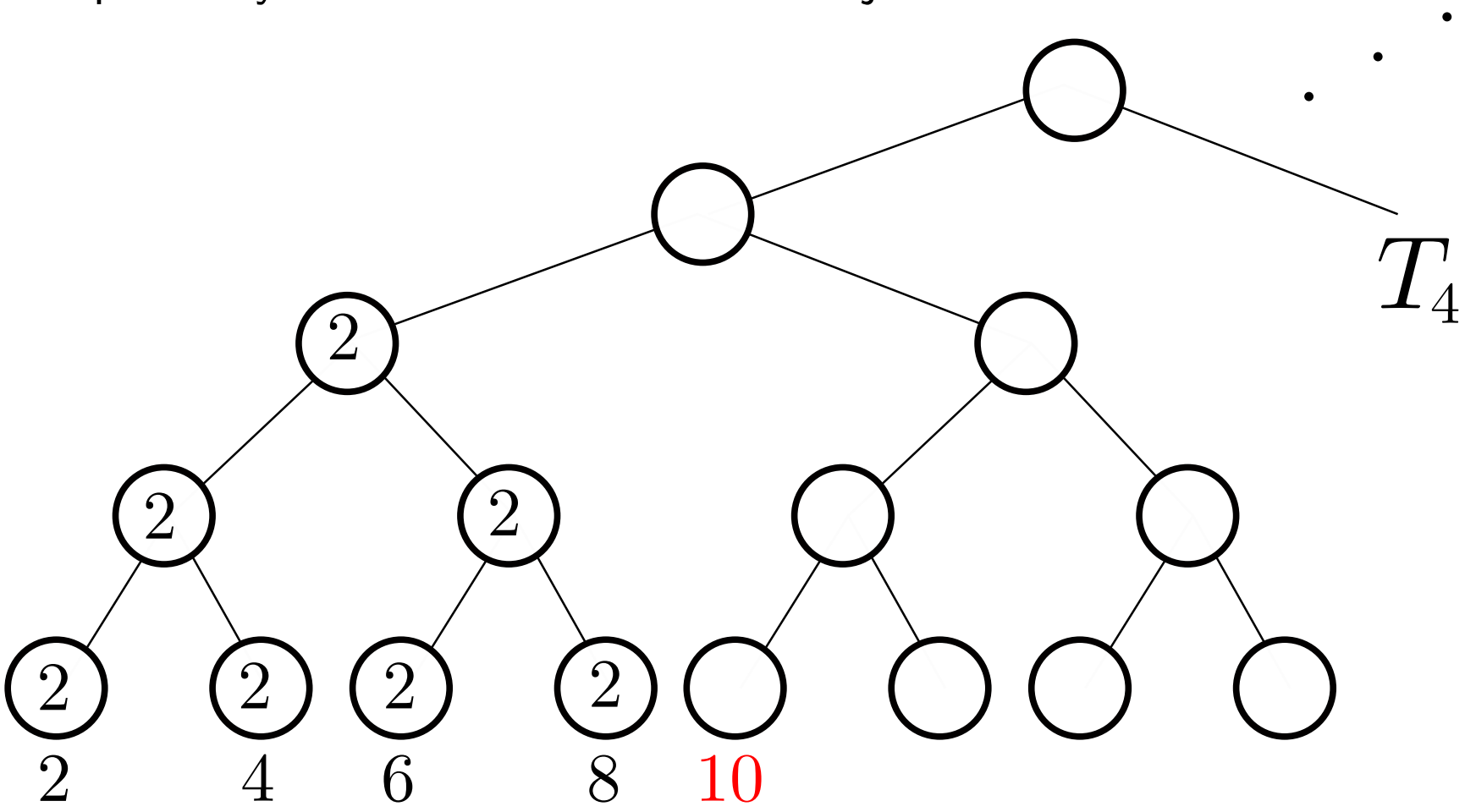
14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



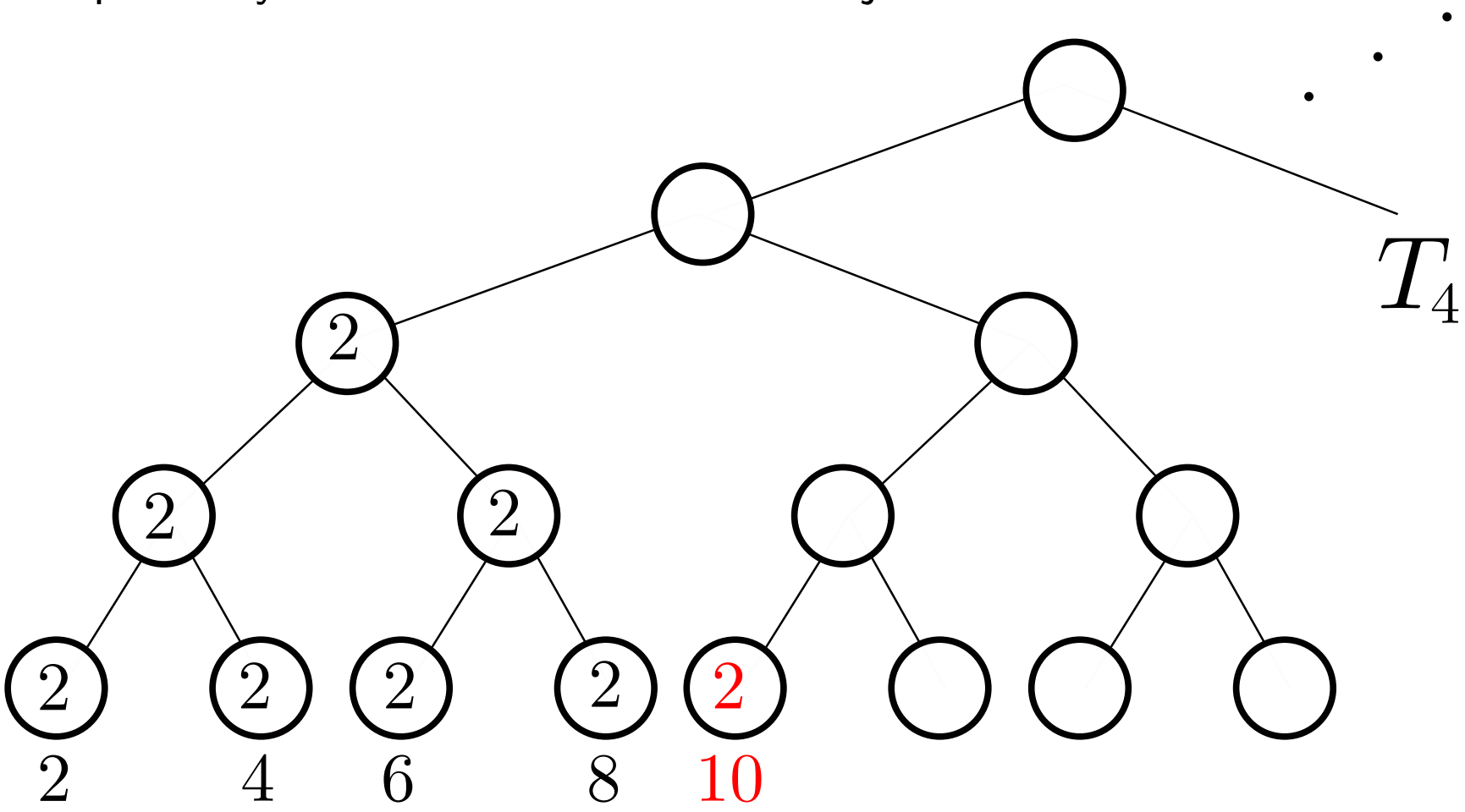
14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



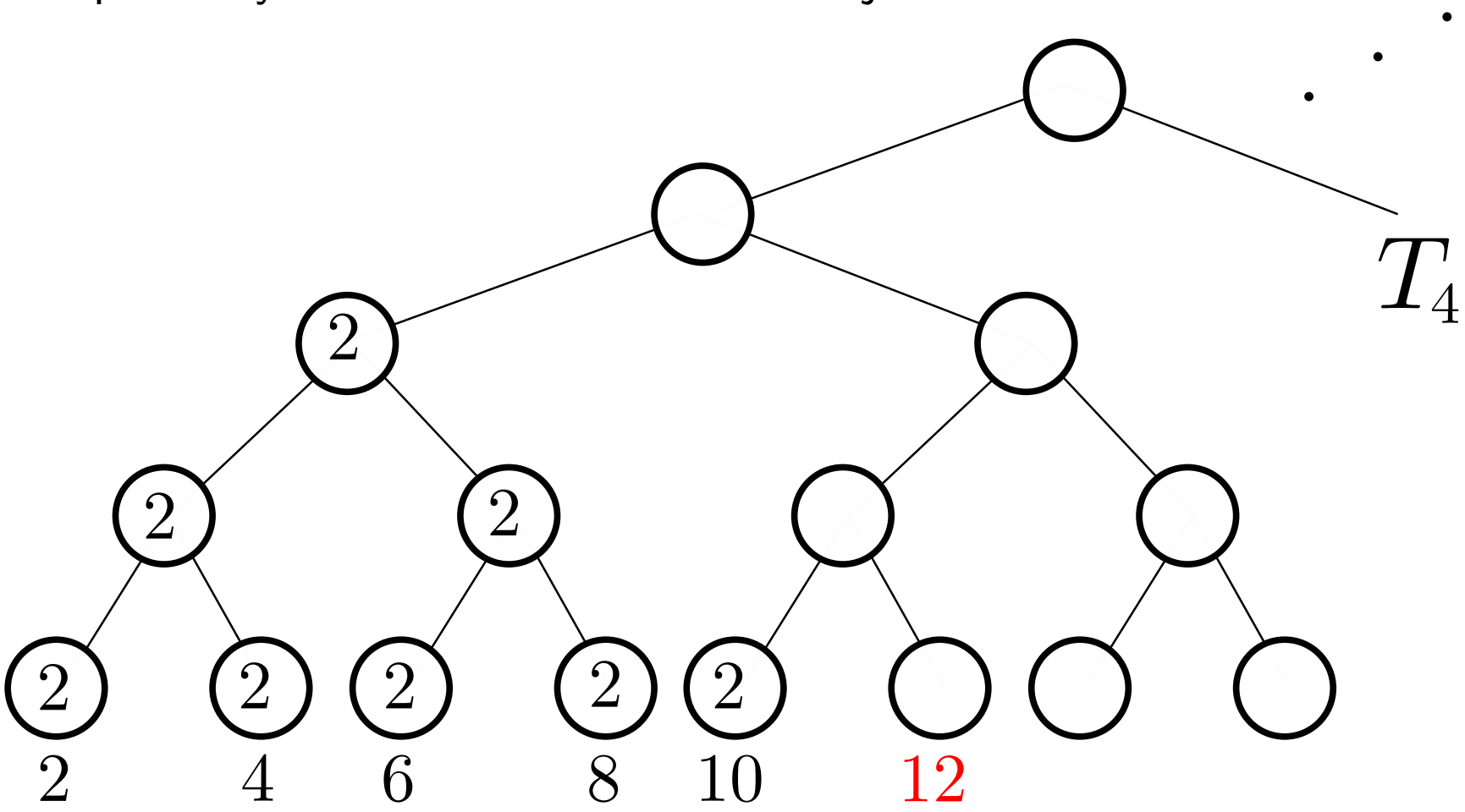
14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



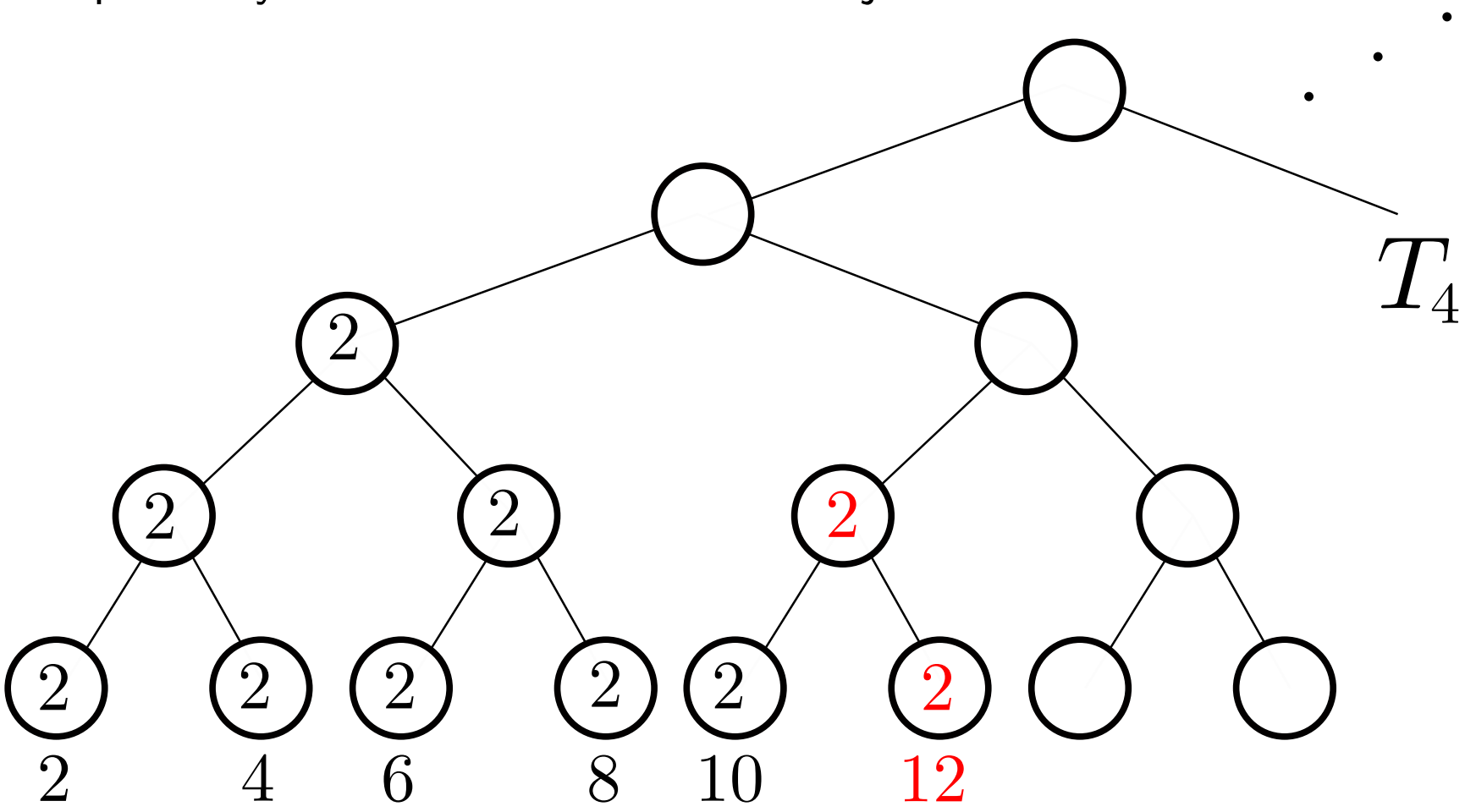
14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



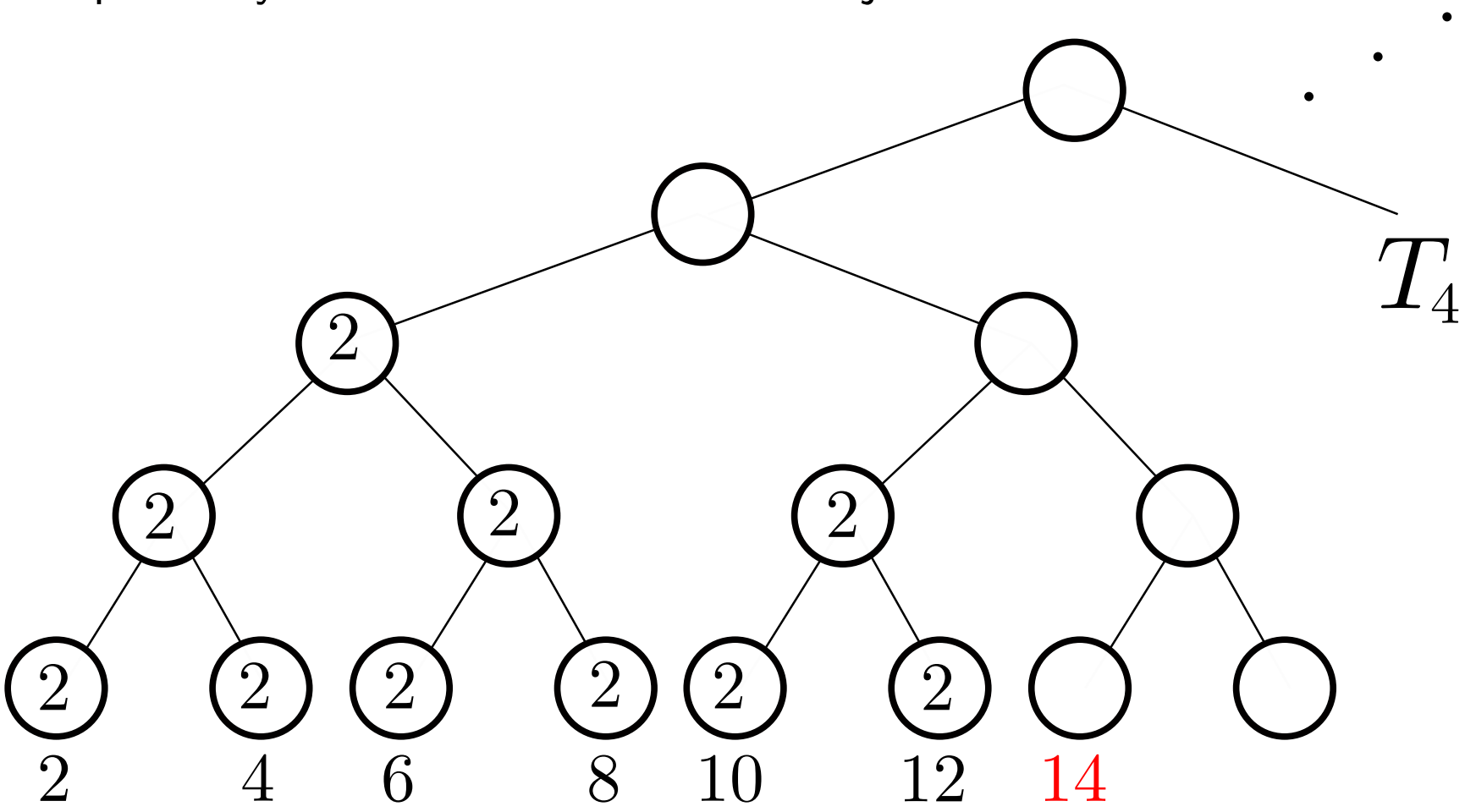
14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



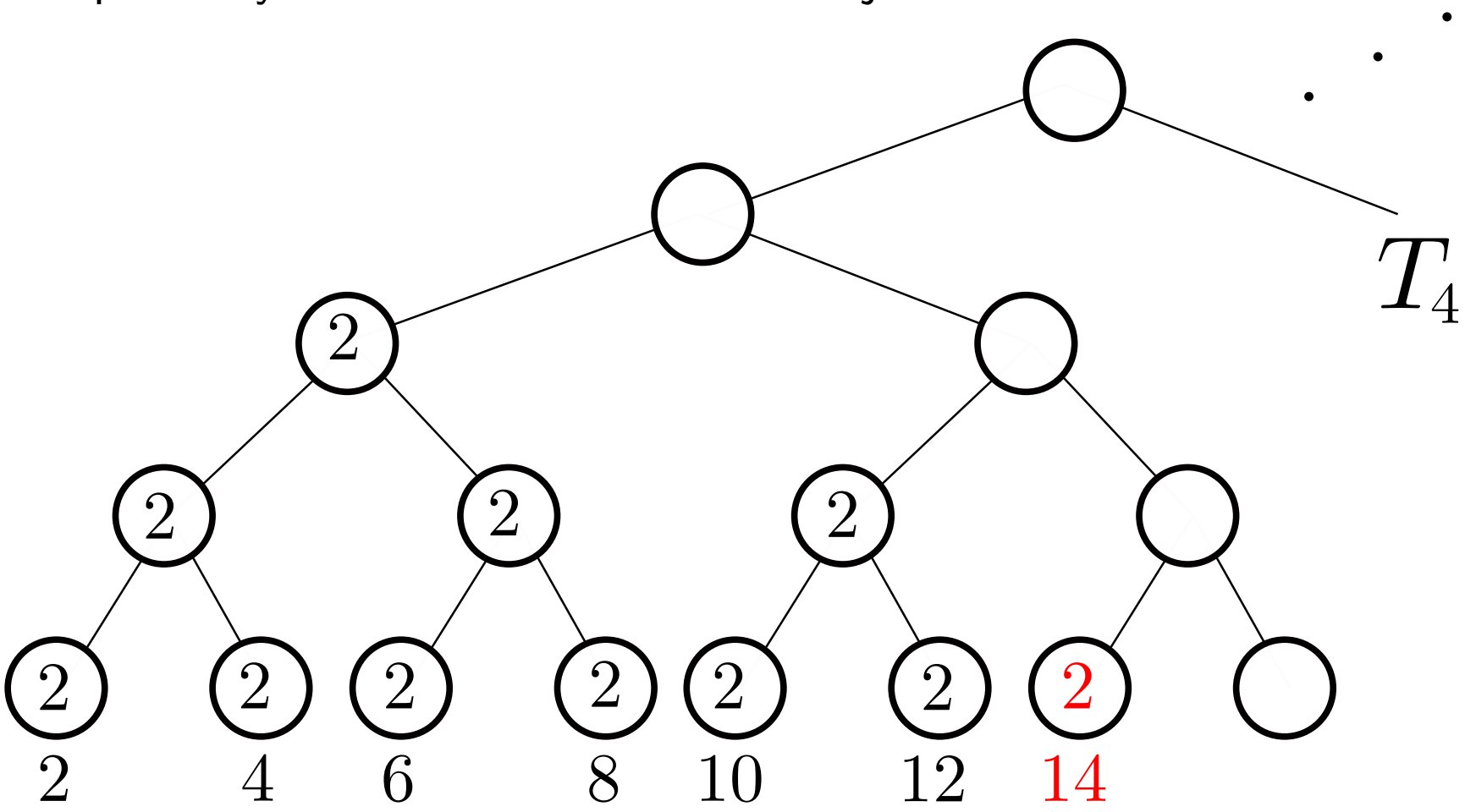
14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?

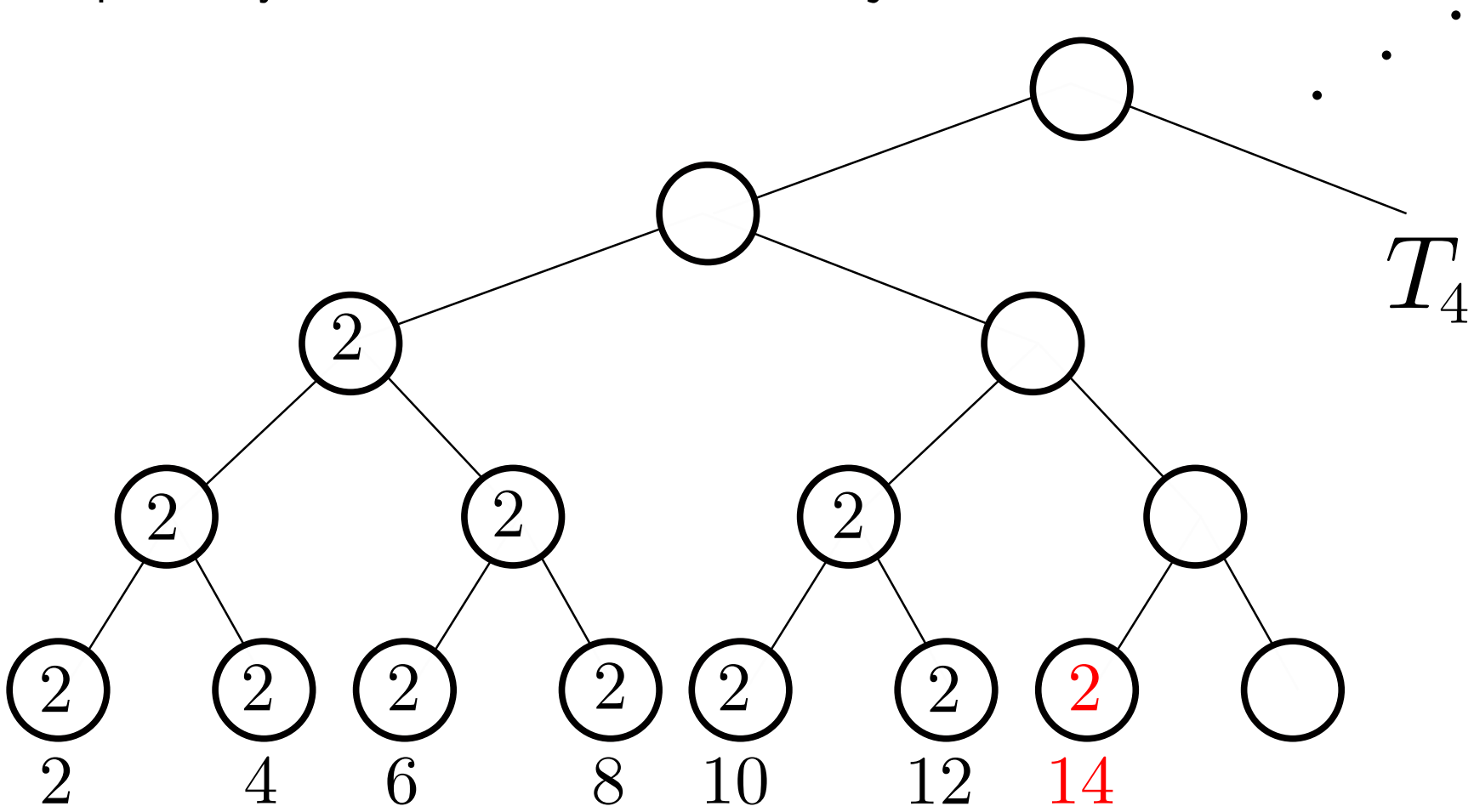


14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?



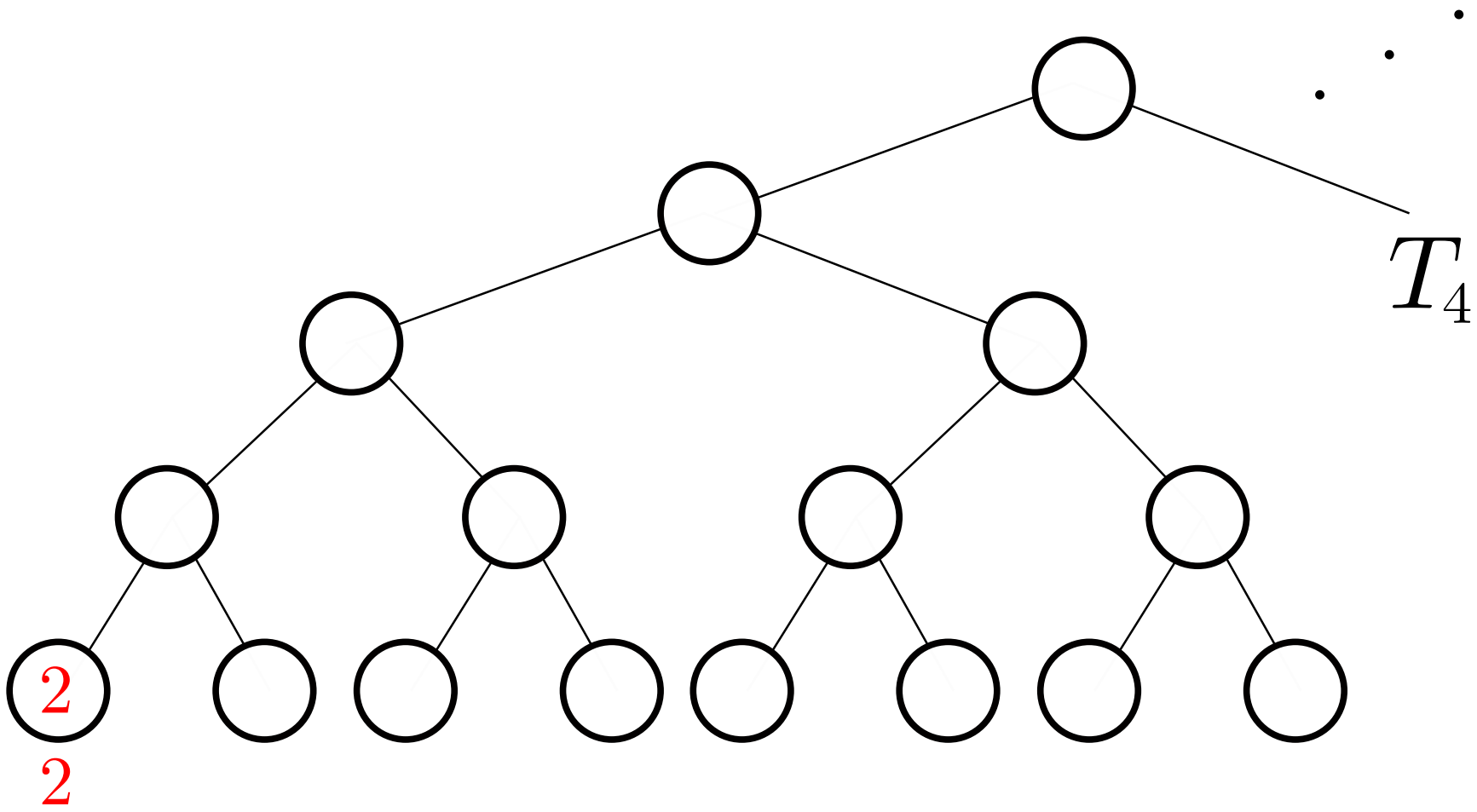
$2^? | 14!$

14! prímtényezős felírásában mi 2 kitevője?

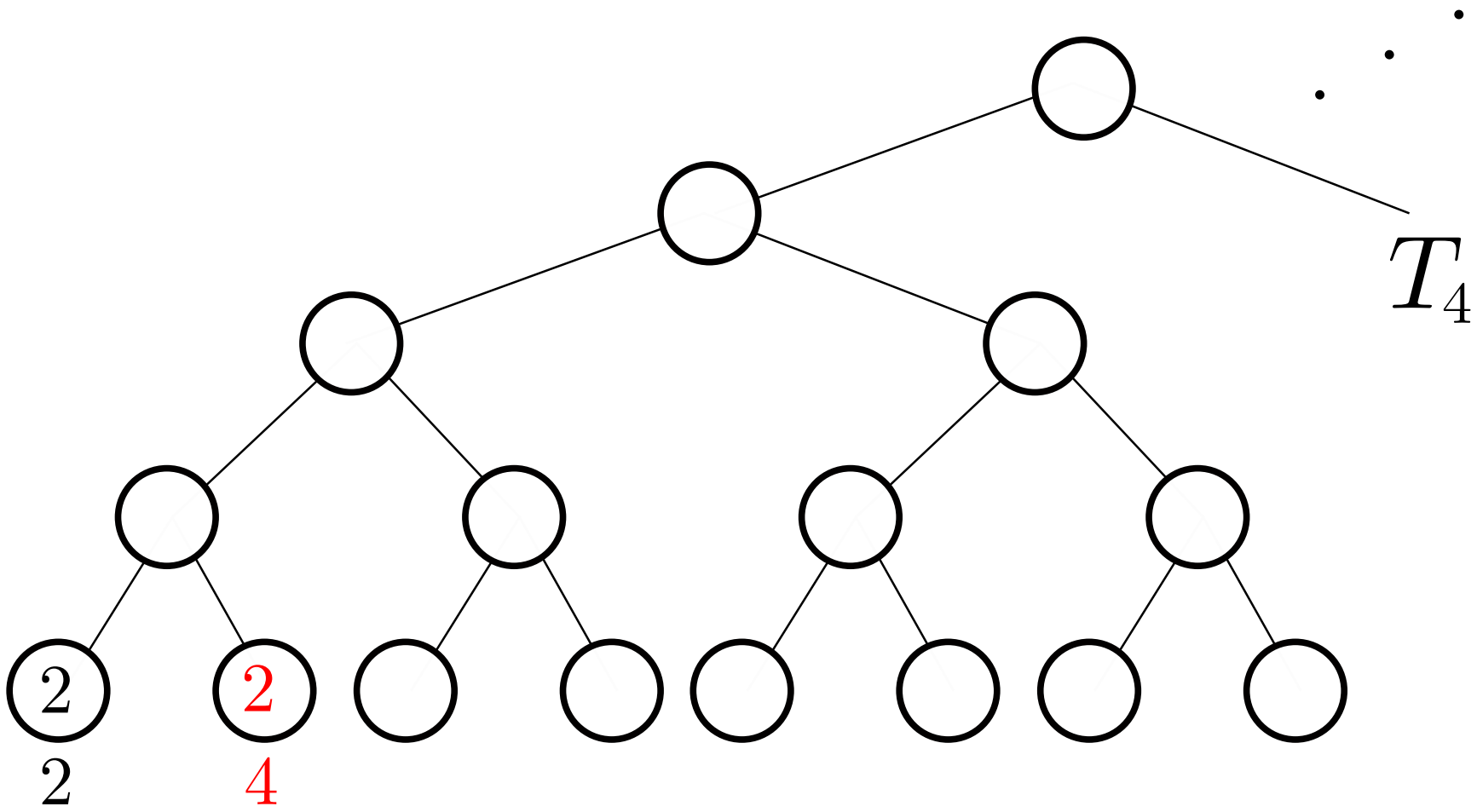


$2^{11} | 14!, \qquad DE \qquad 2^{12} \not| 14!$

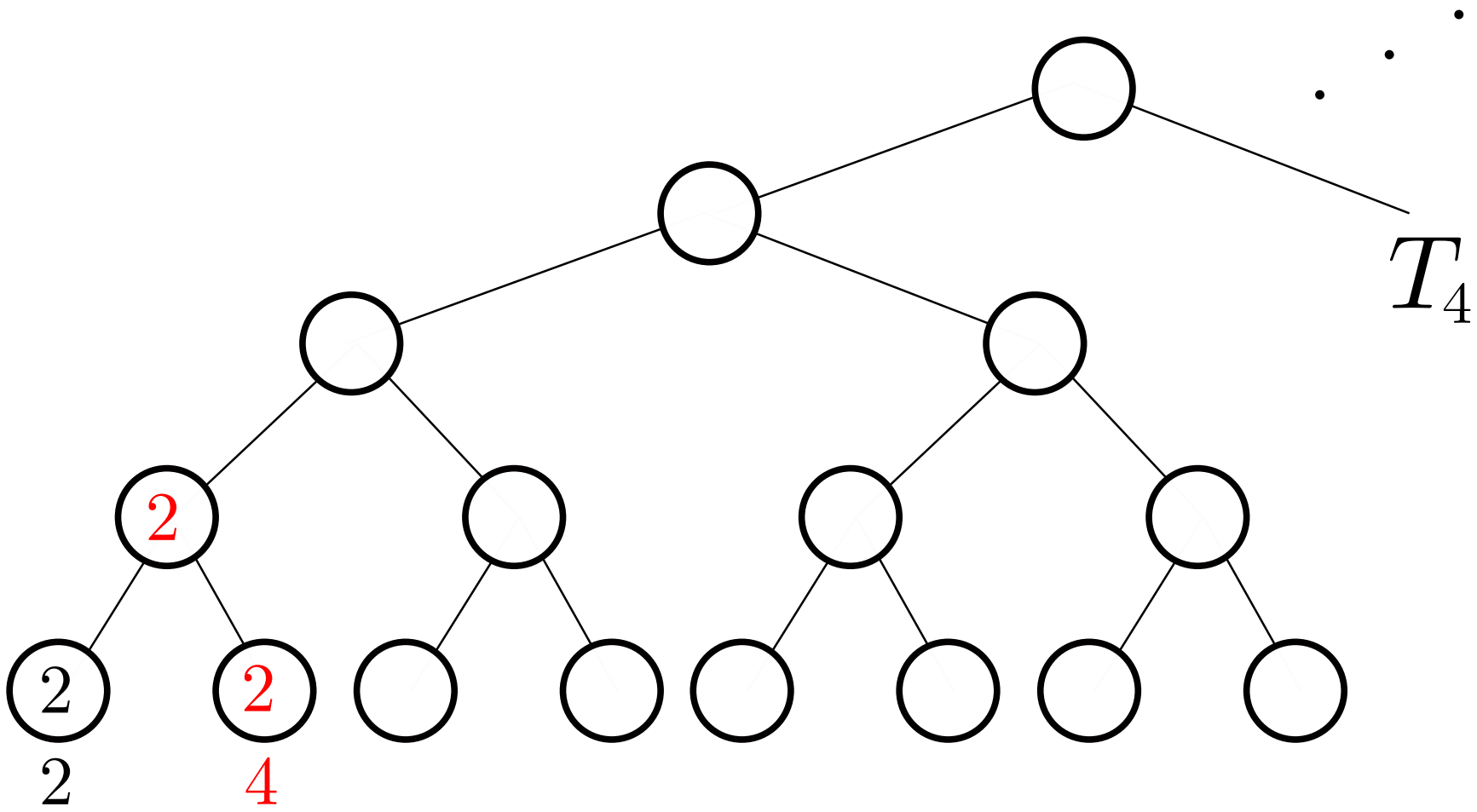
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



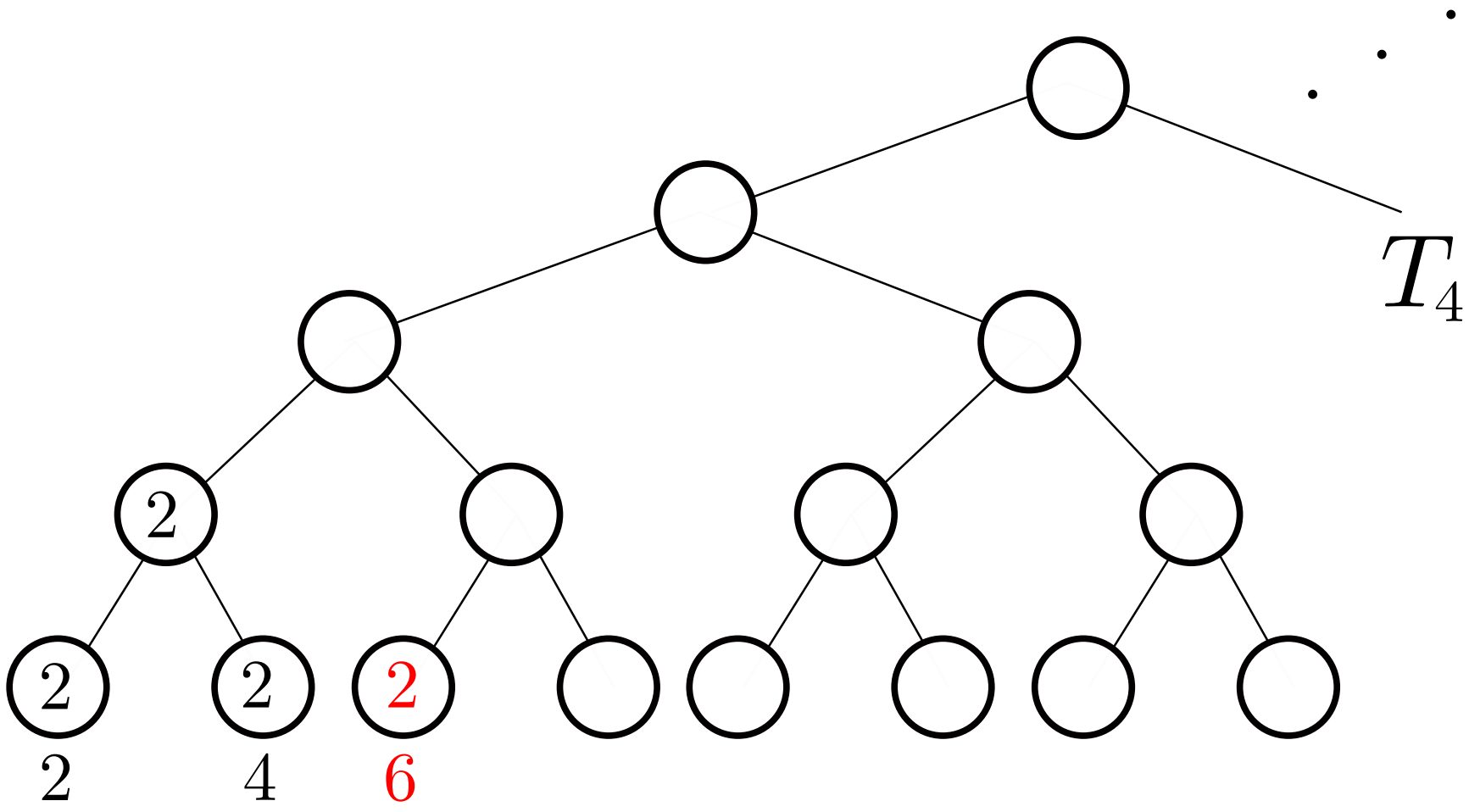
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



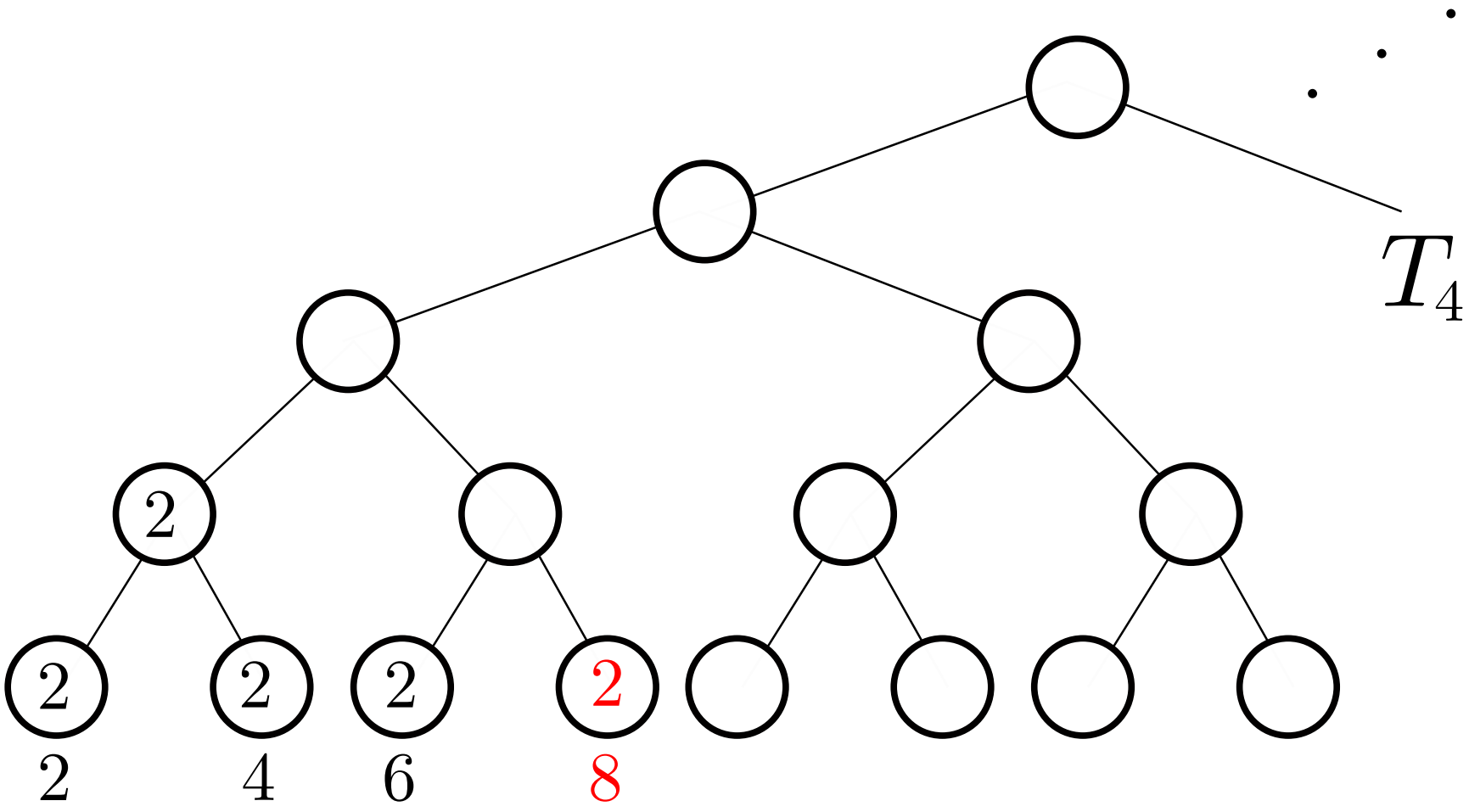
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



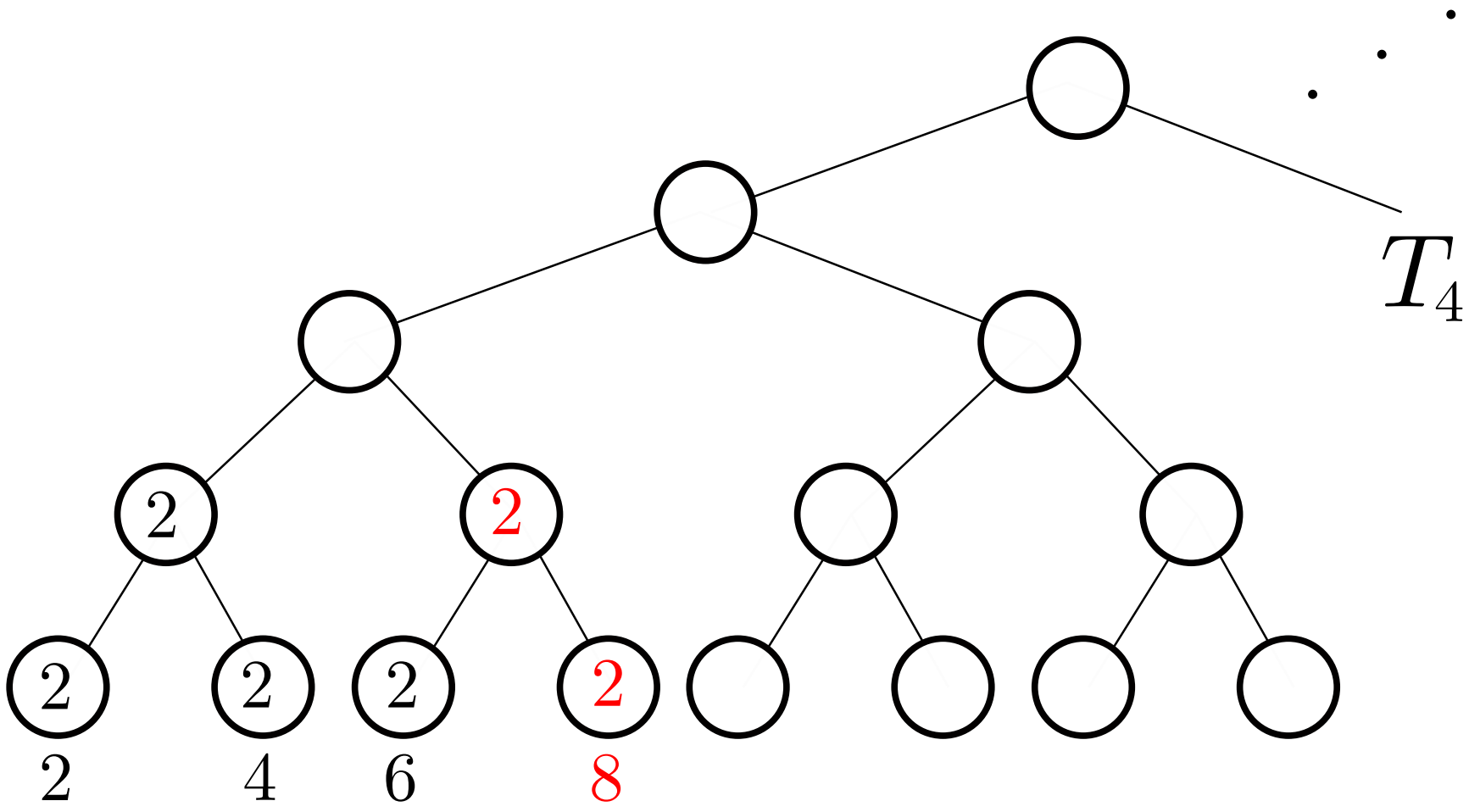
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



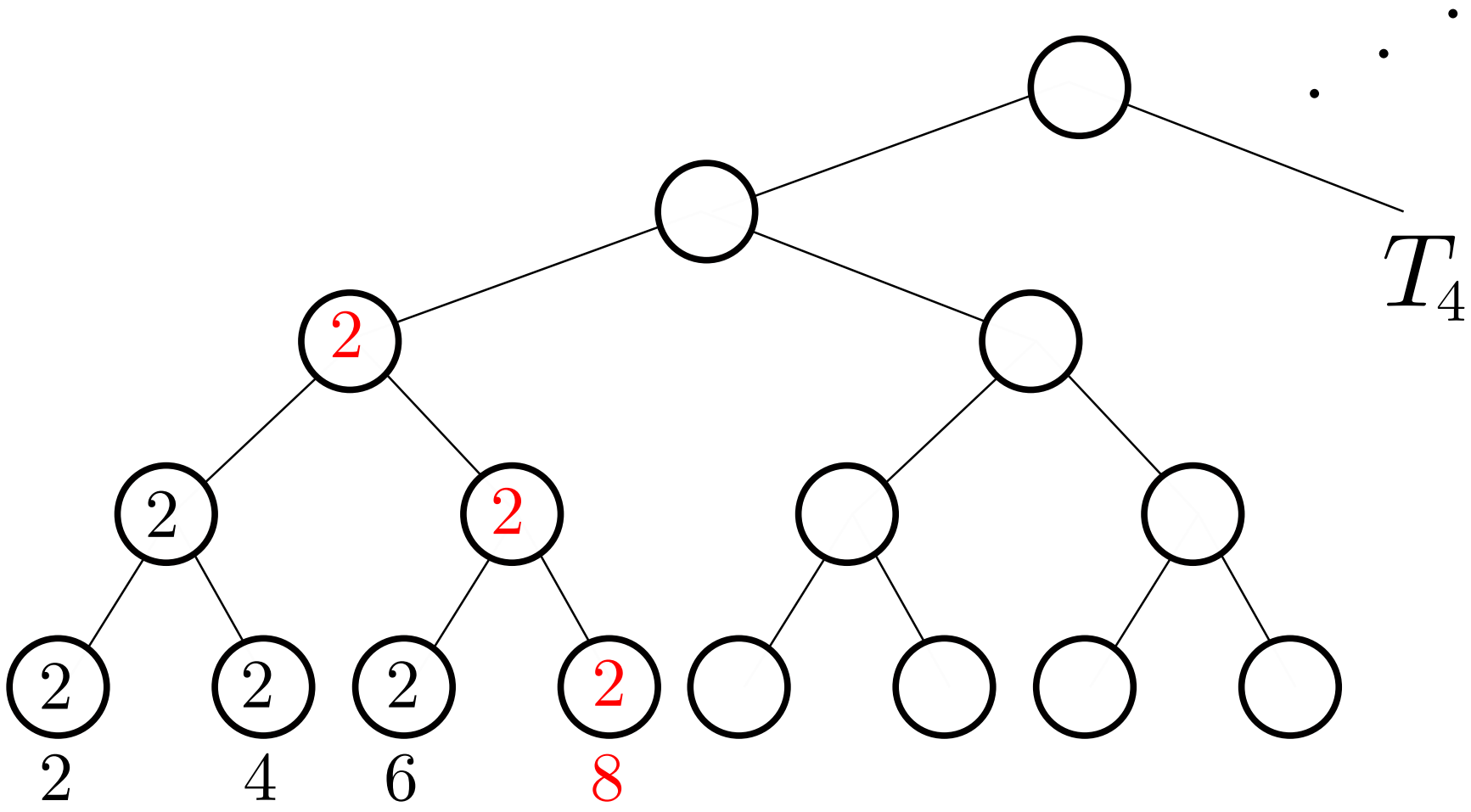
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



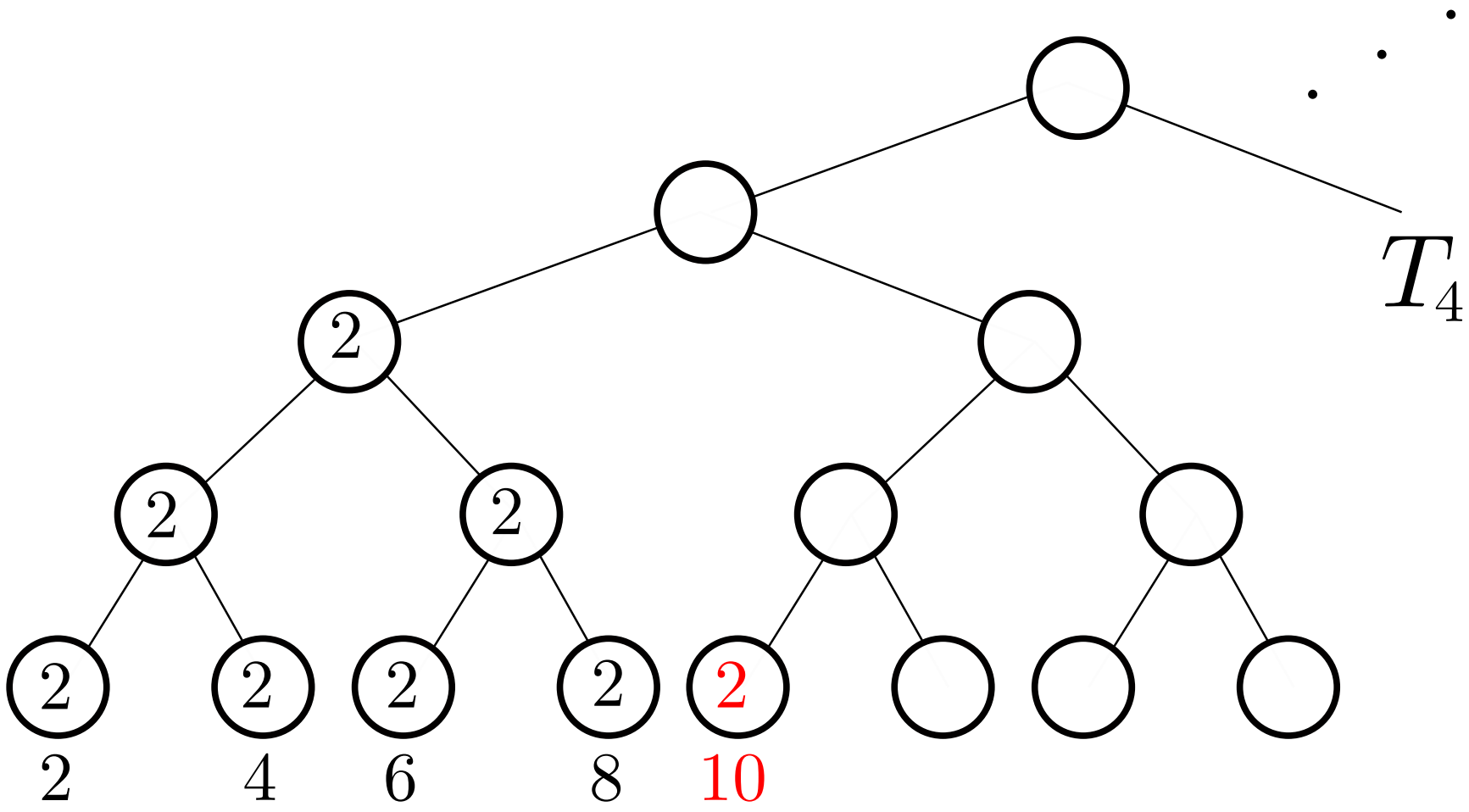
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



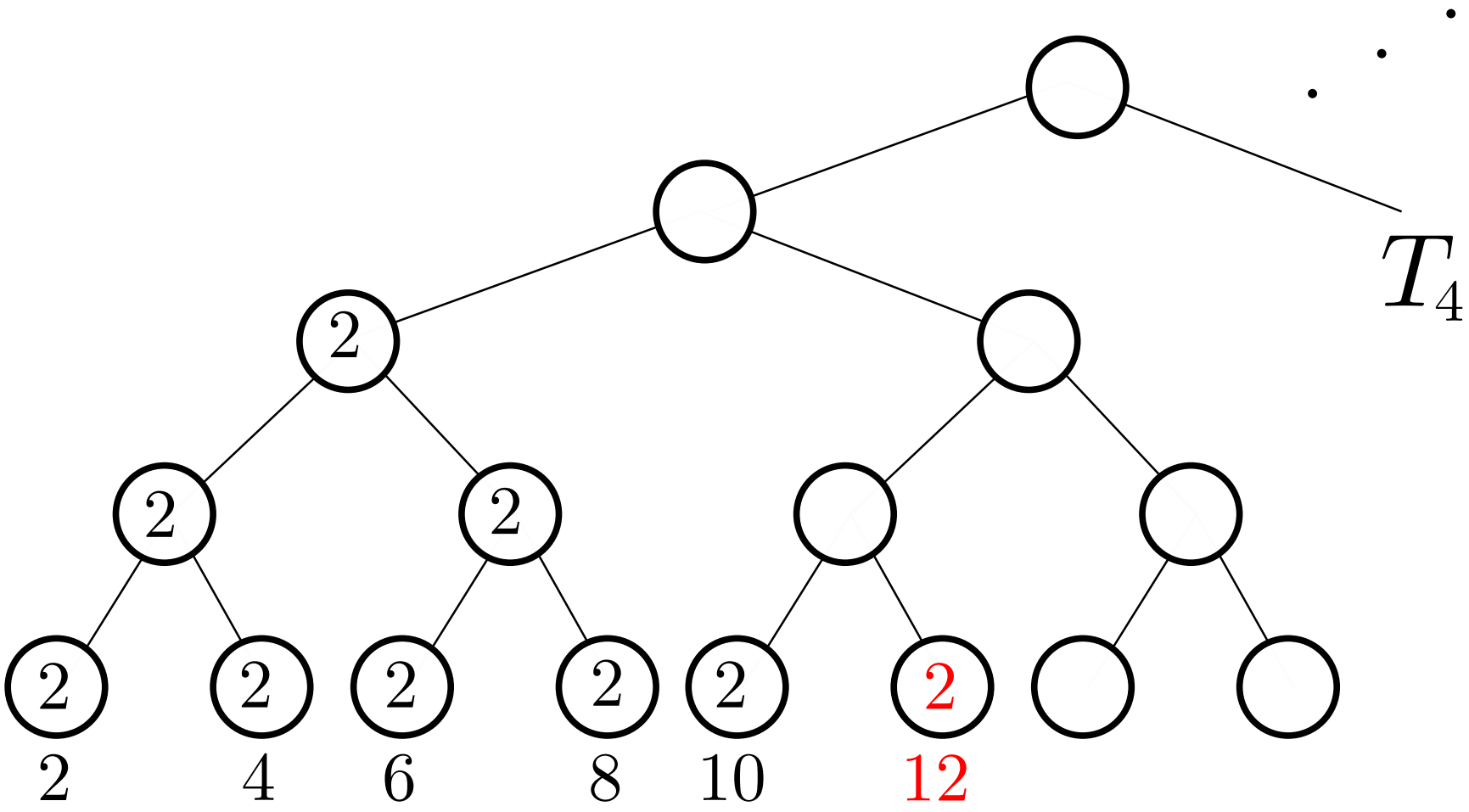
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



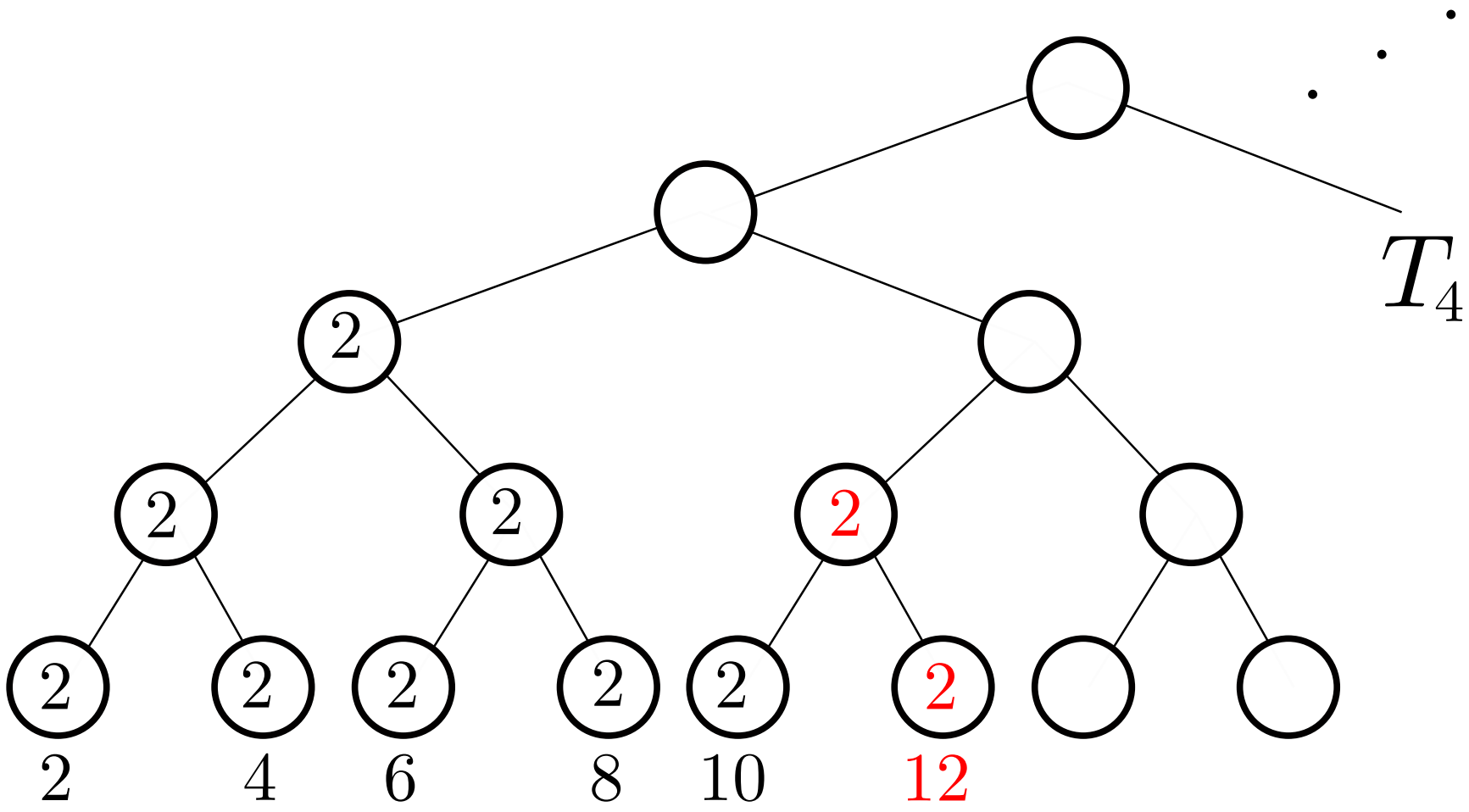
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



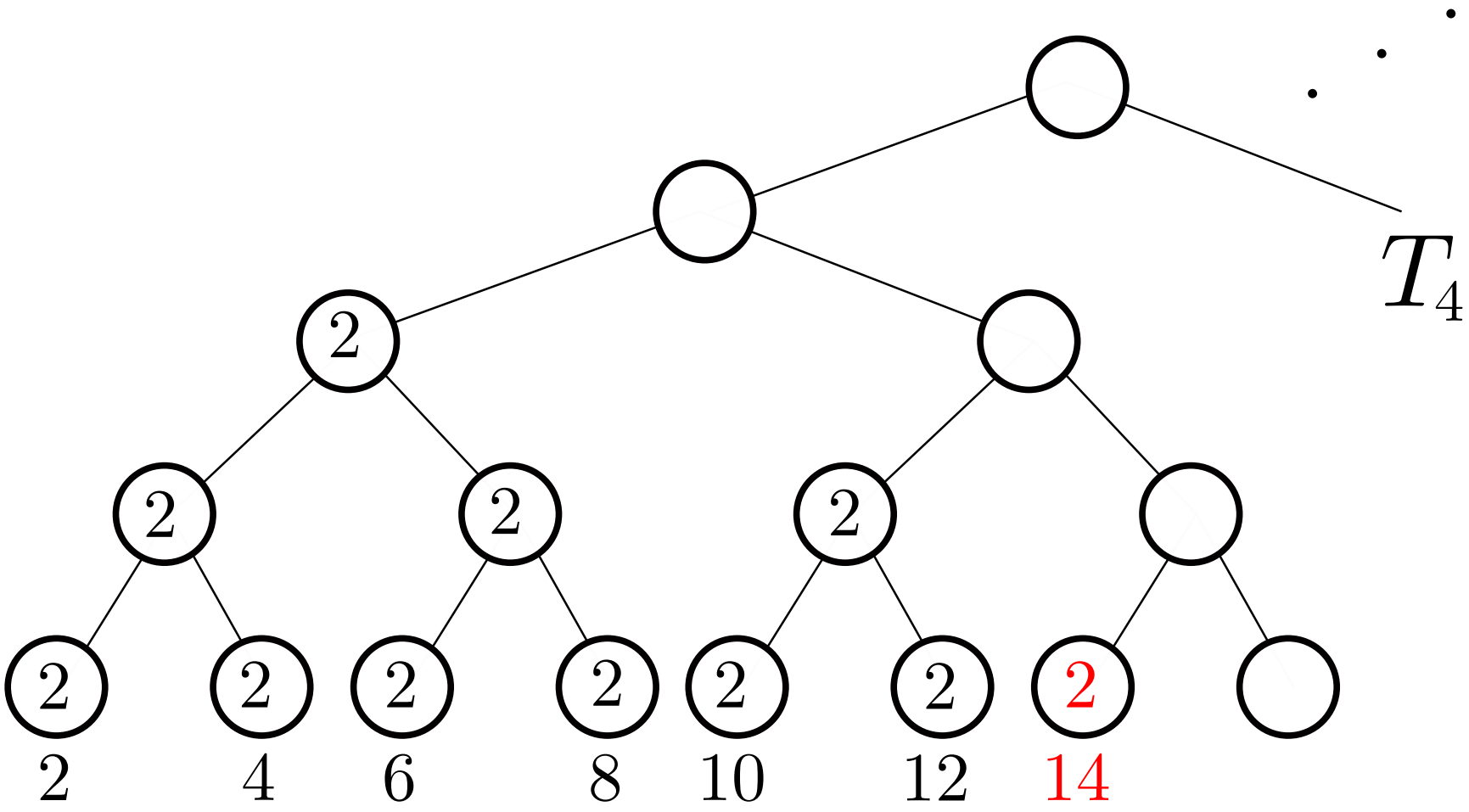
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



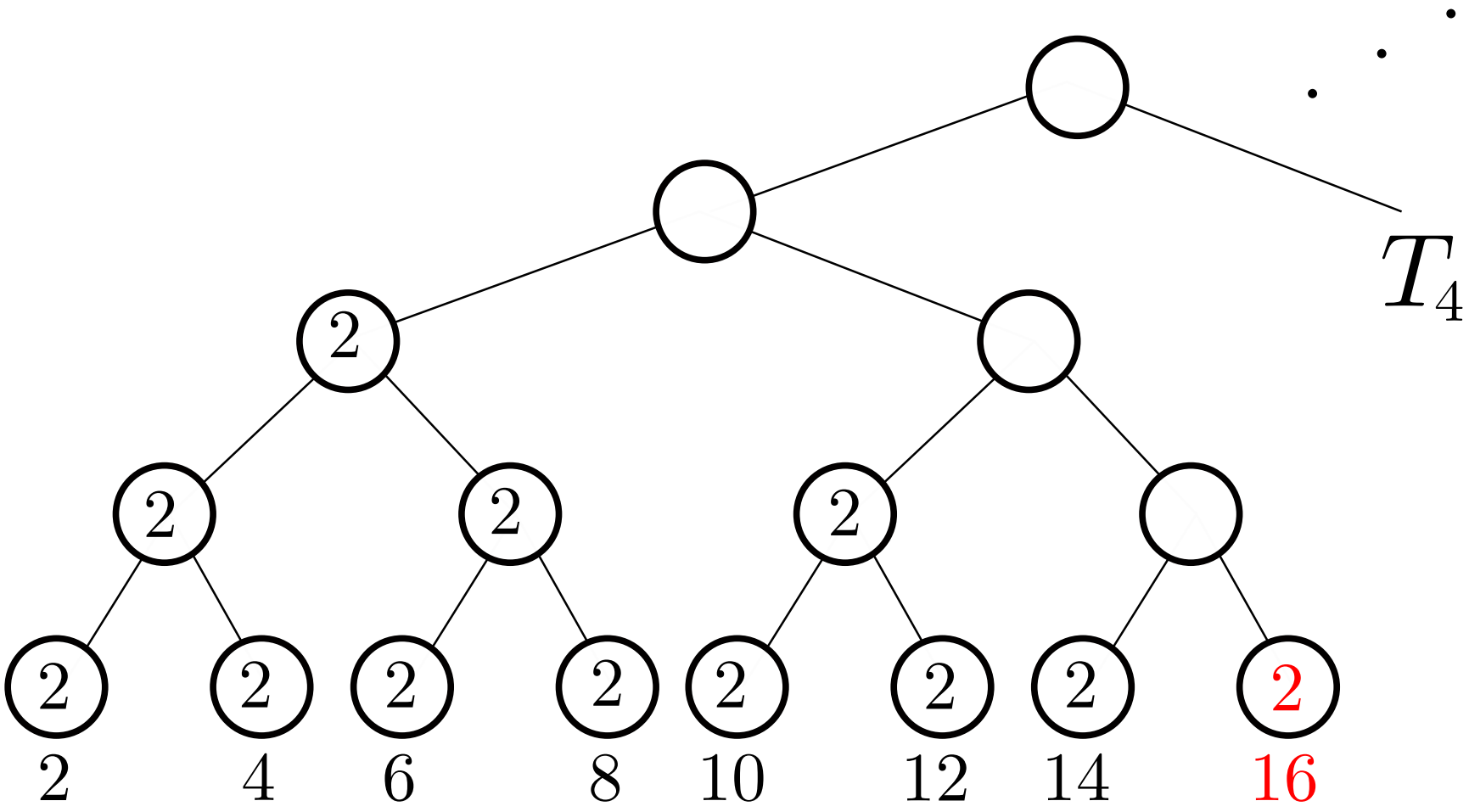
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



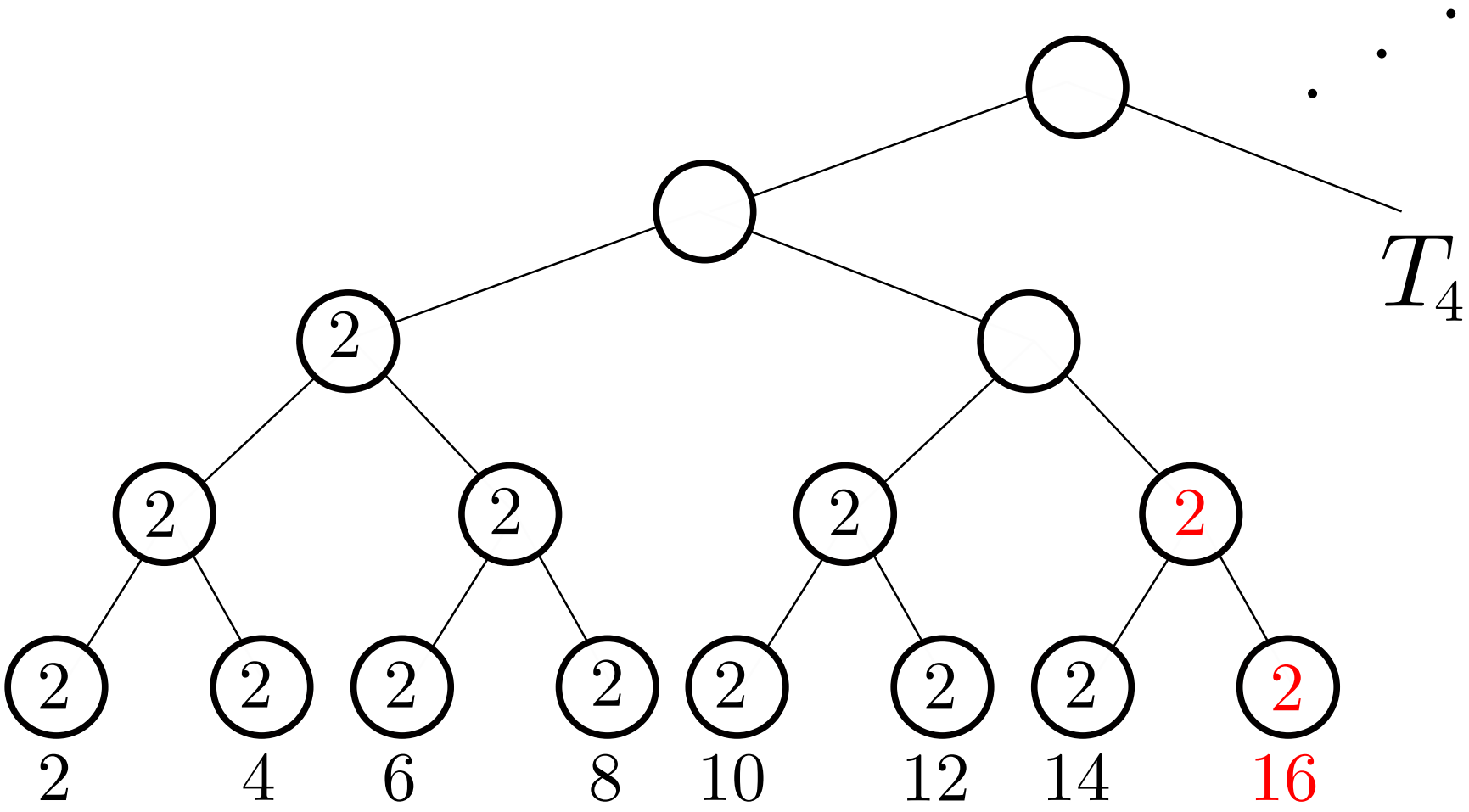
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



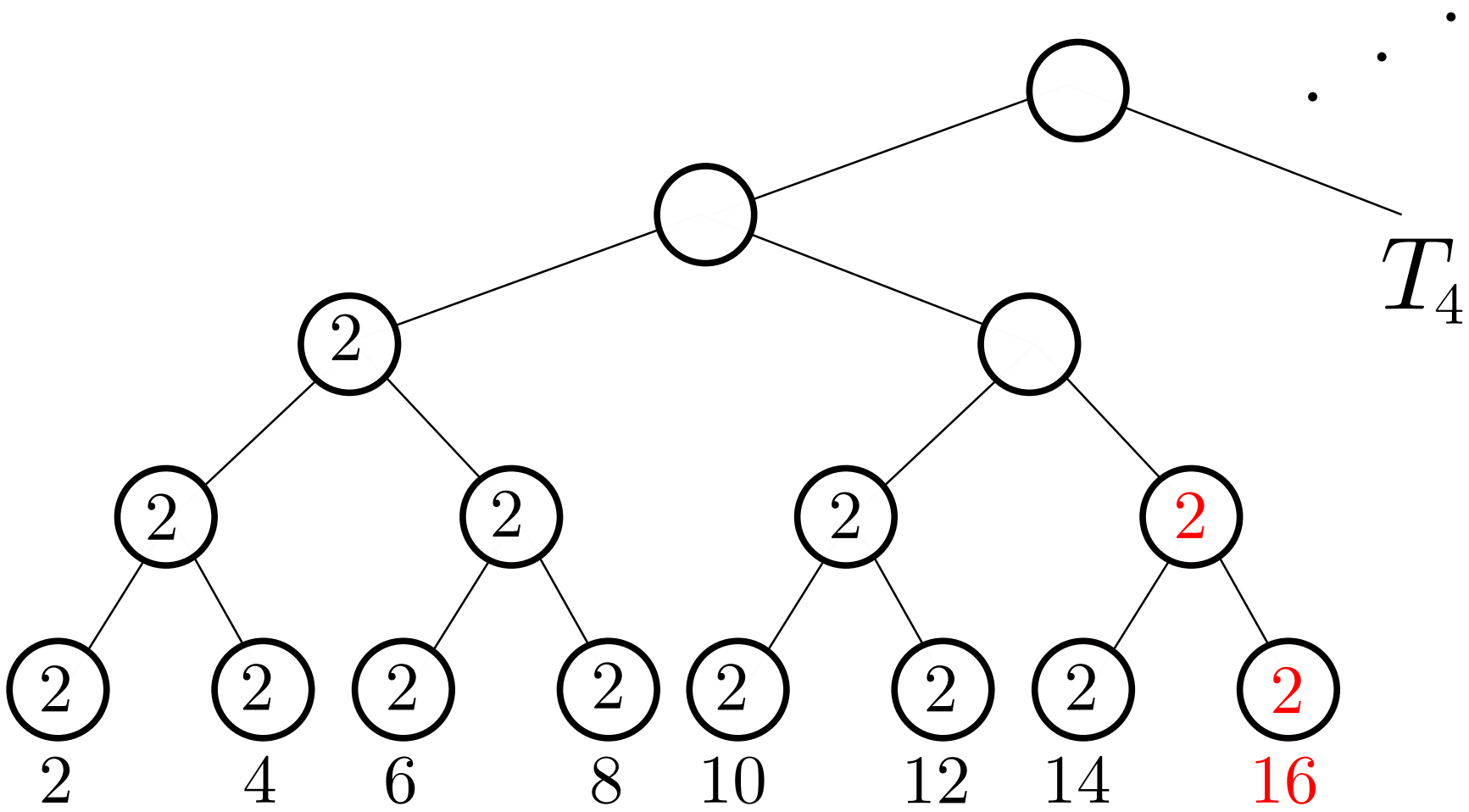
$2^{13}|(2\mathbf{?})!$



$2^{13}|(2\mathbf{?})!$

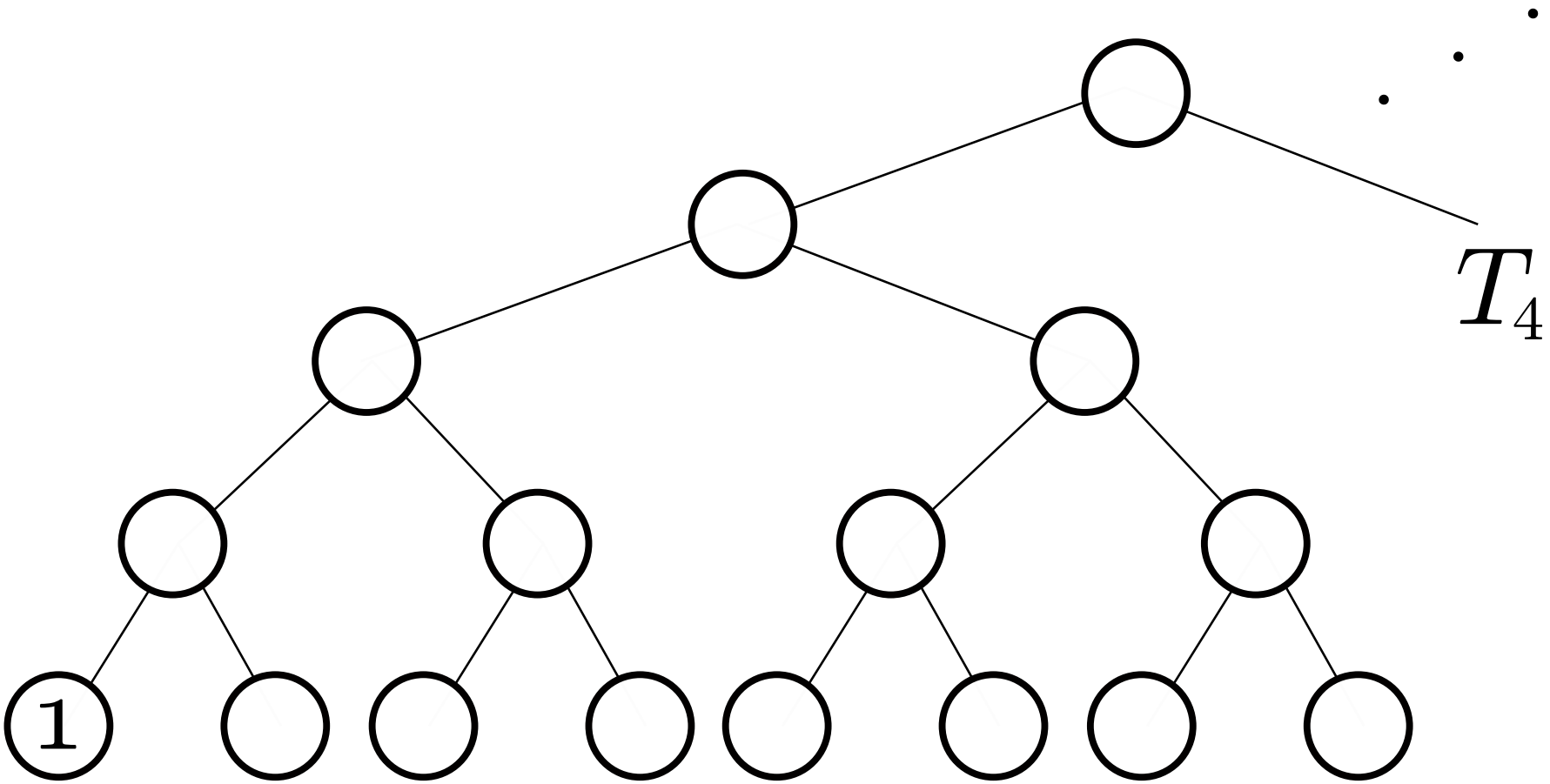


$2^{13}|(2\mathbf{?})!$

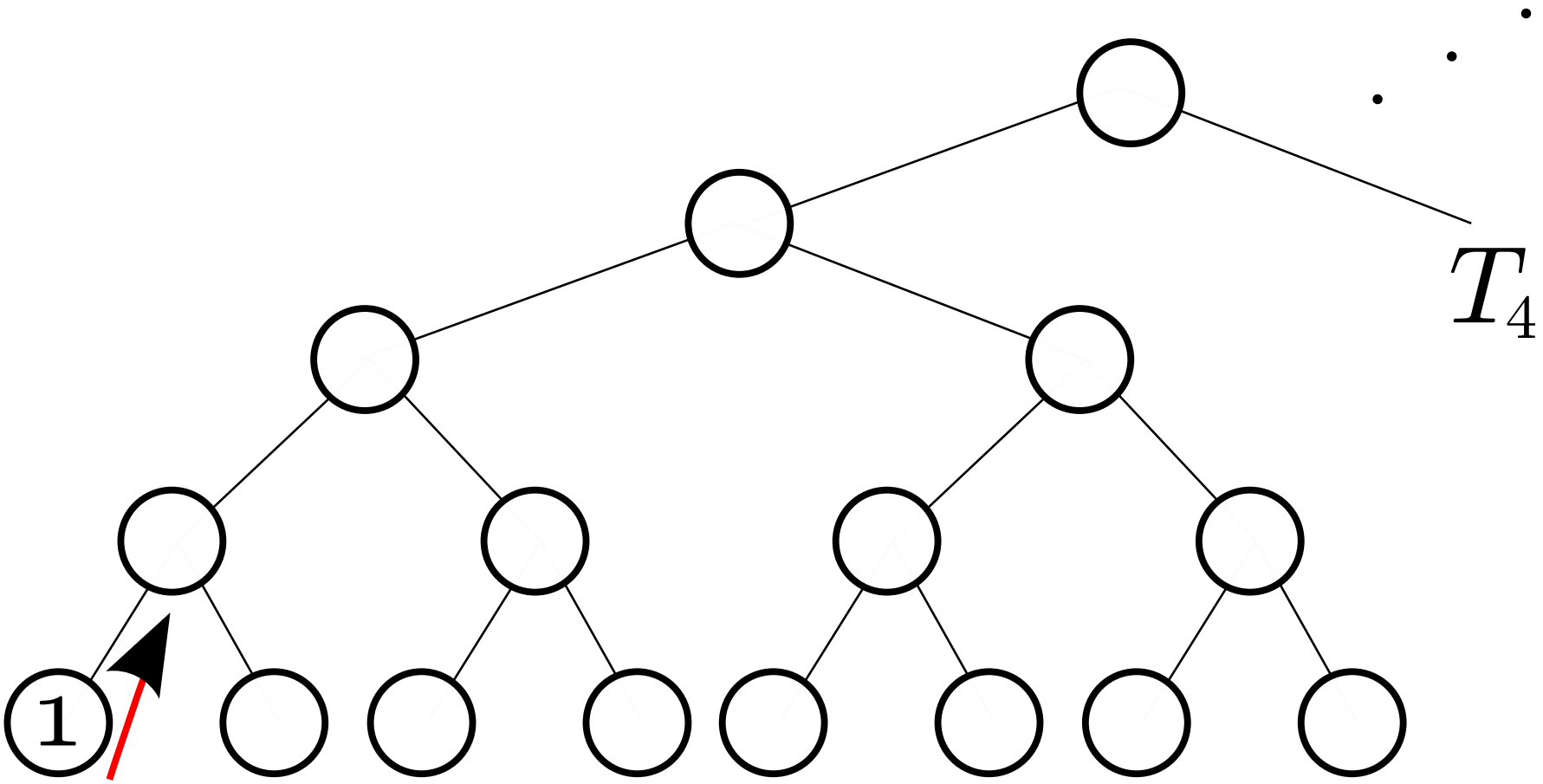


$2^{13}|16!, \qquad DE \qquad 2^{13} \not| 14!$

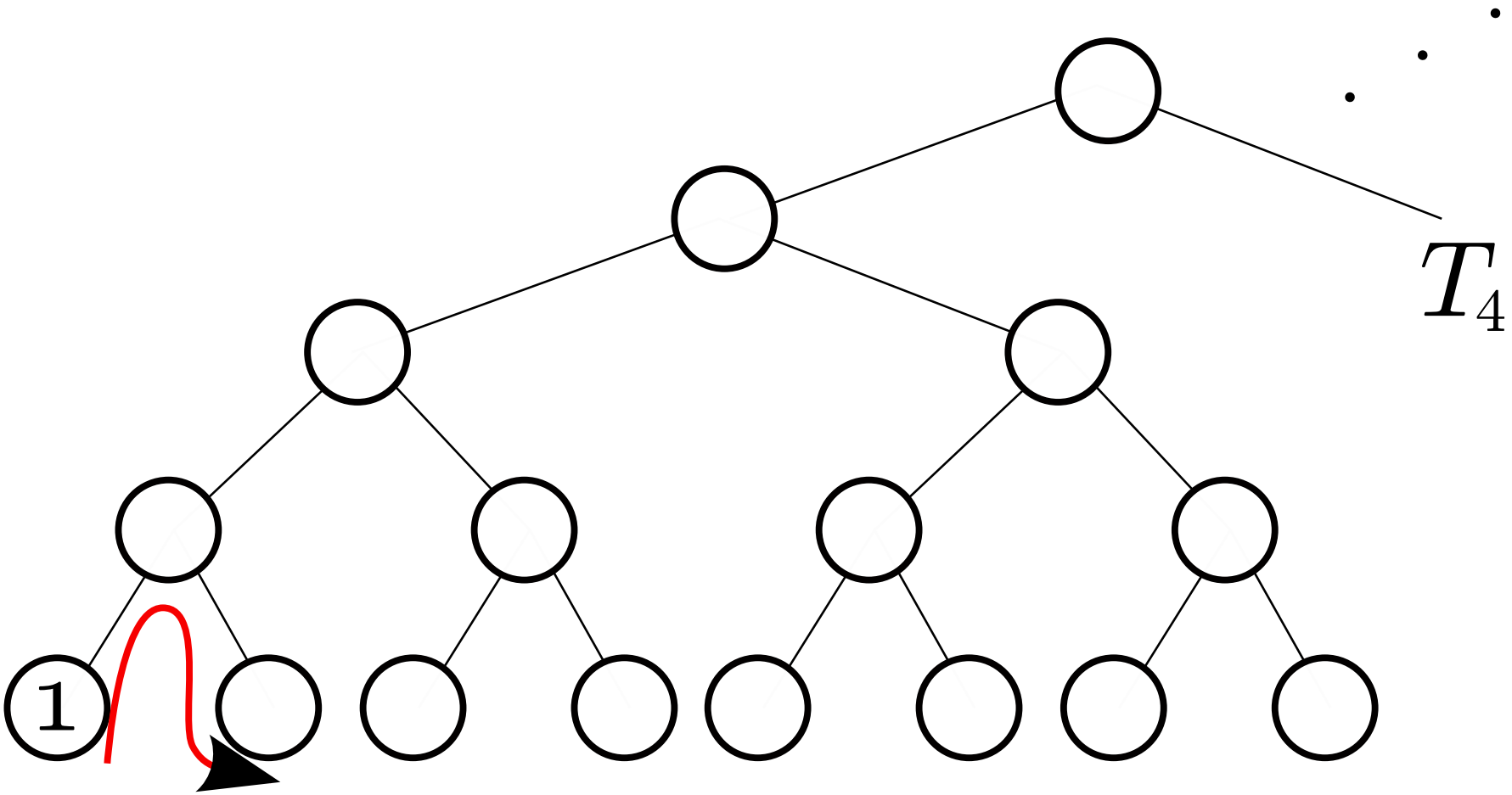
A fa bejárása



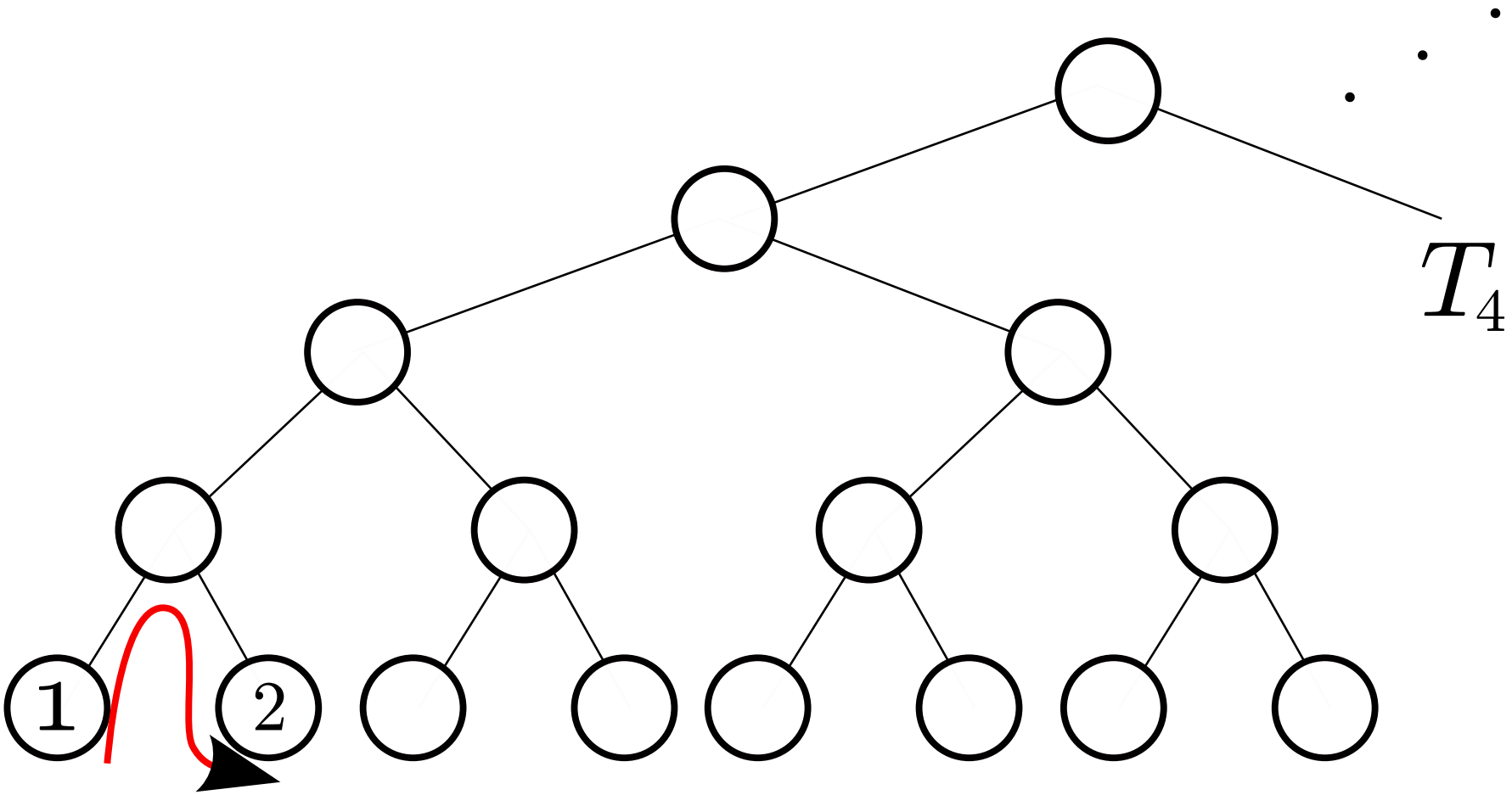
A fa bejárása



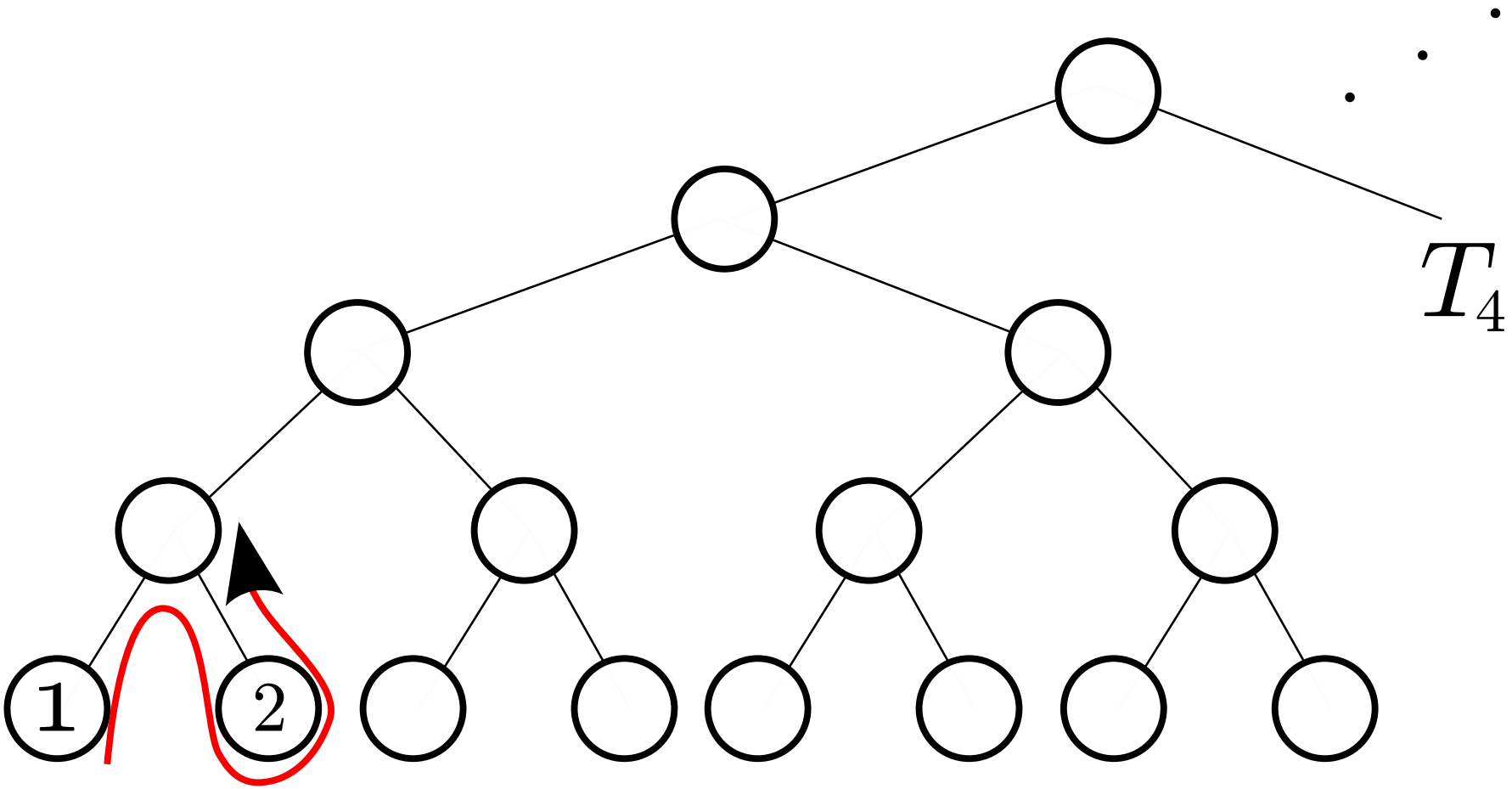
A fa bejárása



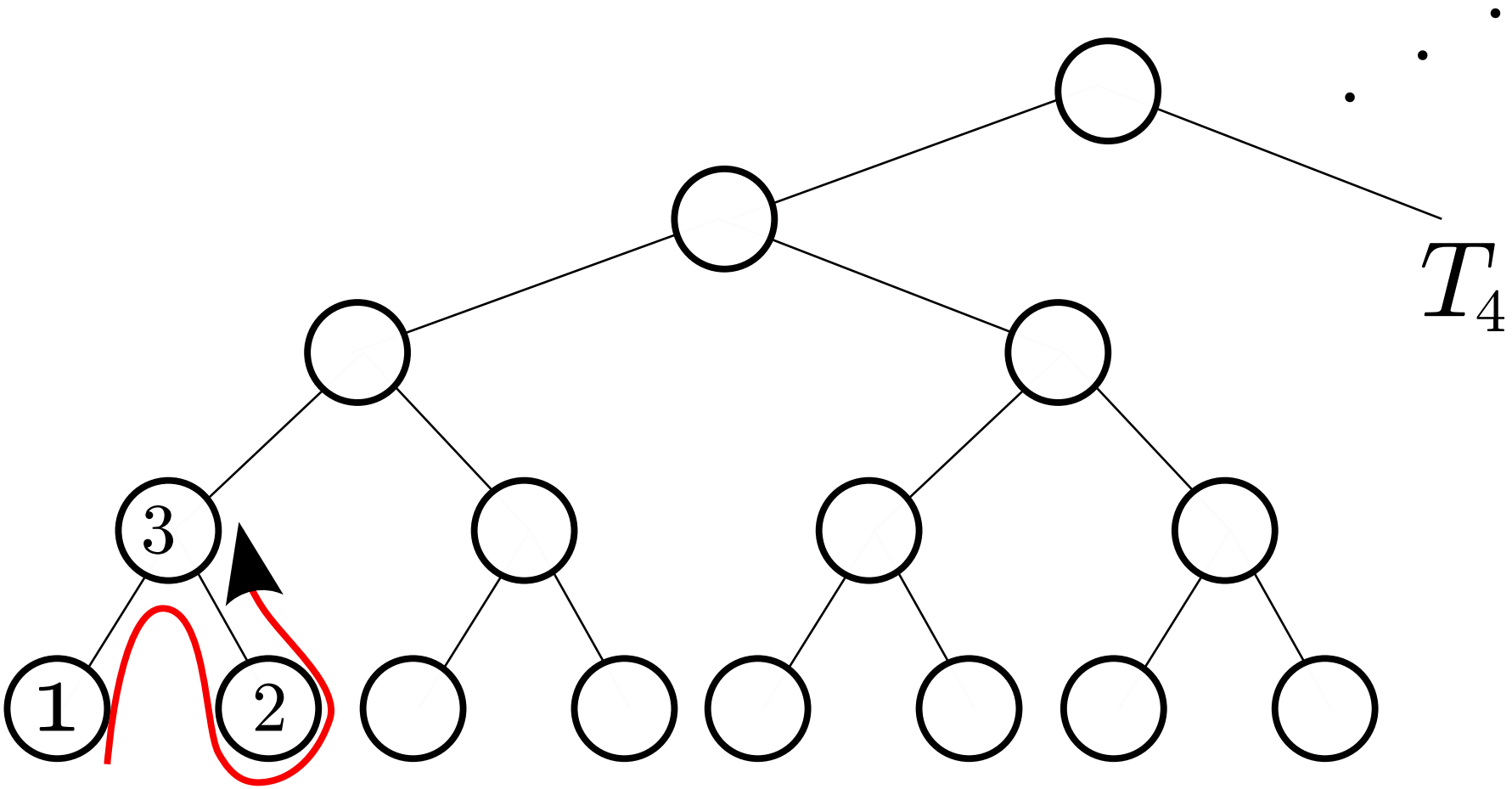
A fa bejárása



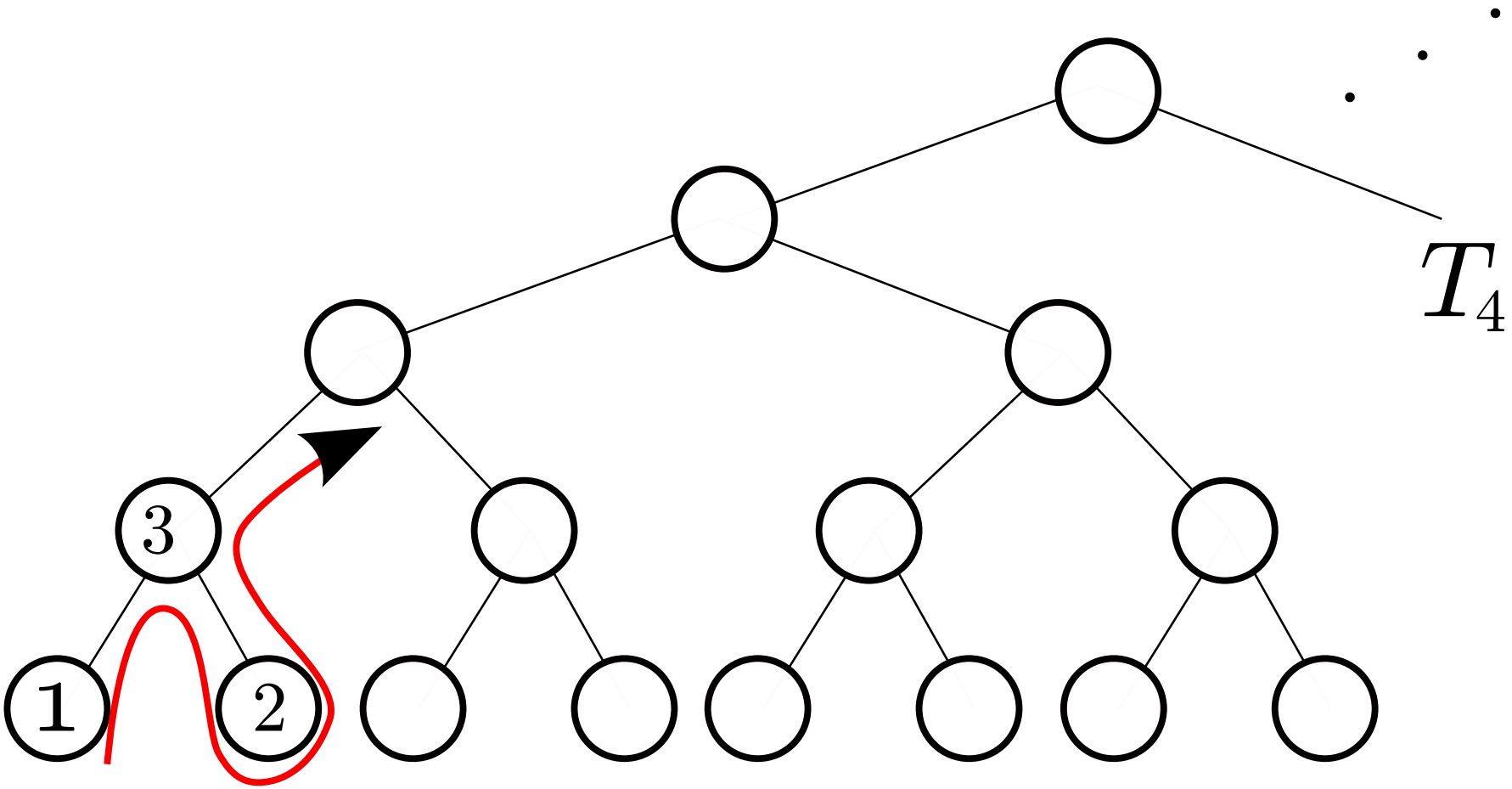
A fa bejárása



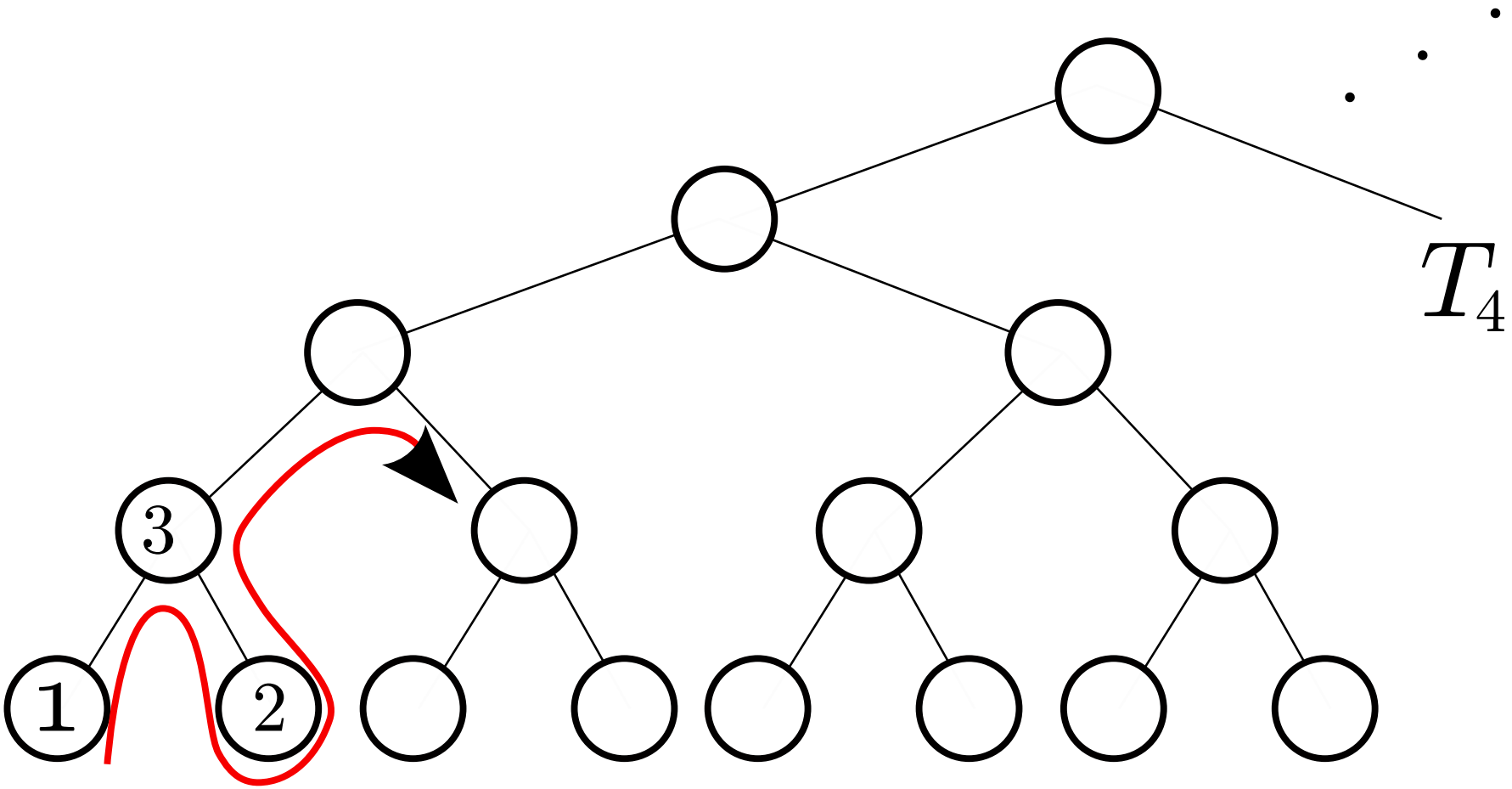
A fa bejárása



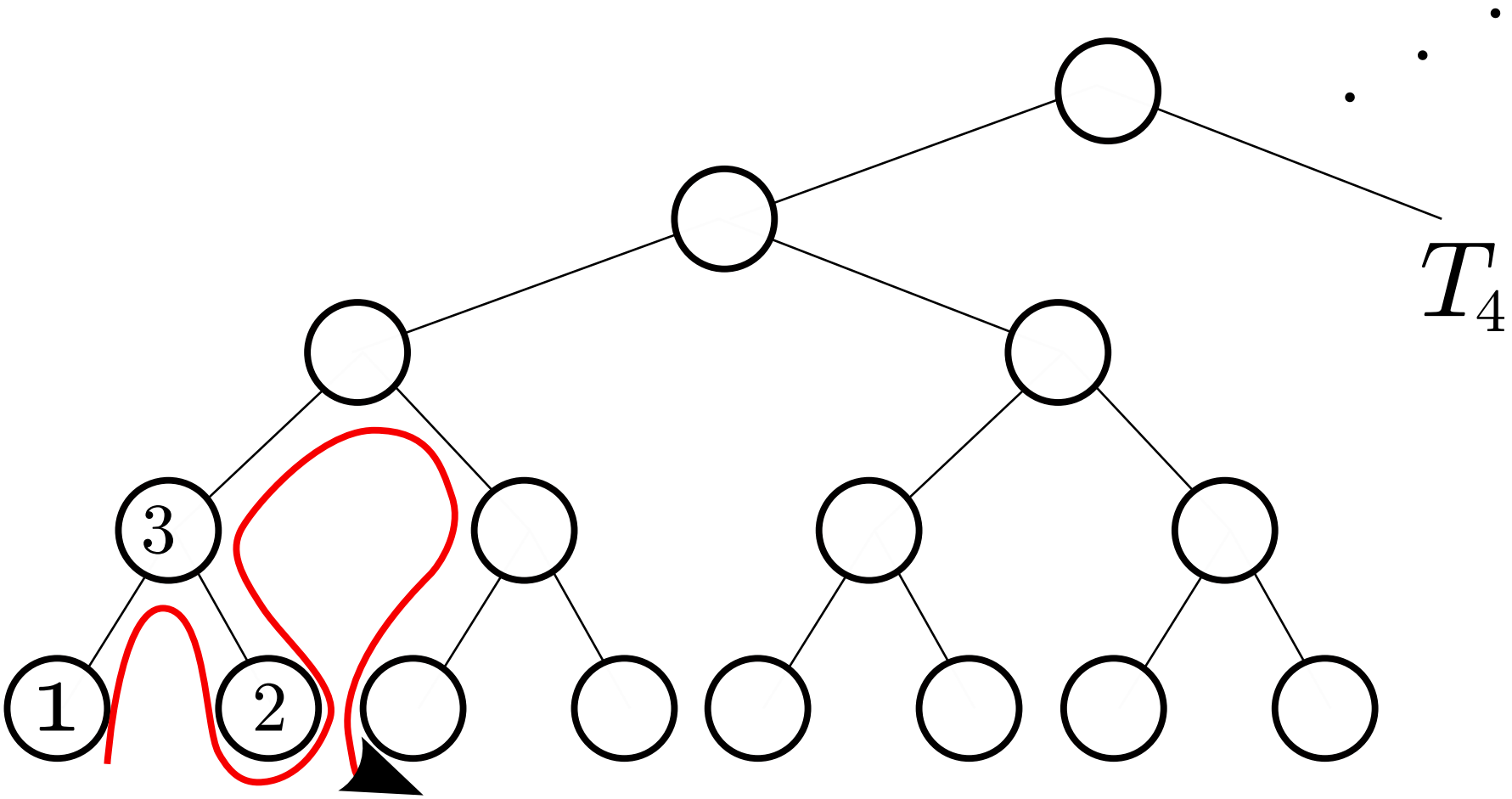
A fa bejárása



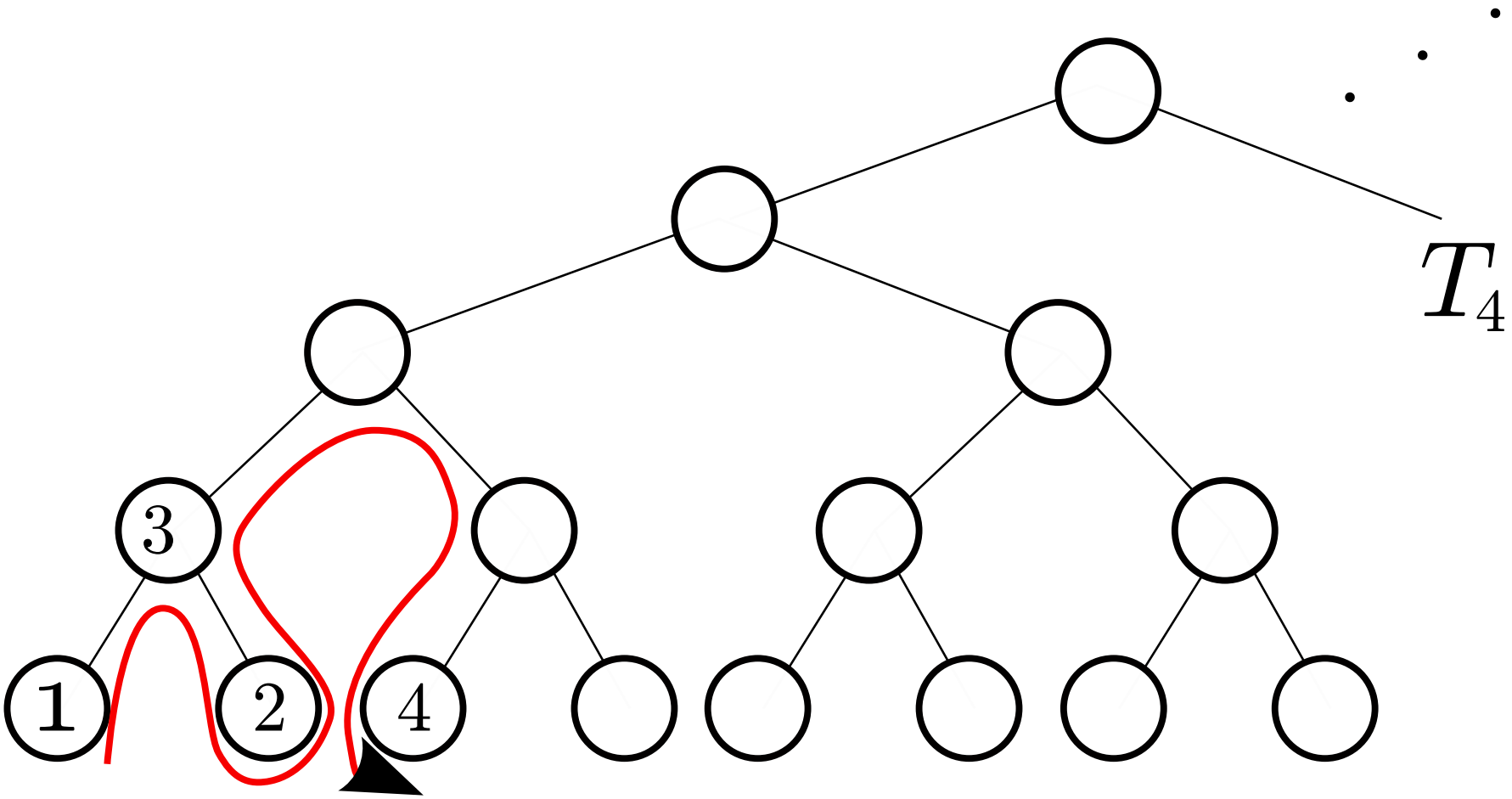
A fa bejárása



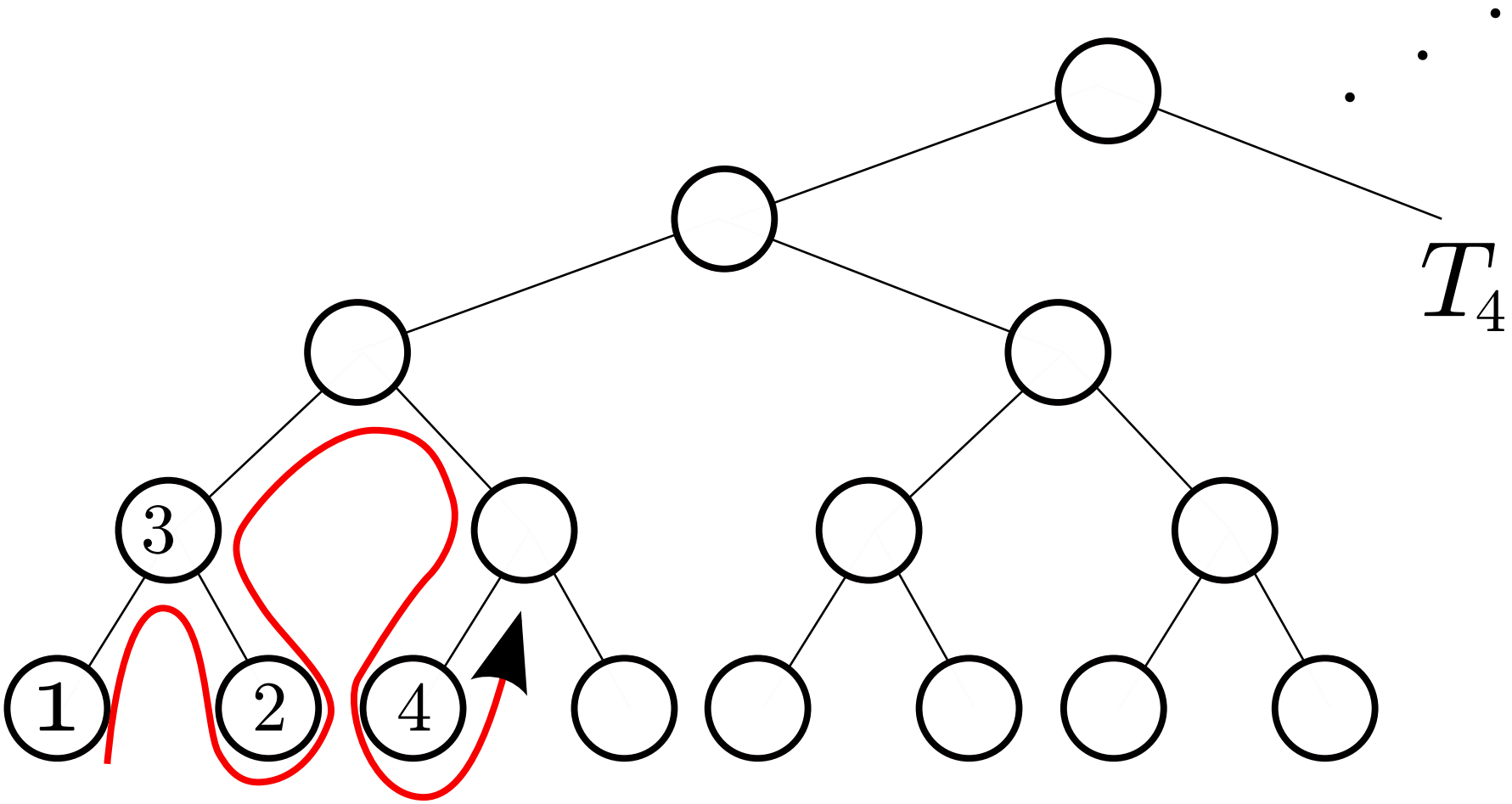
A fa bejárása



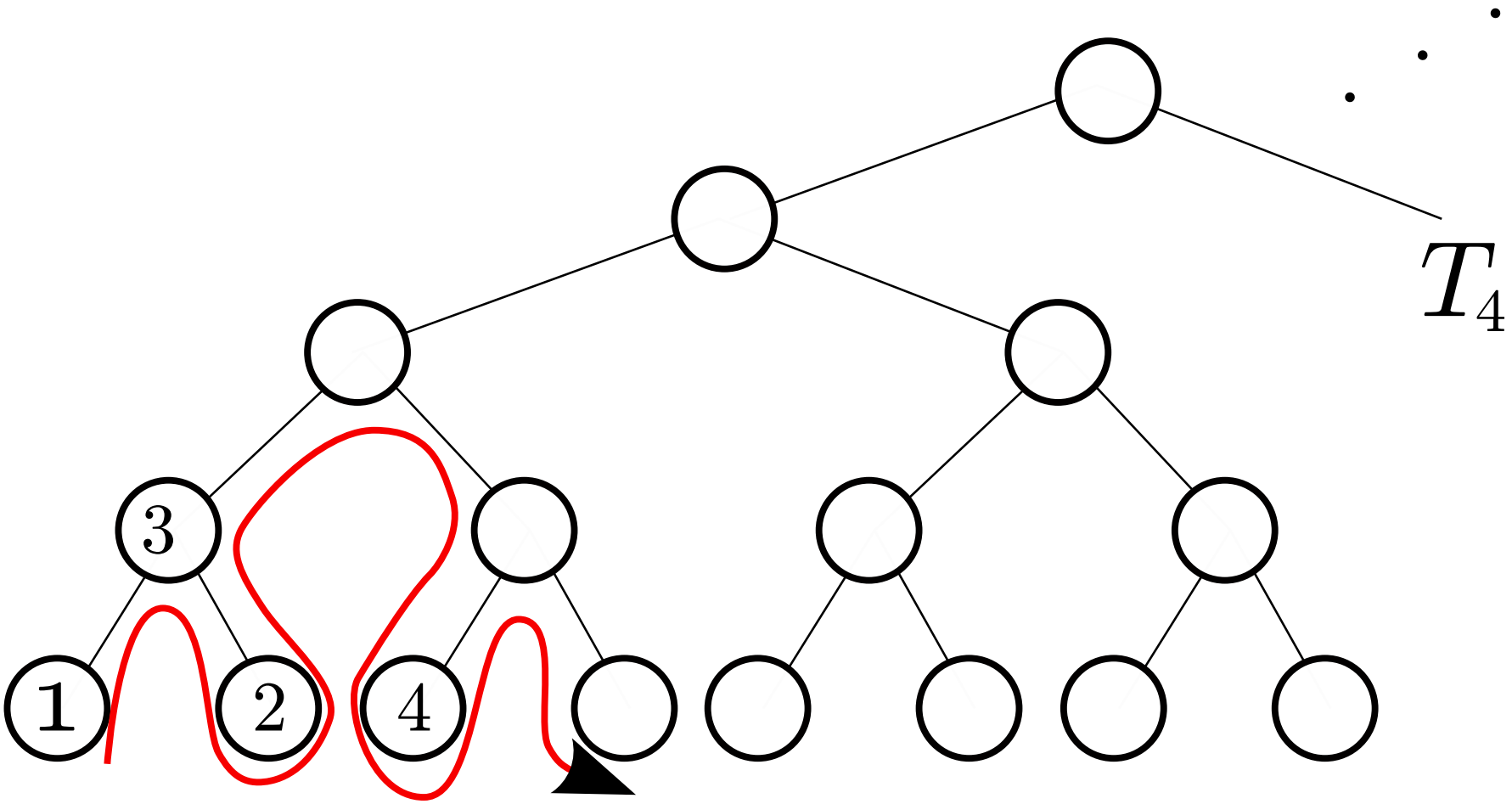
A fa bejárása



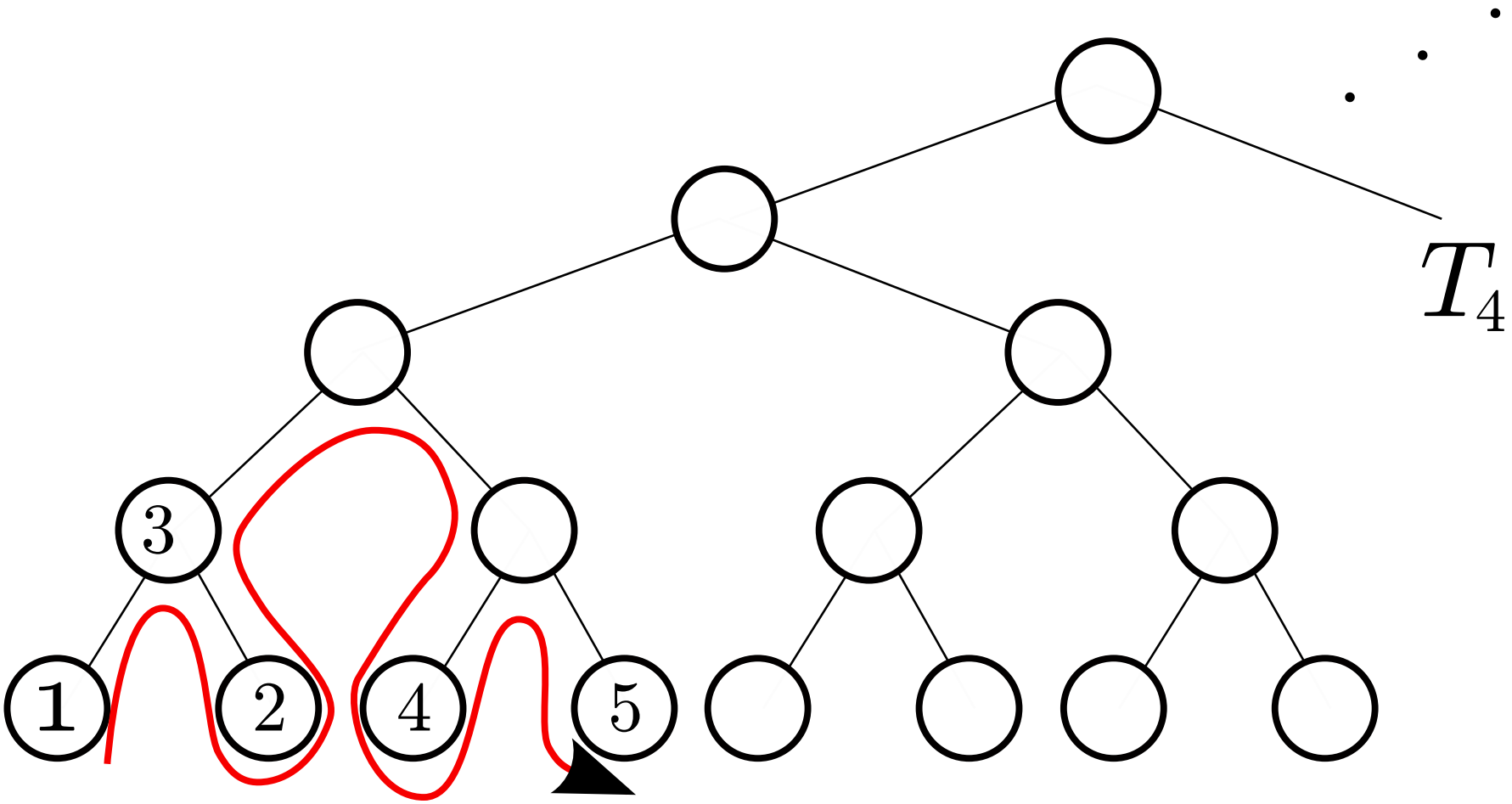
A fa bejárása



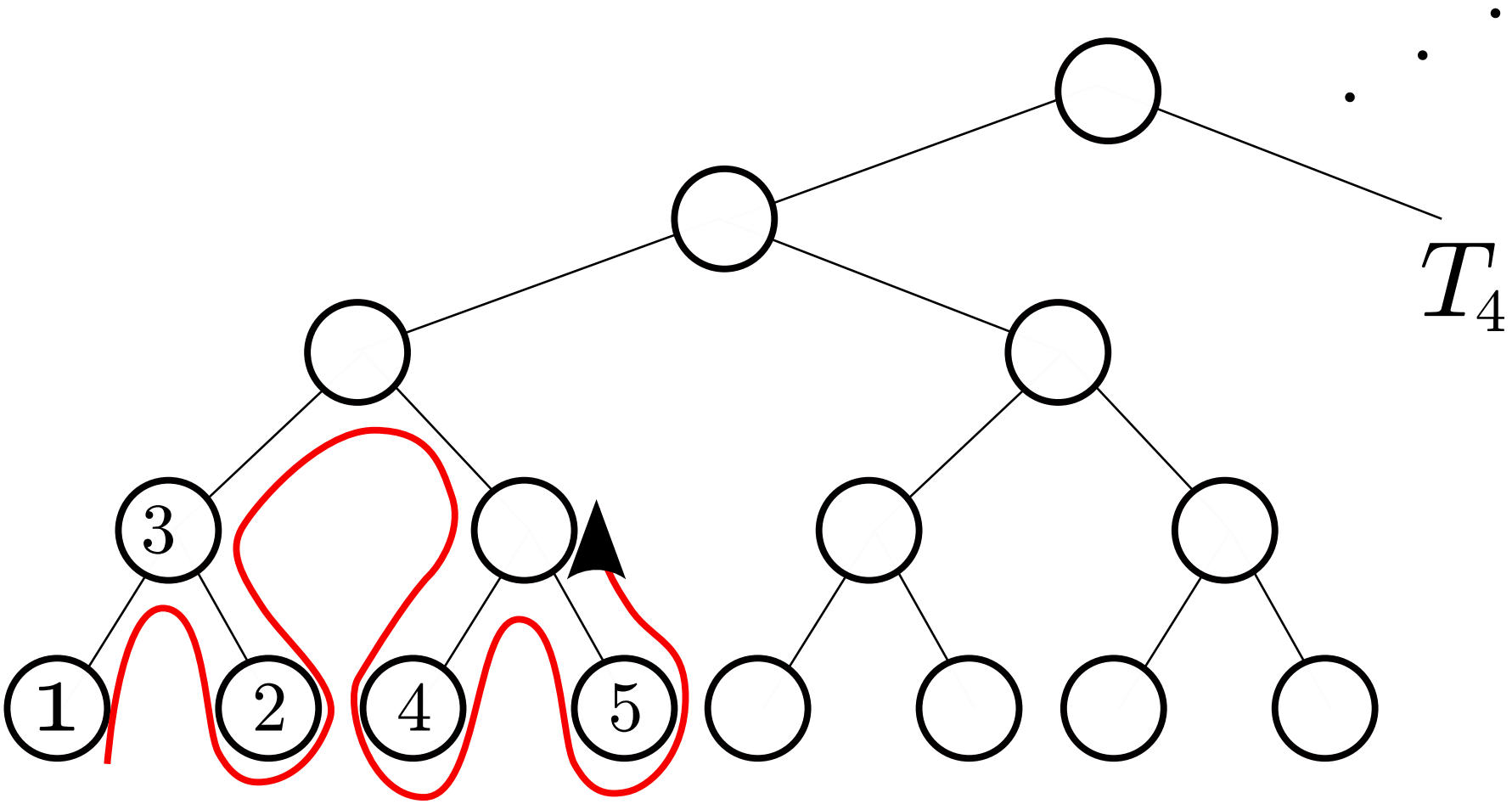
A fa bejárása



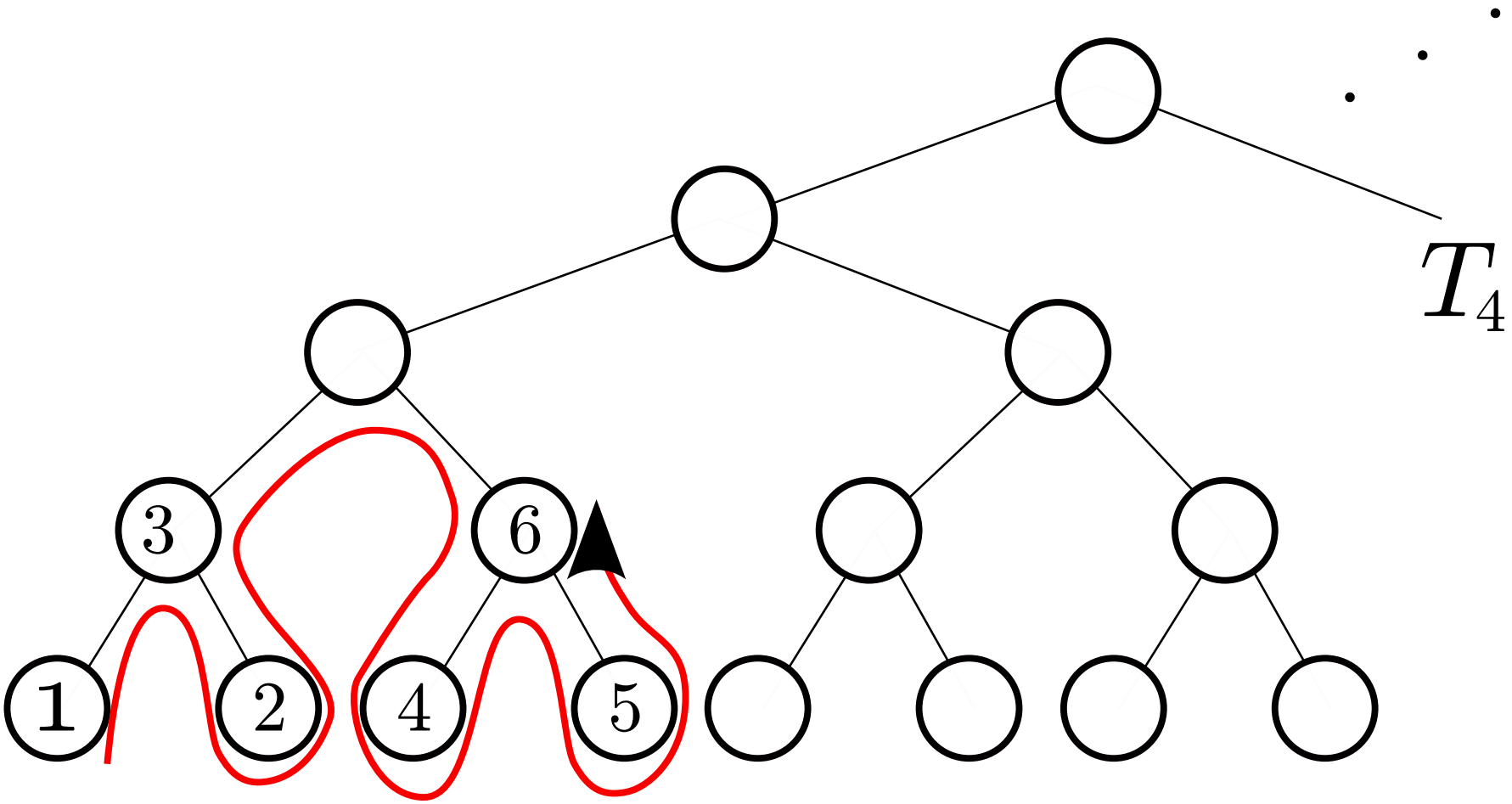
A fa bejárása



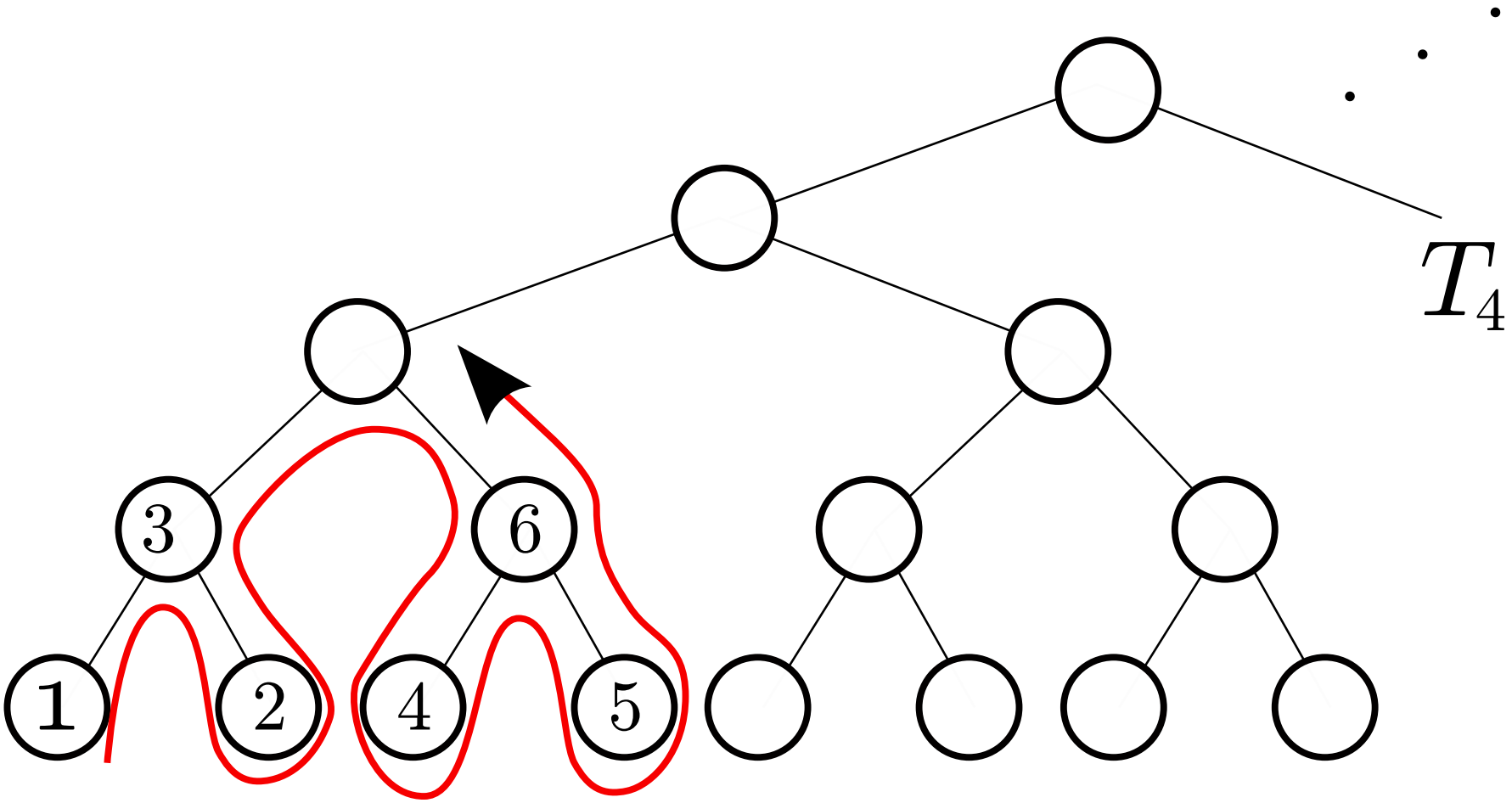
A fa bejárása



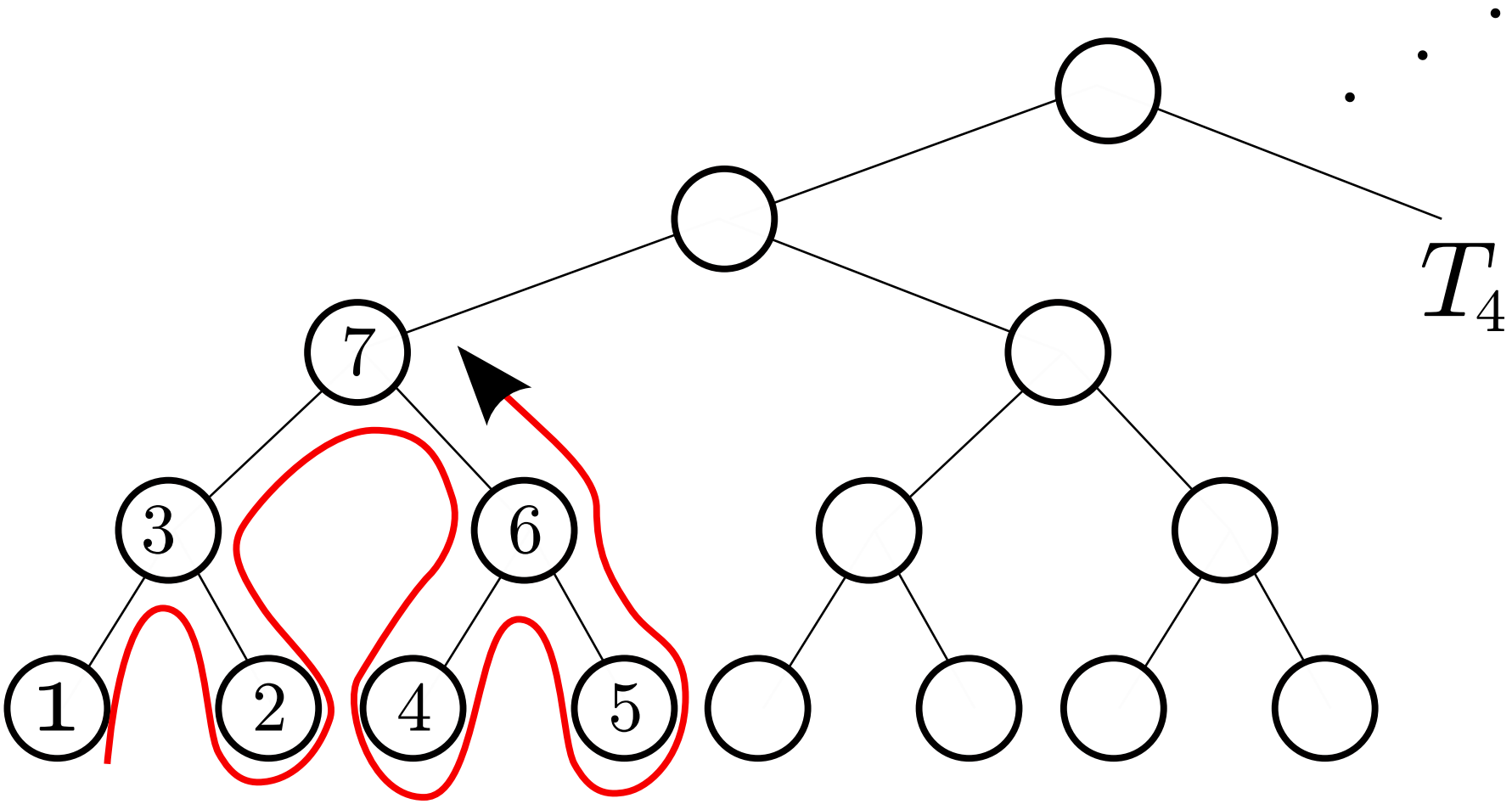
A fa bejárása



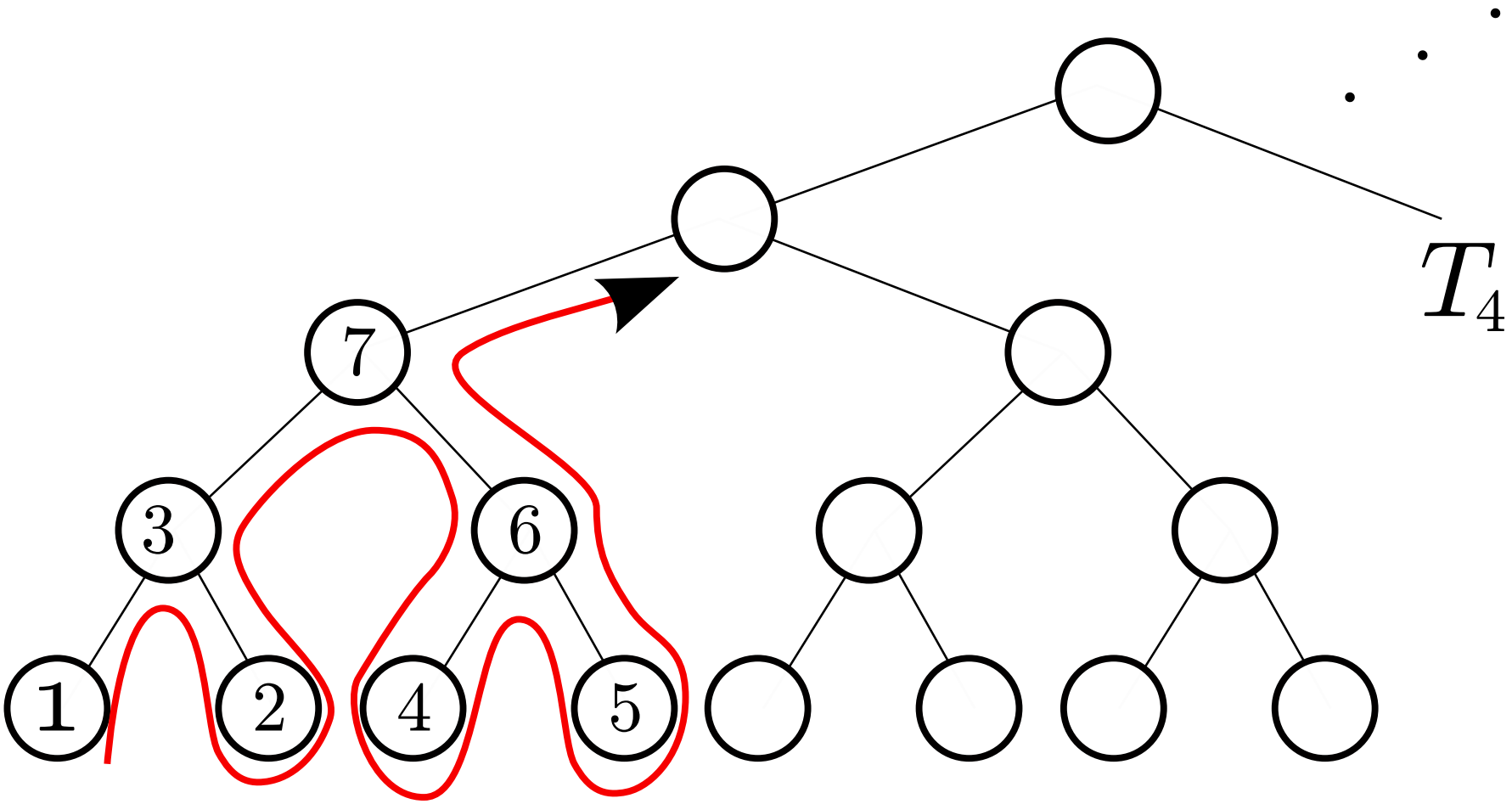
A fa bejárása



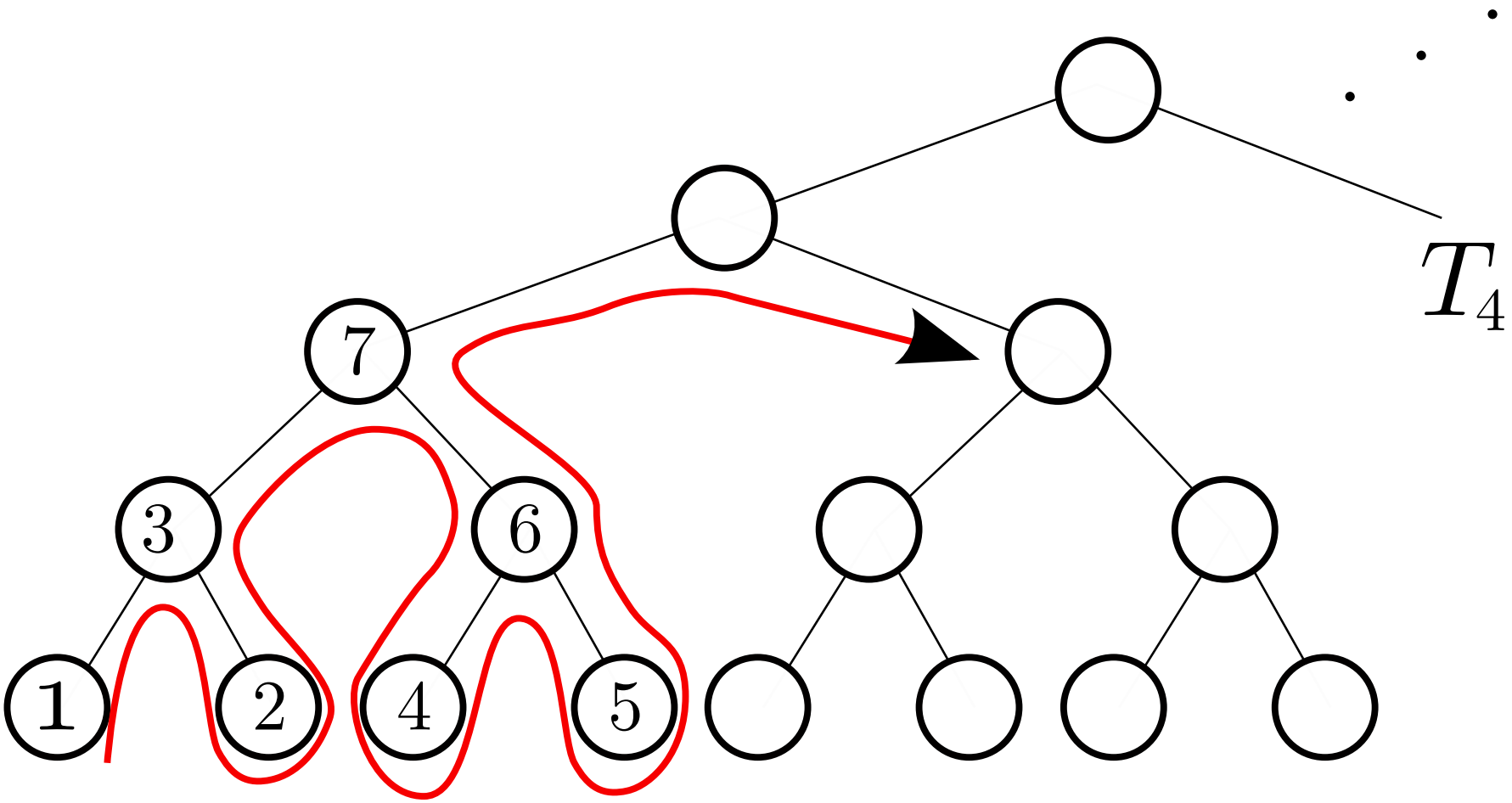
A fa bejárása



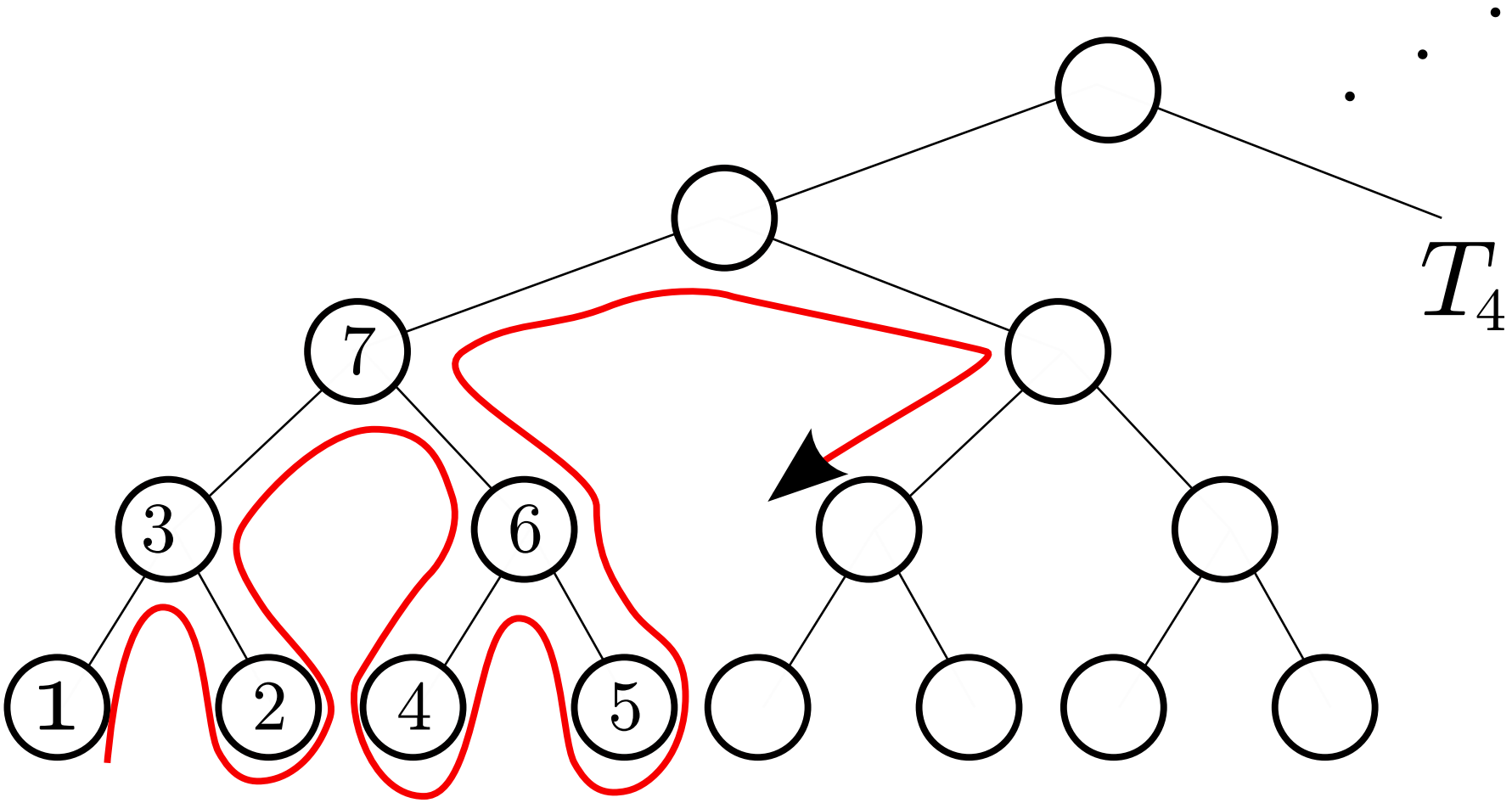
A fa bejárása



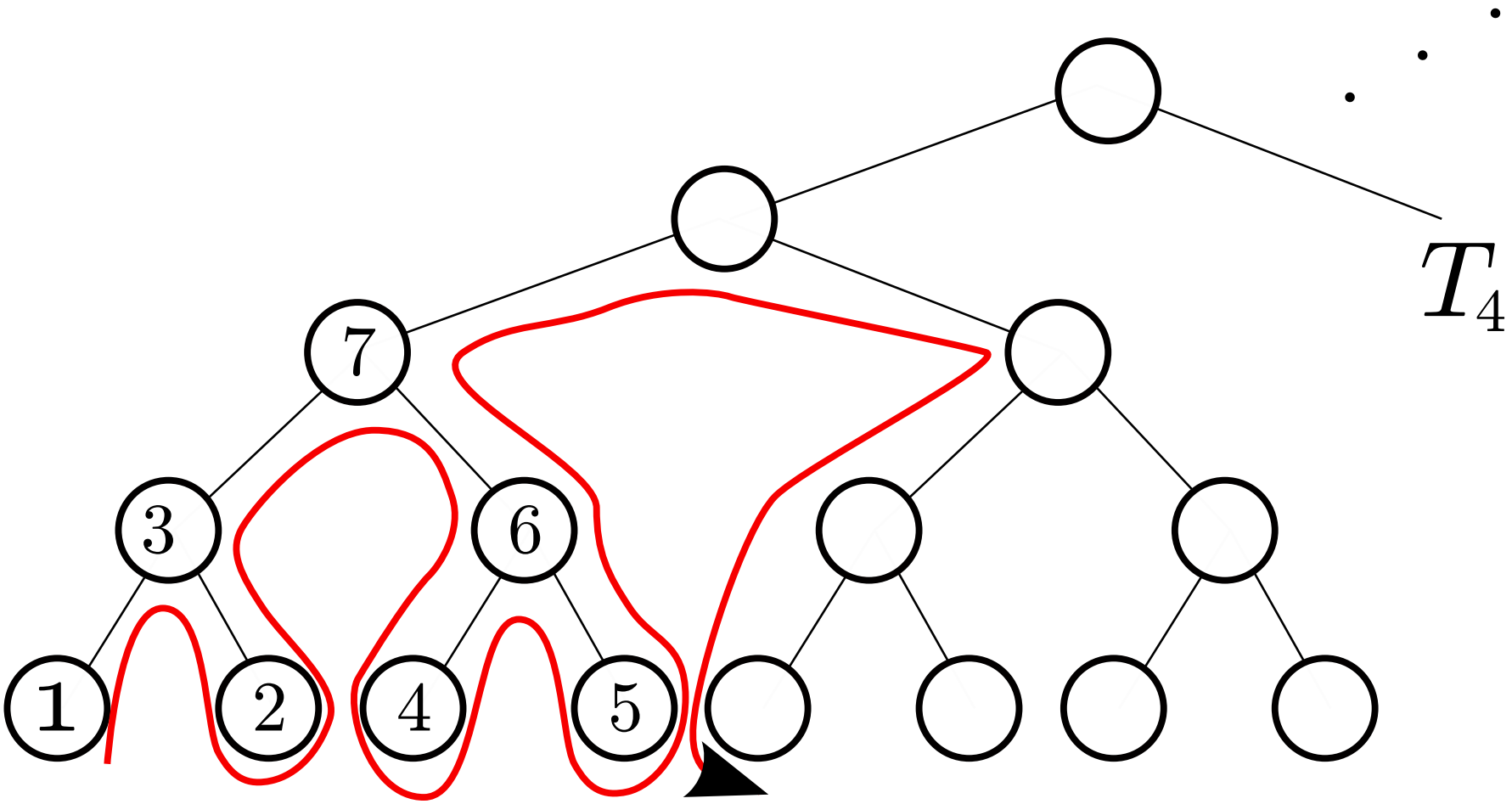
A fa bejárása



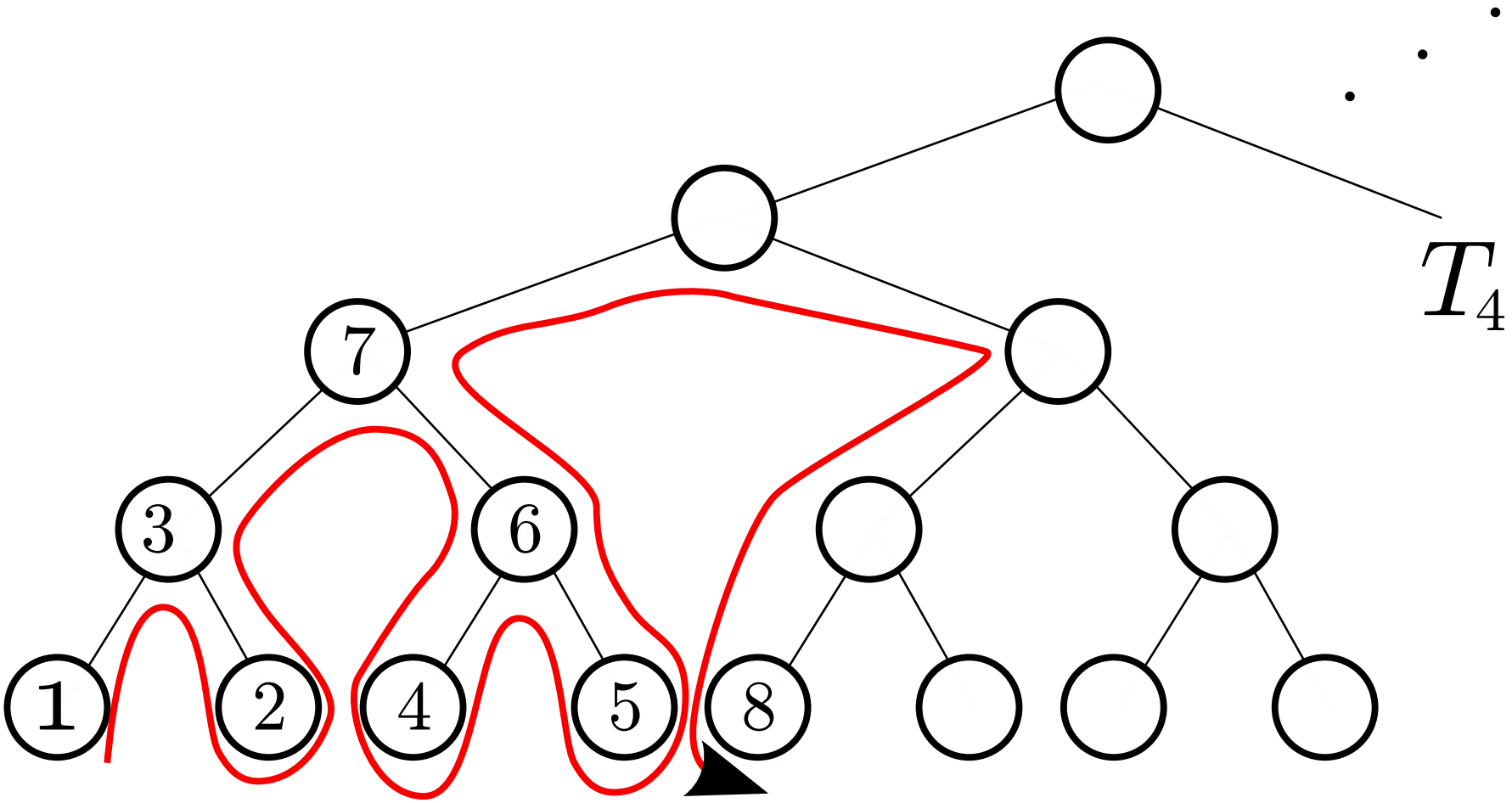
A fa bejárása



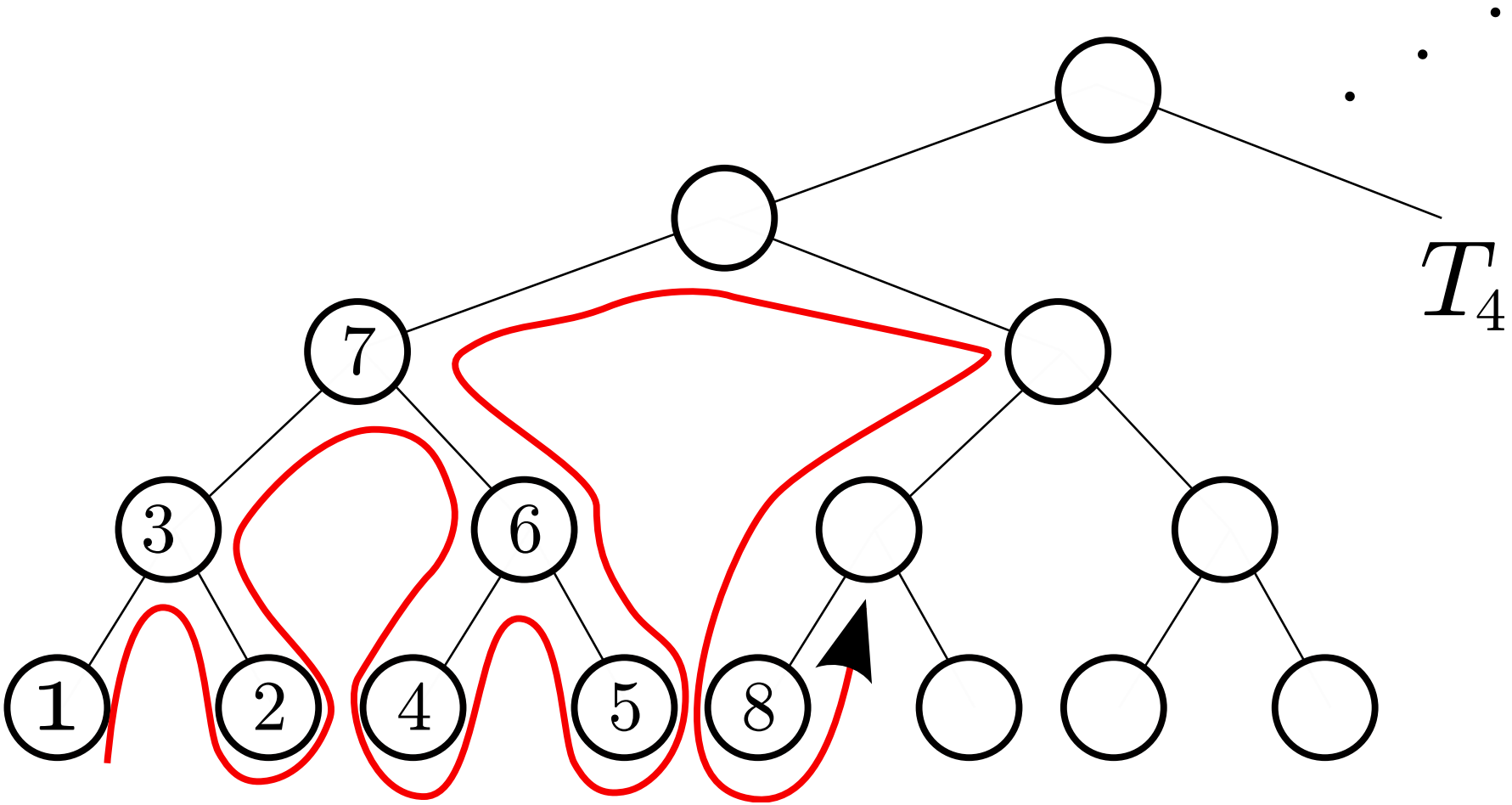
A fa bejárása



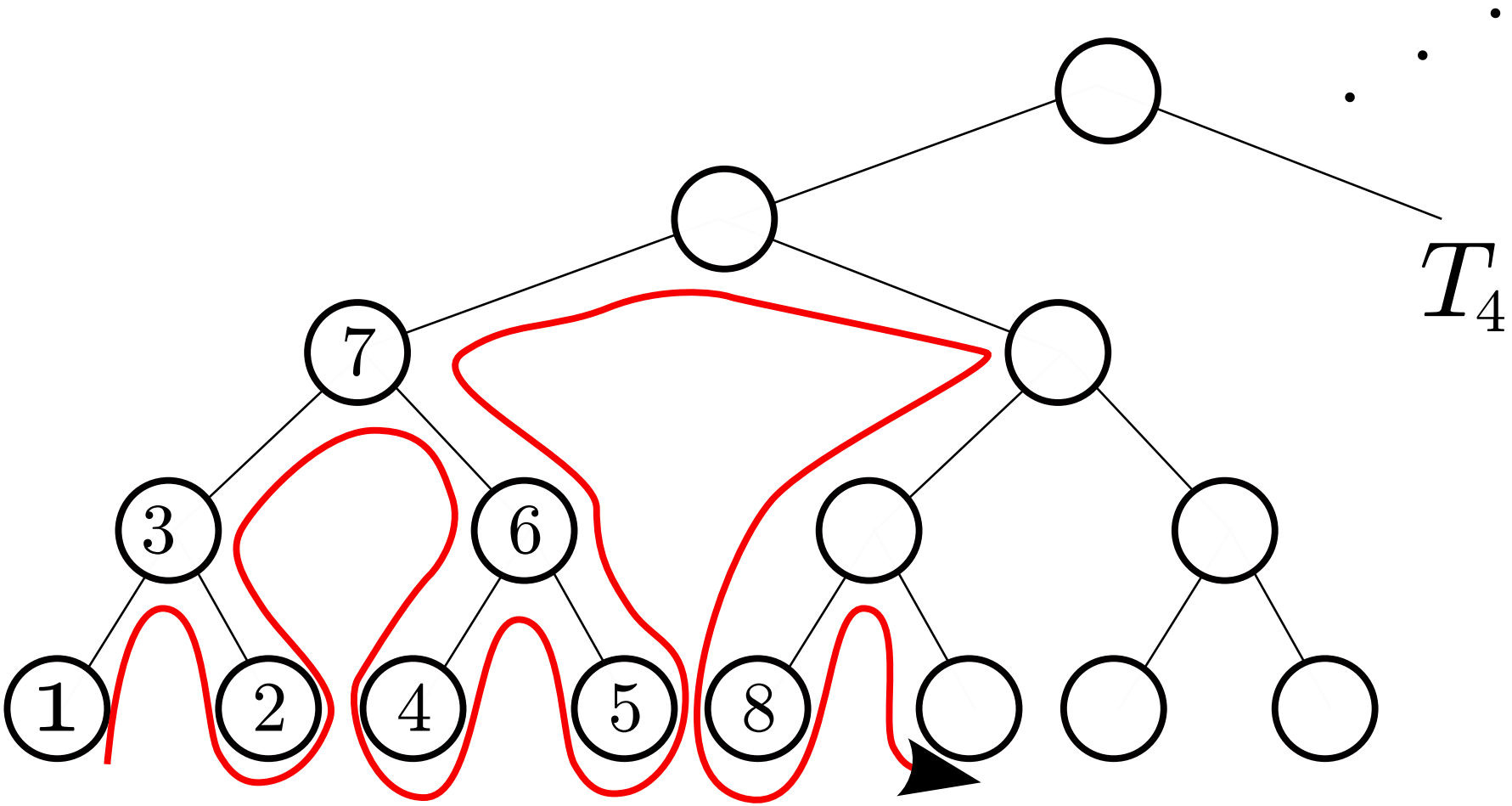
A fa bejárása



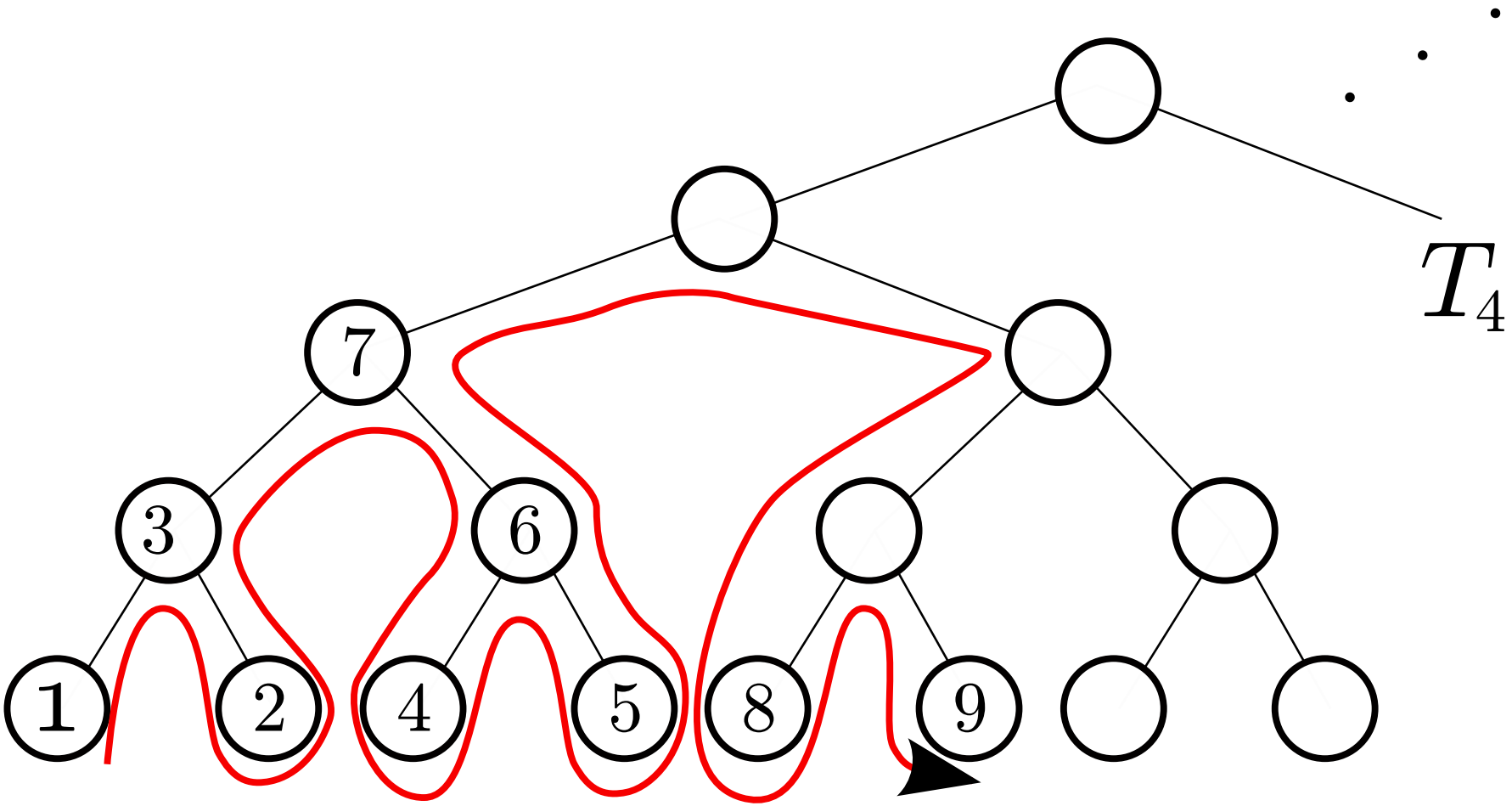
A fa bejárása



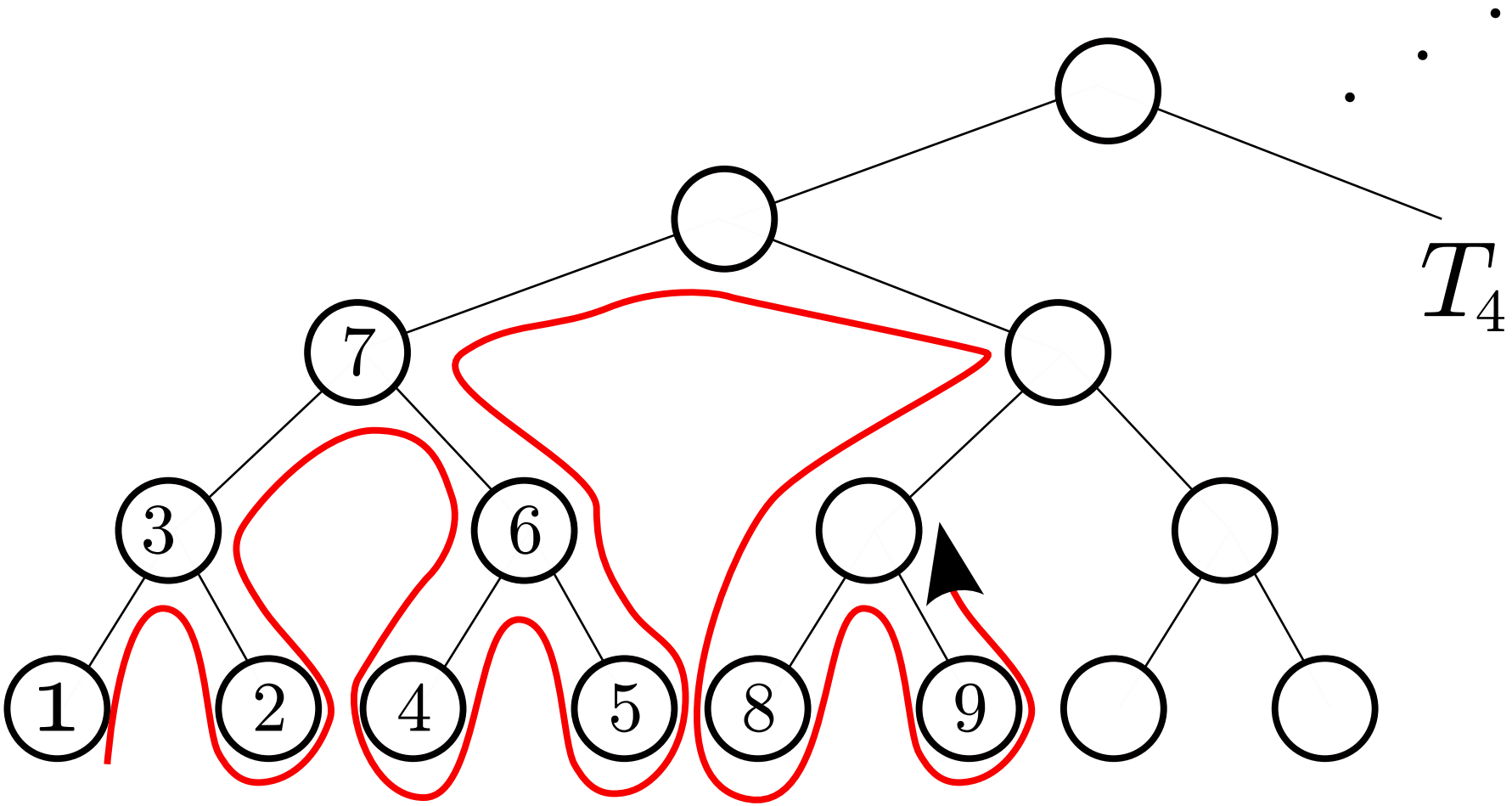
A fa bejárása



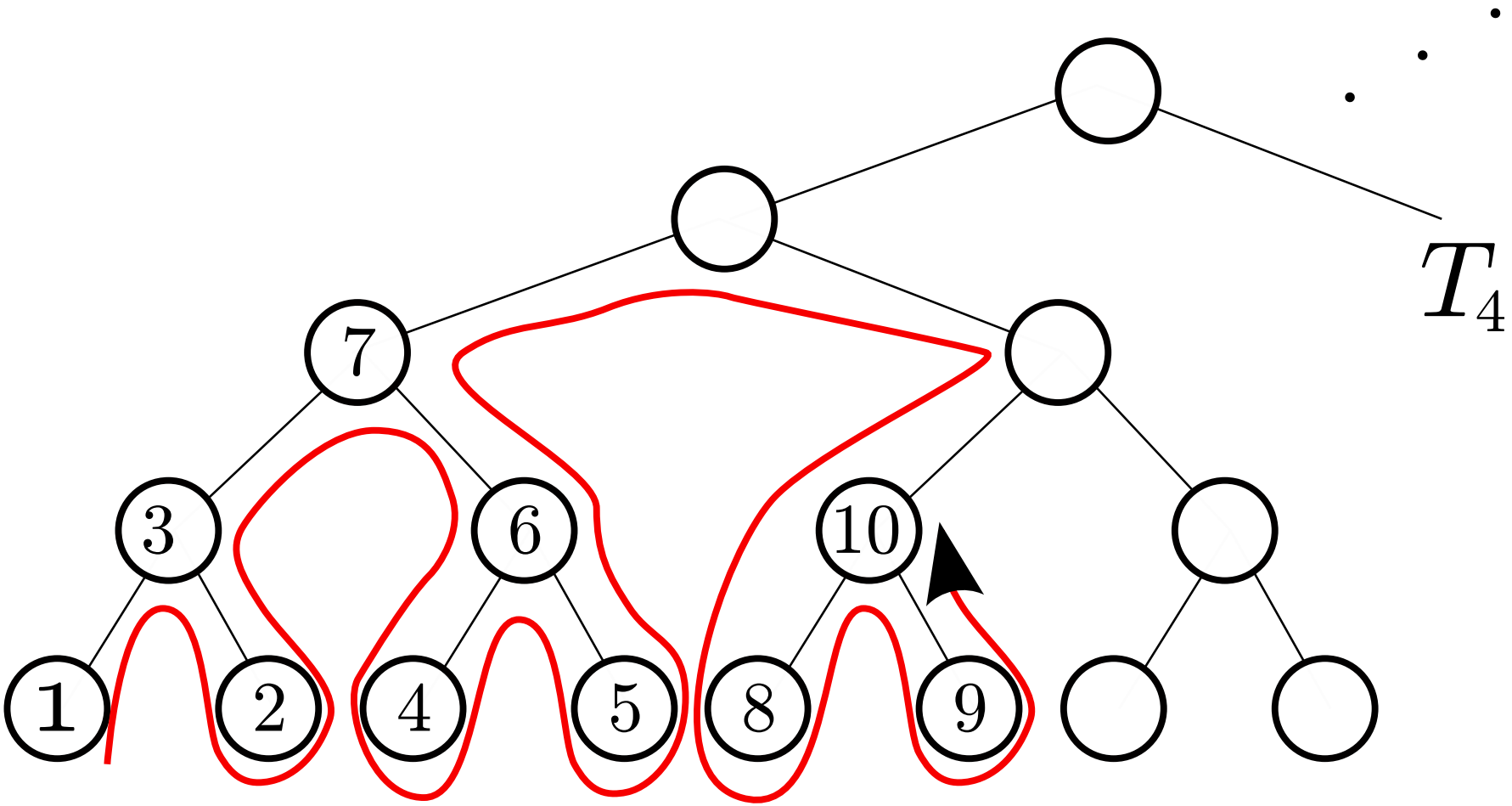
A fa bejárása



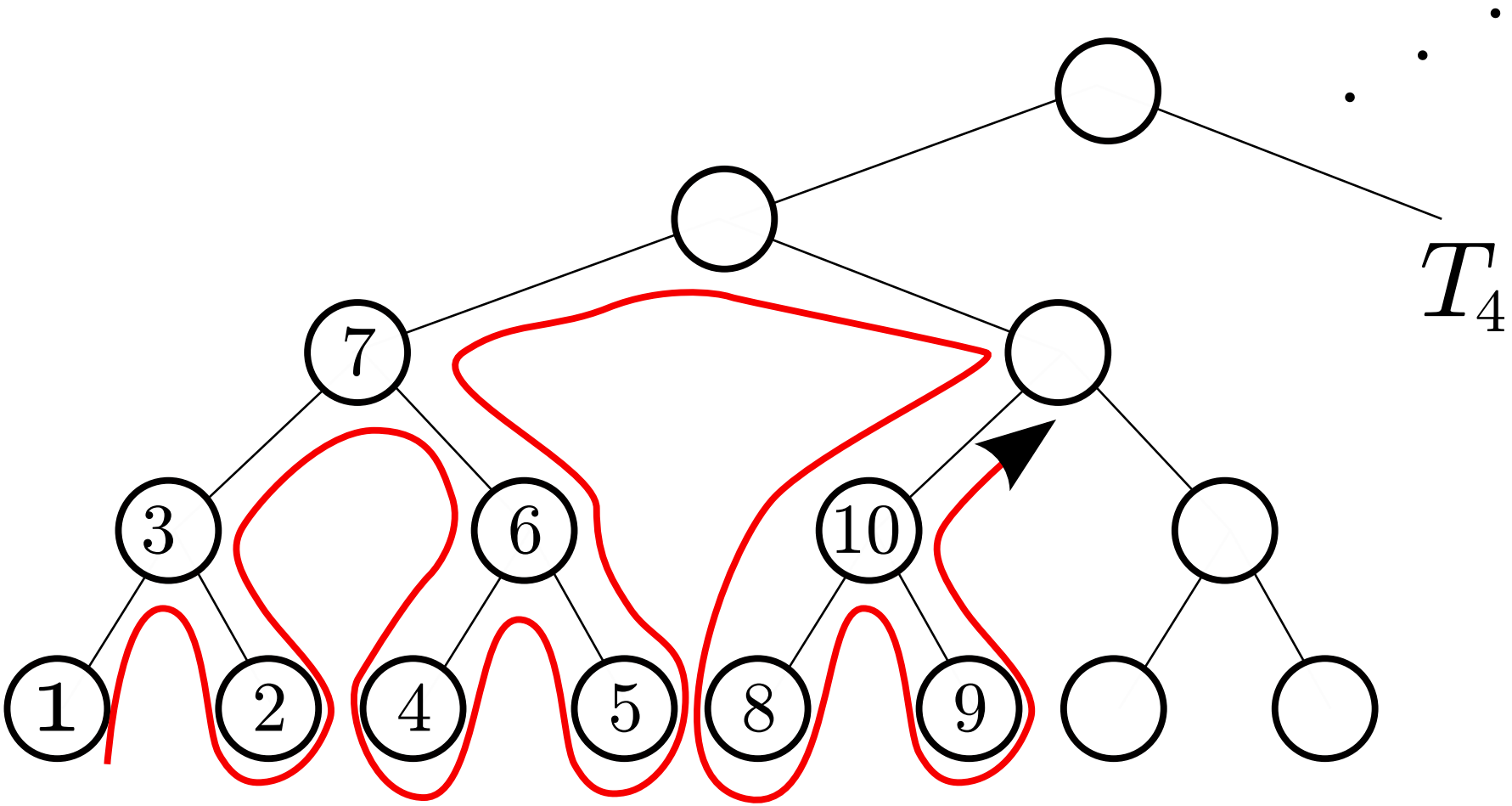
A fa bejárása



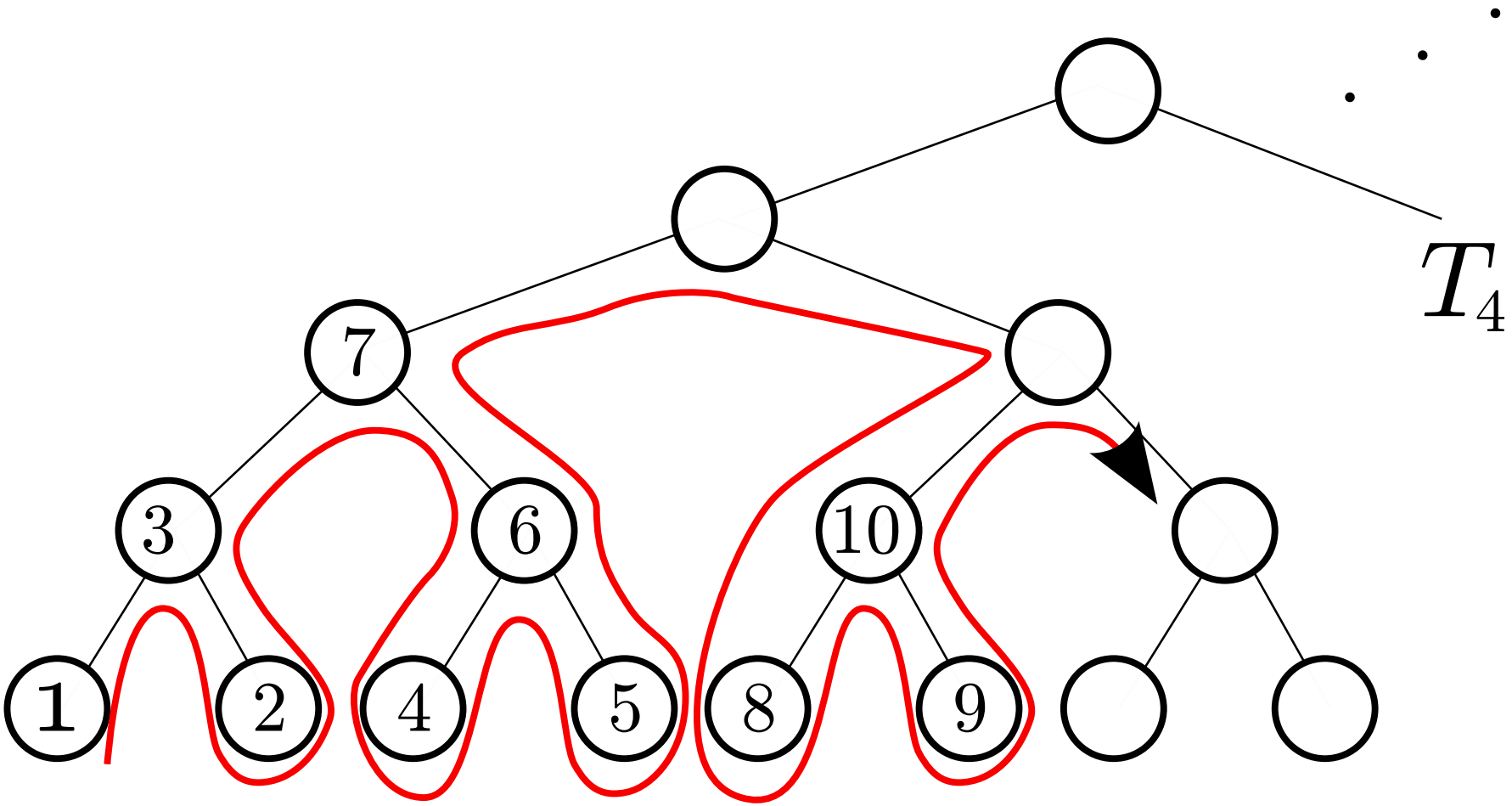
A fa bejárása



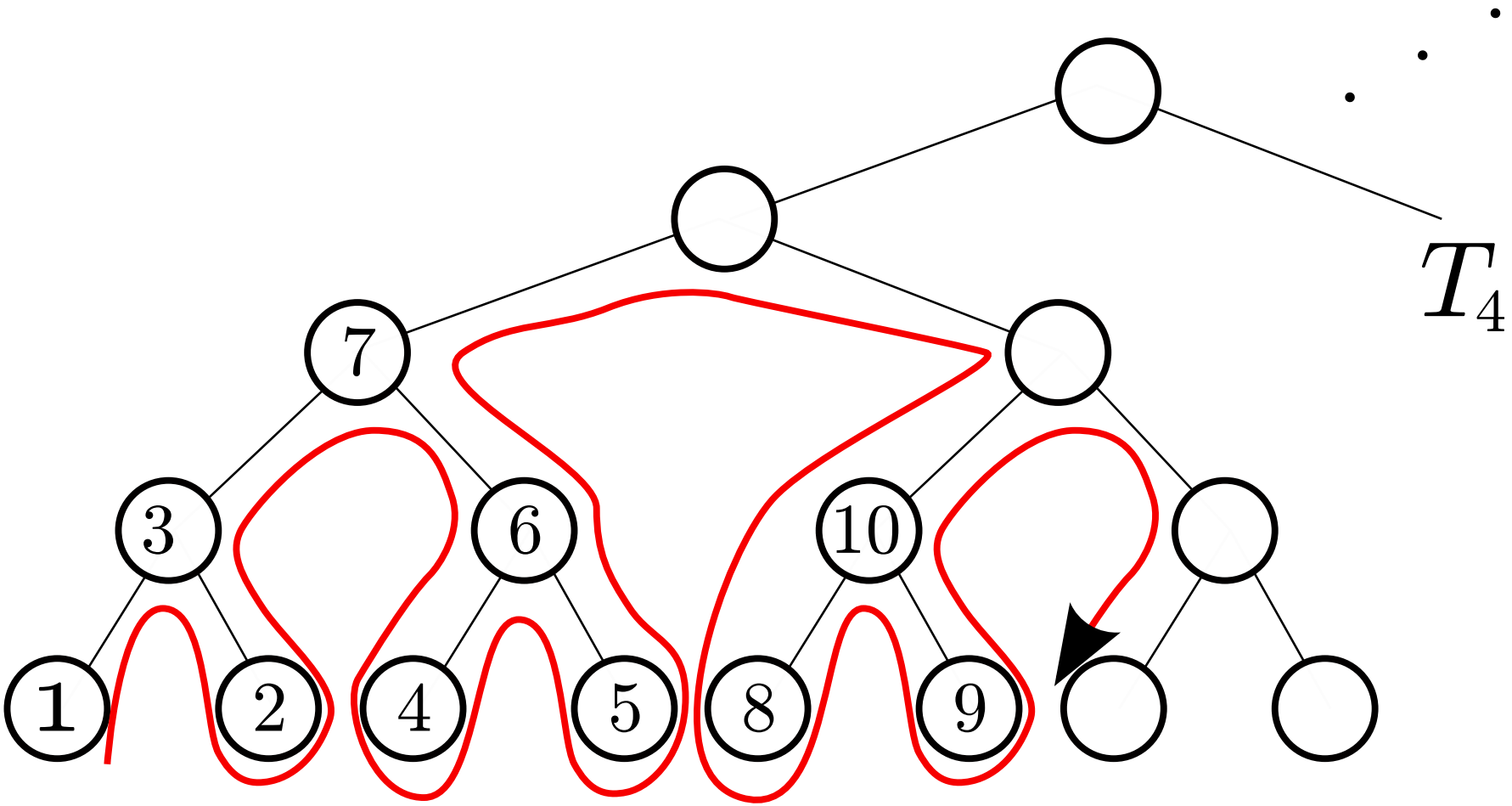
A fa bejárása



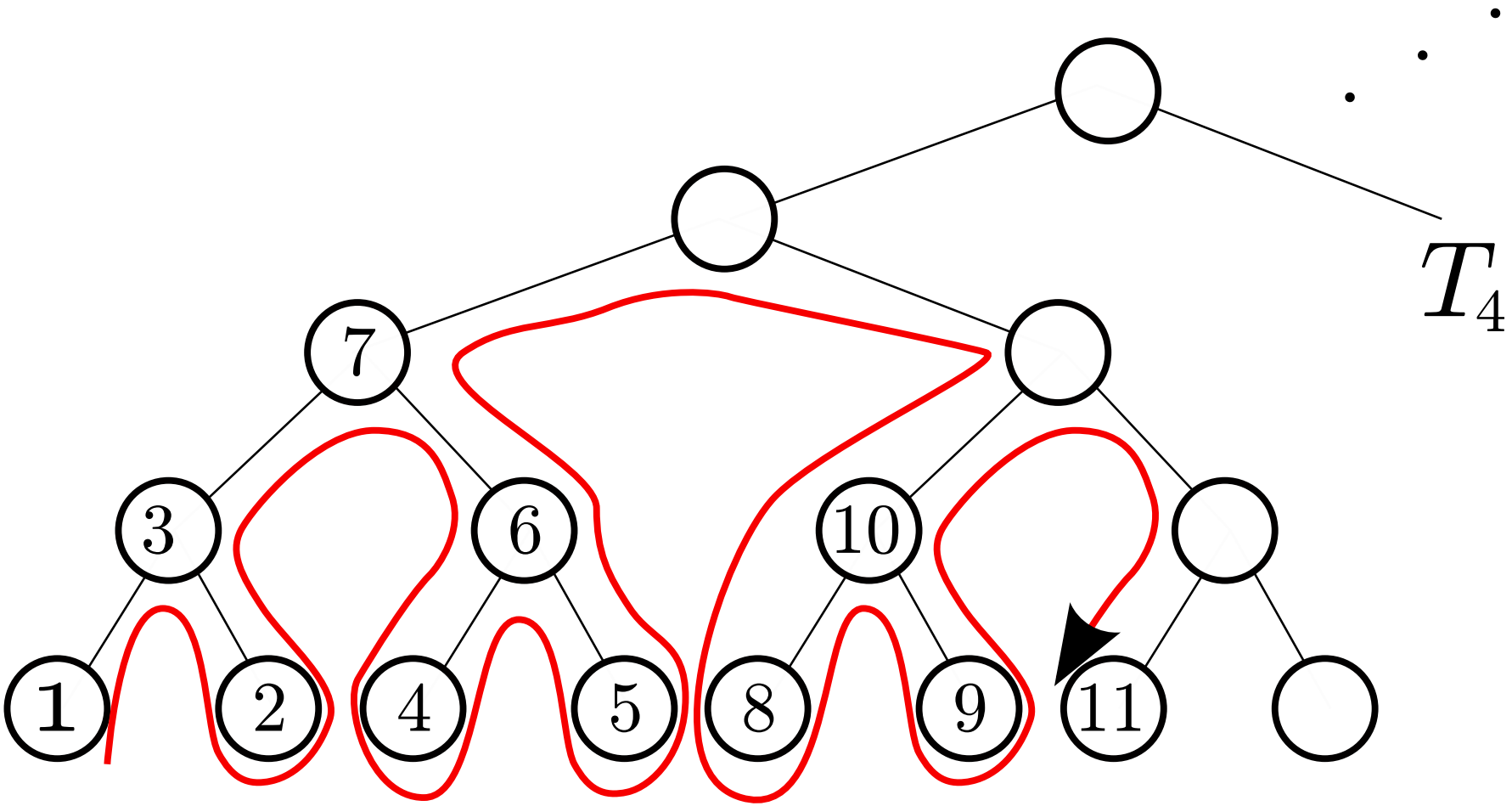
A fa bejárása



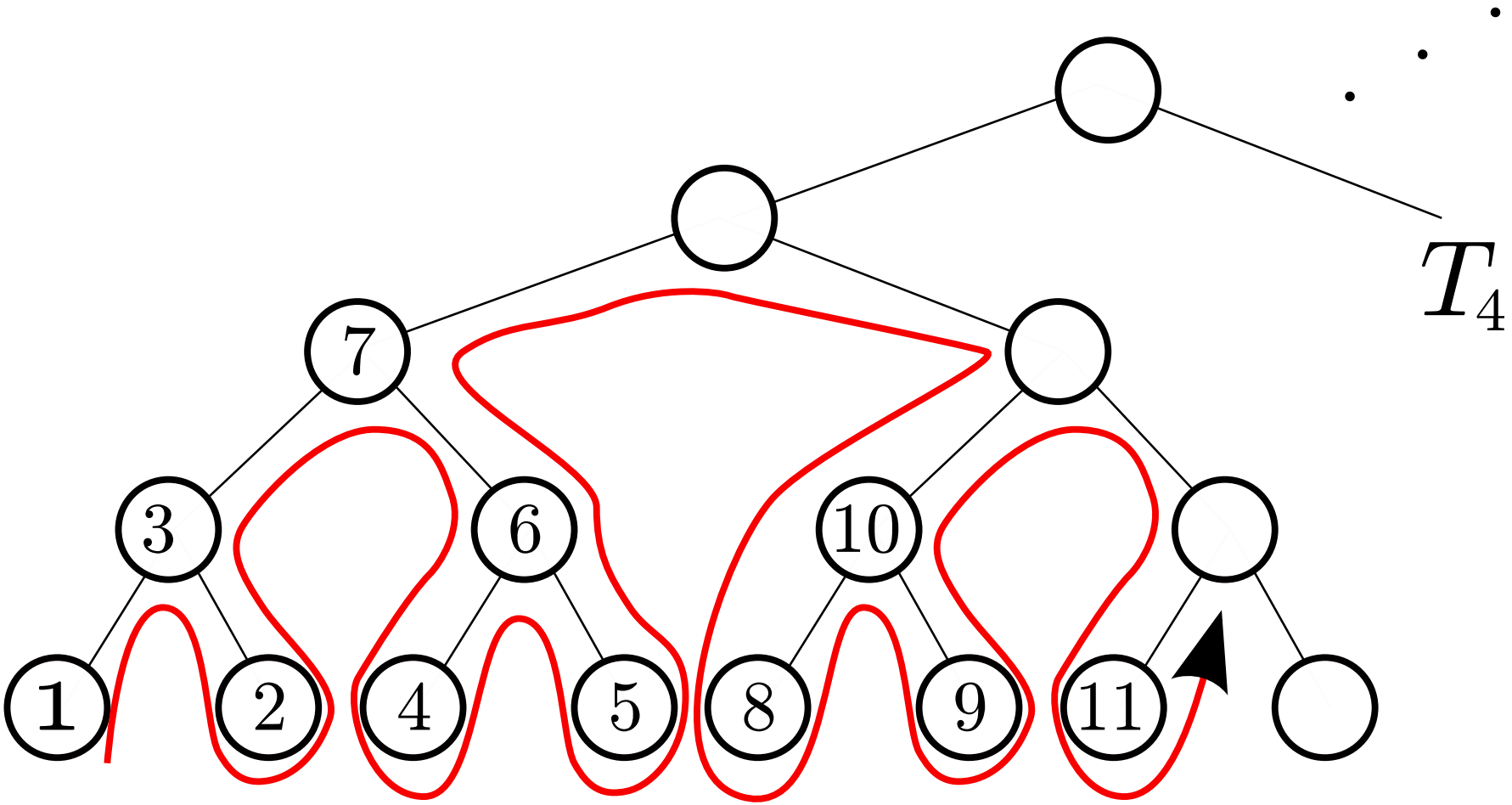
A fa bejárása



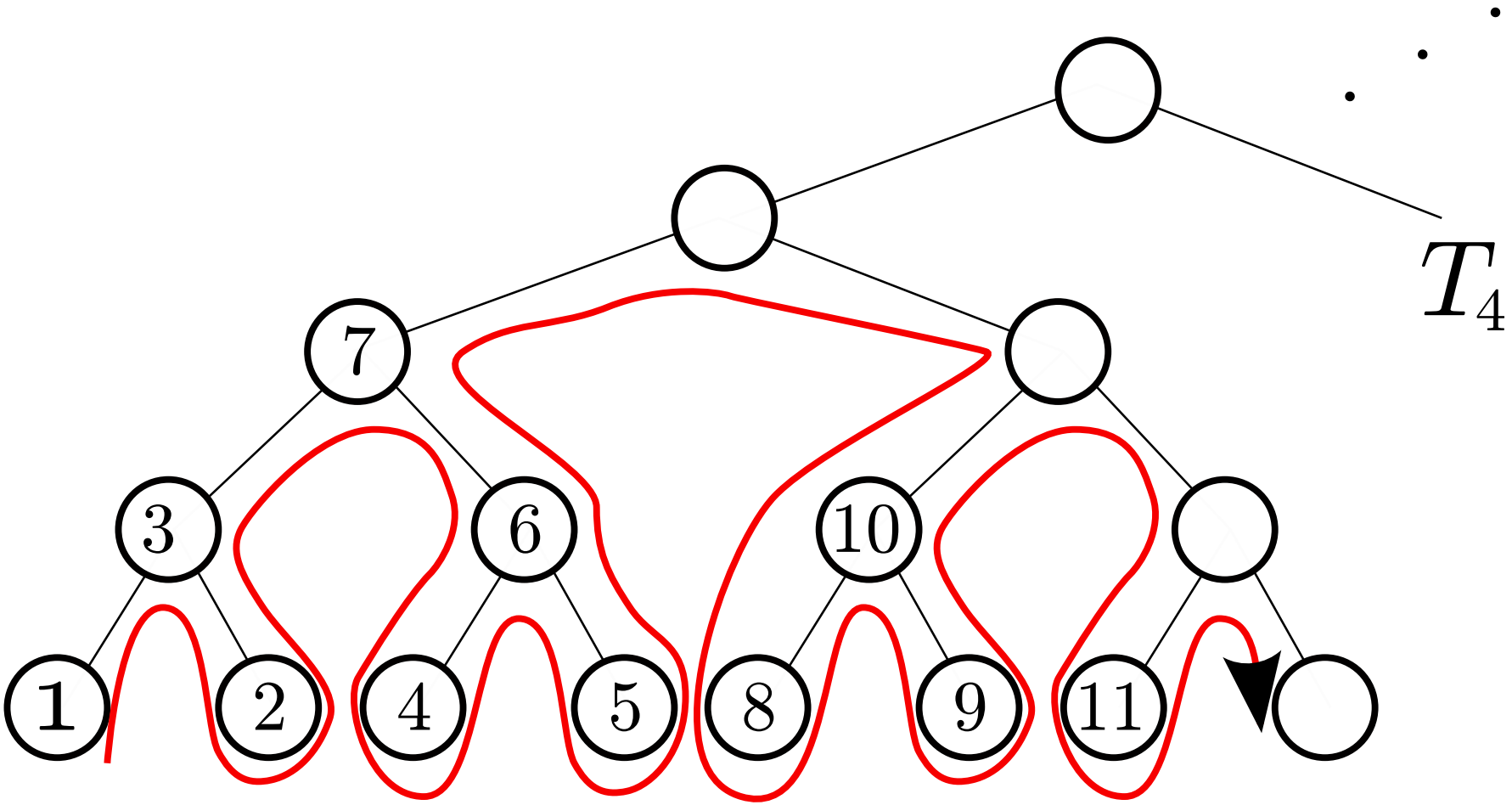
A fa bejárása



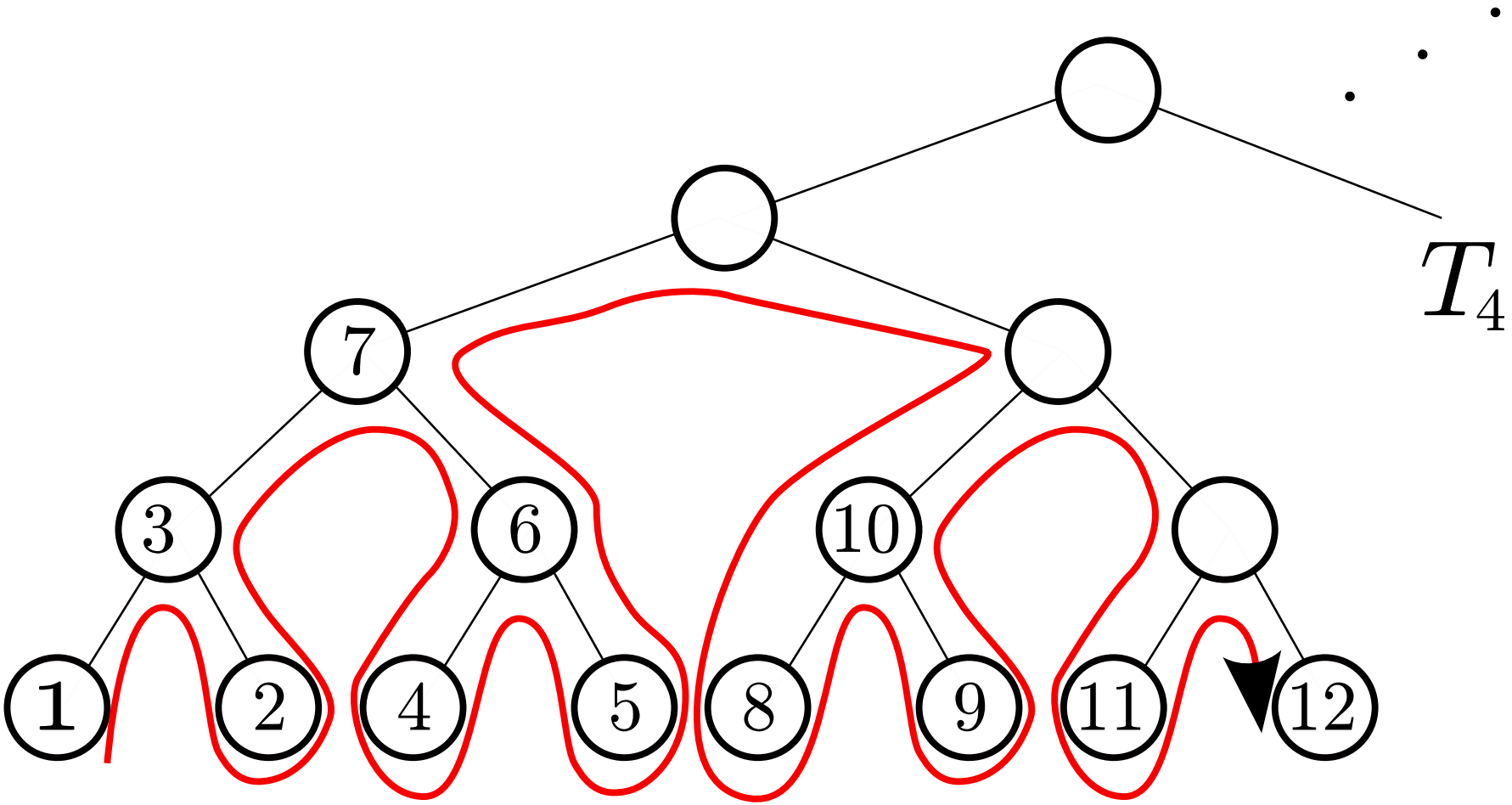
A fa bejárása



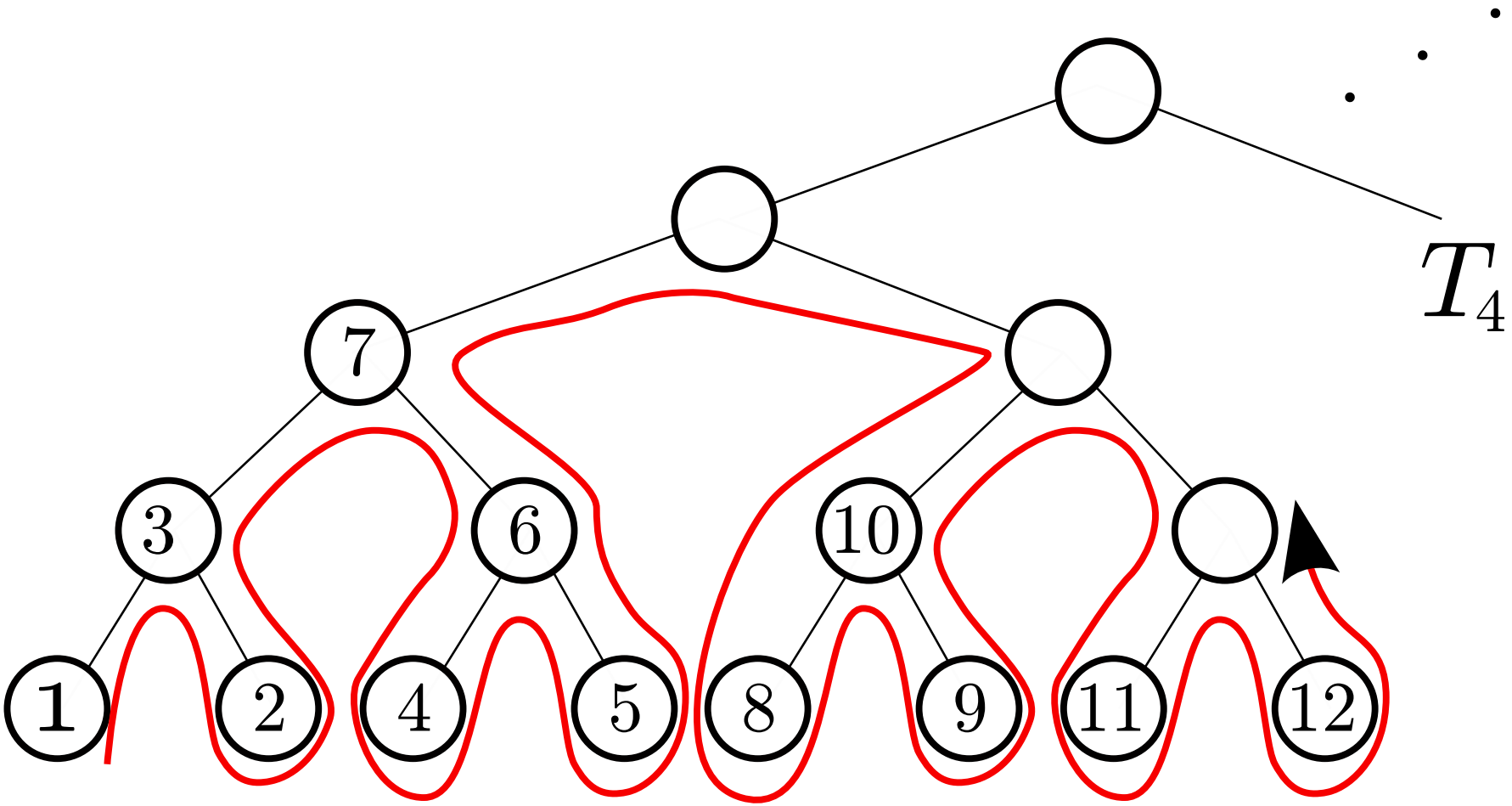
A fa bejárása



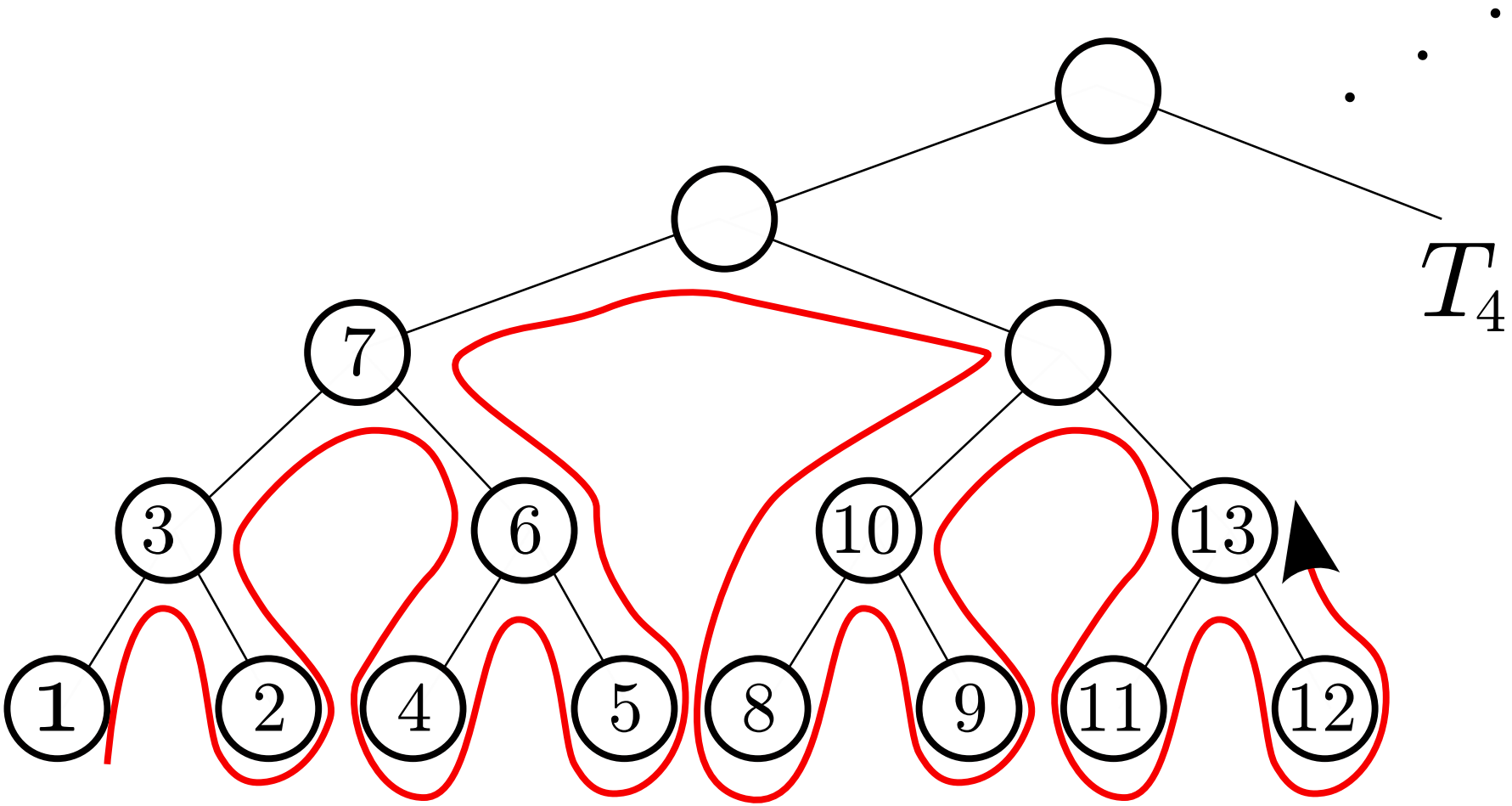
A fa bejárása



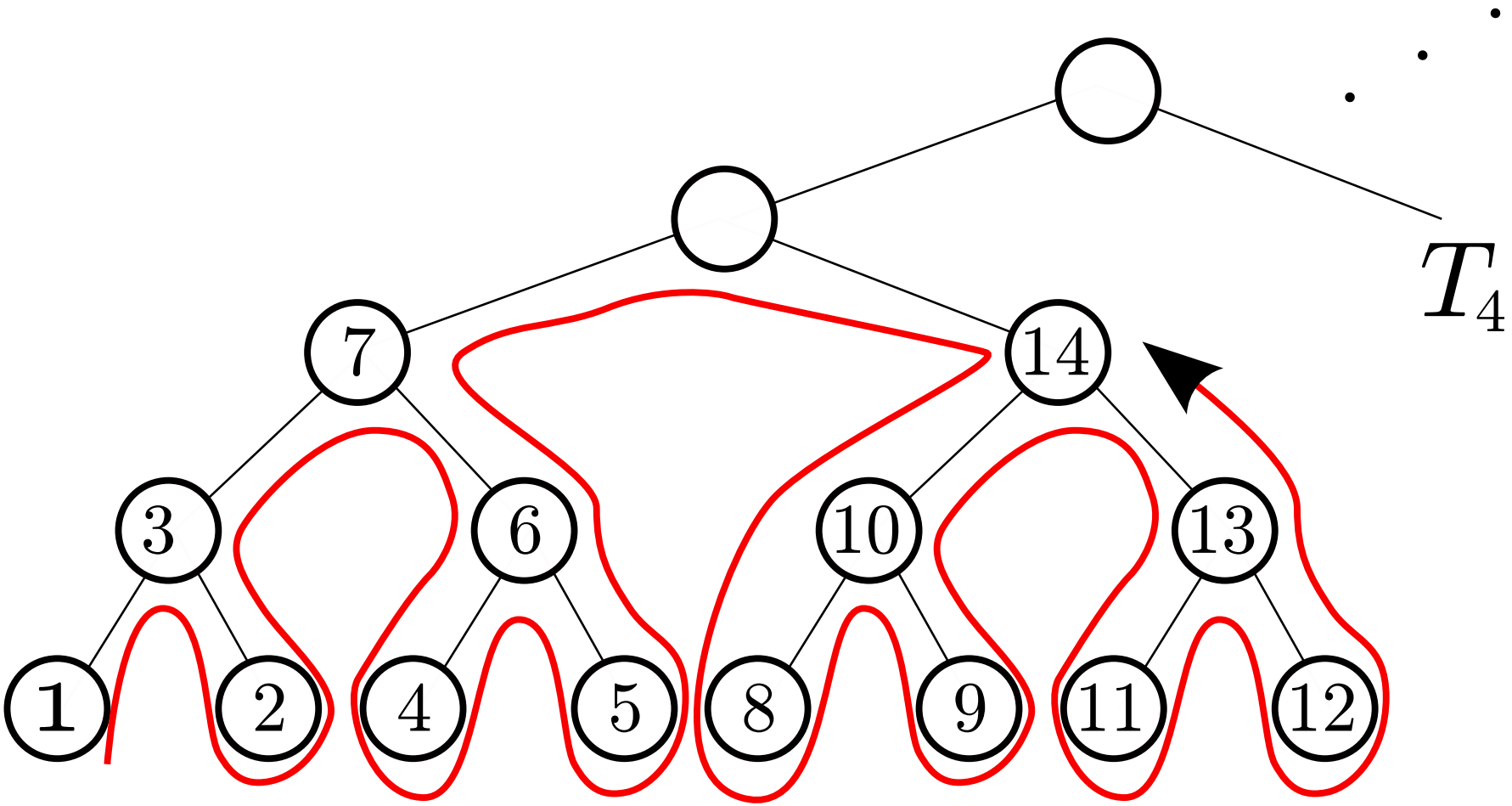
A fa bejárása



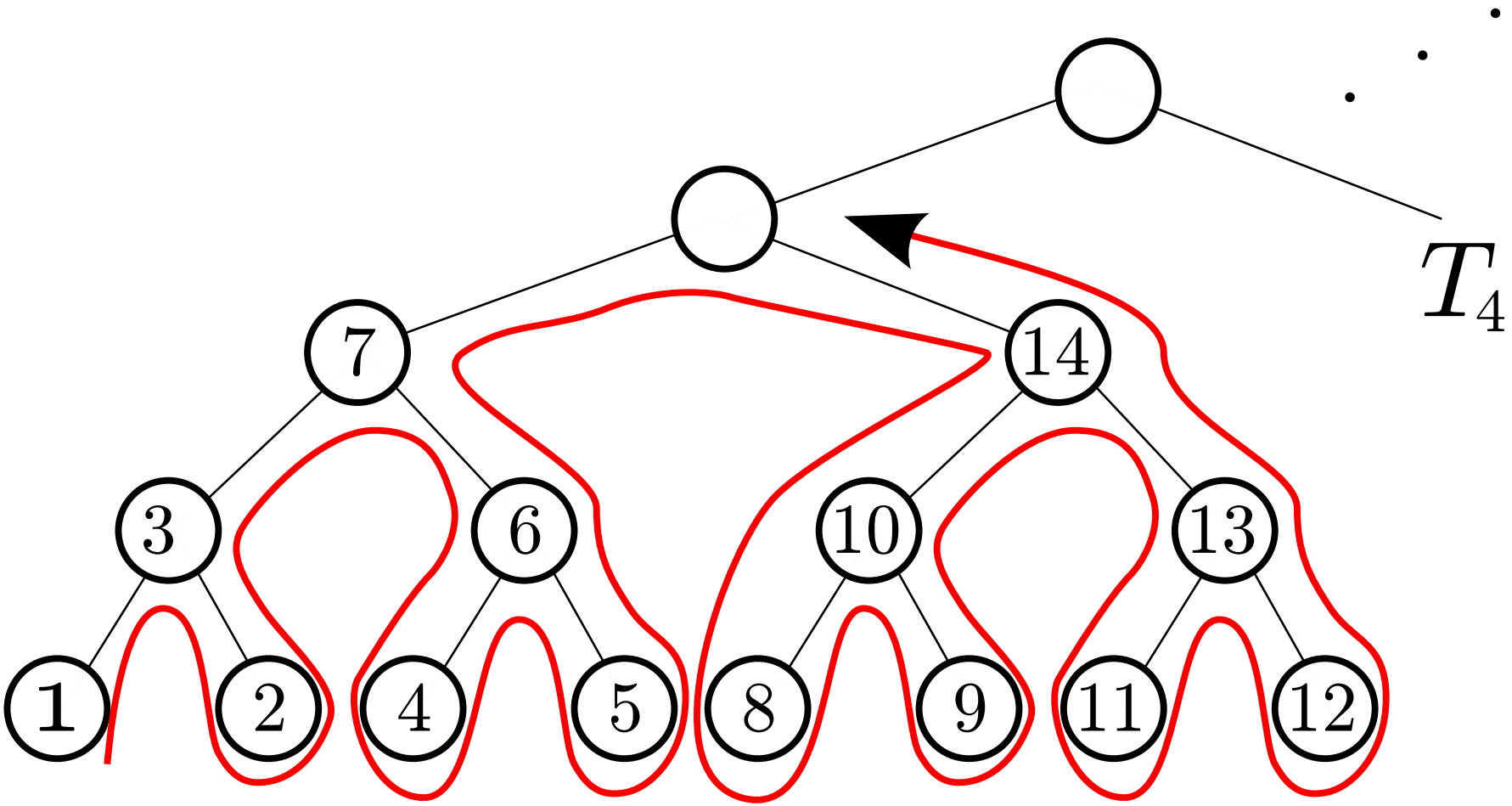
A fa bejárása



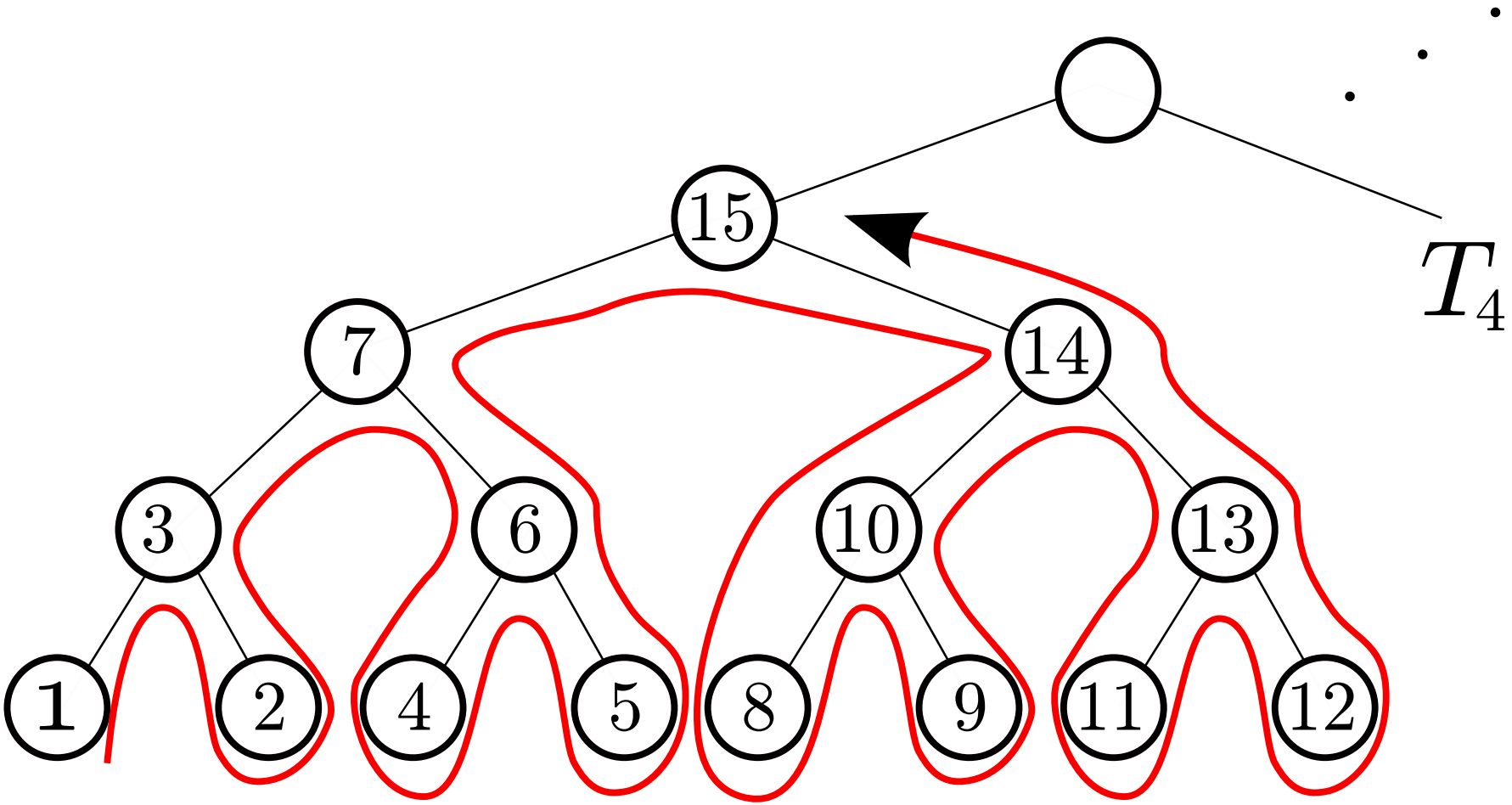
A fa bejárása



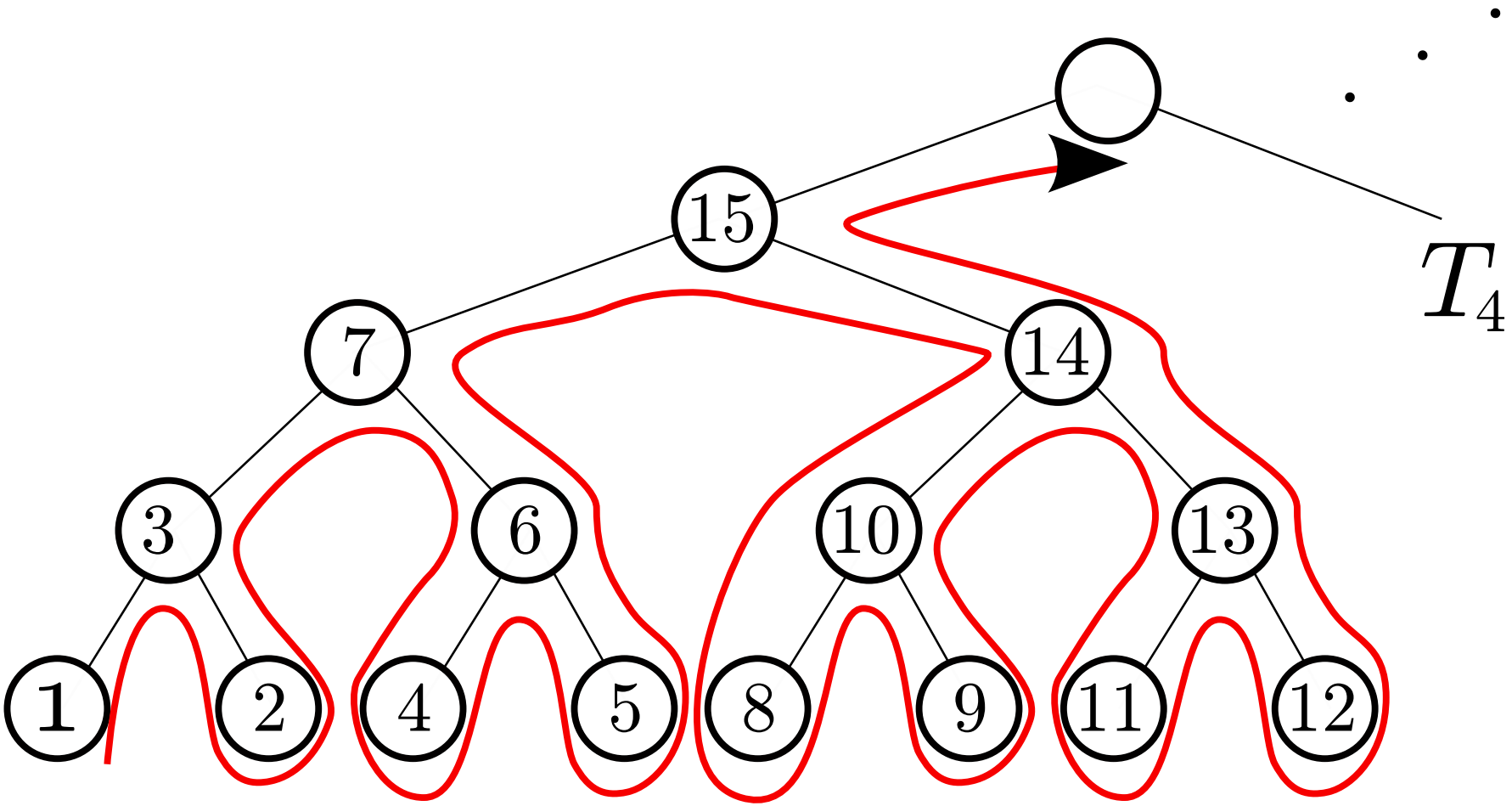
A fa bejárása



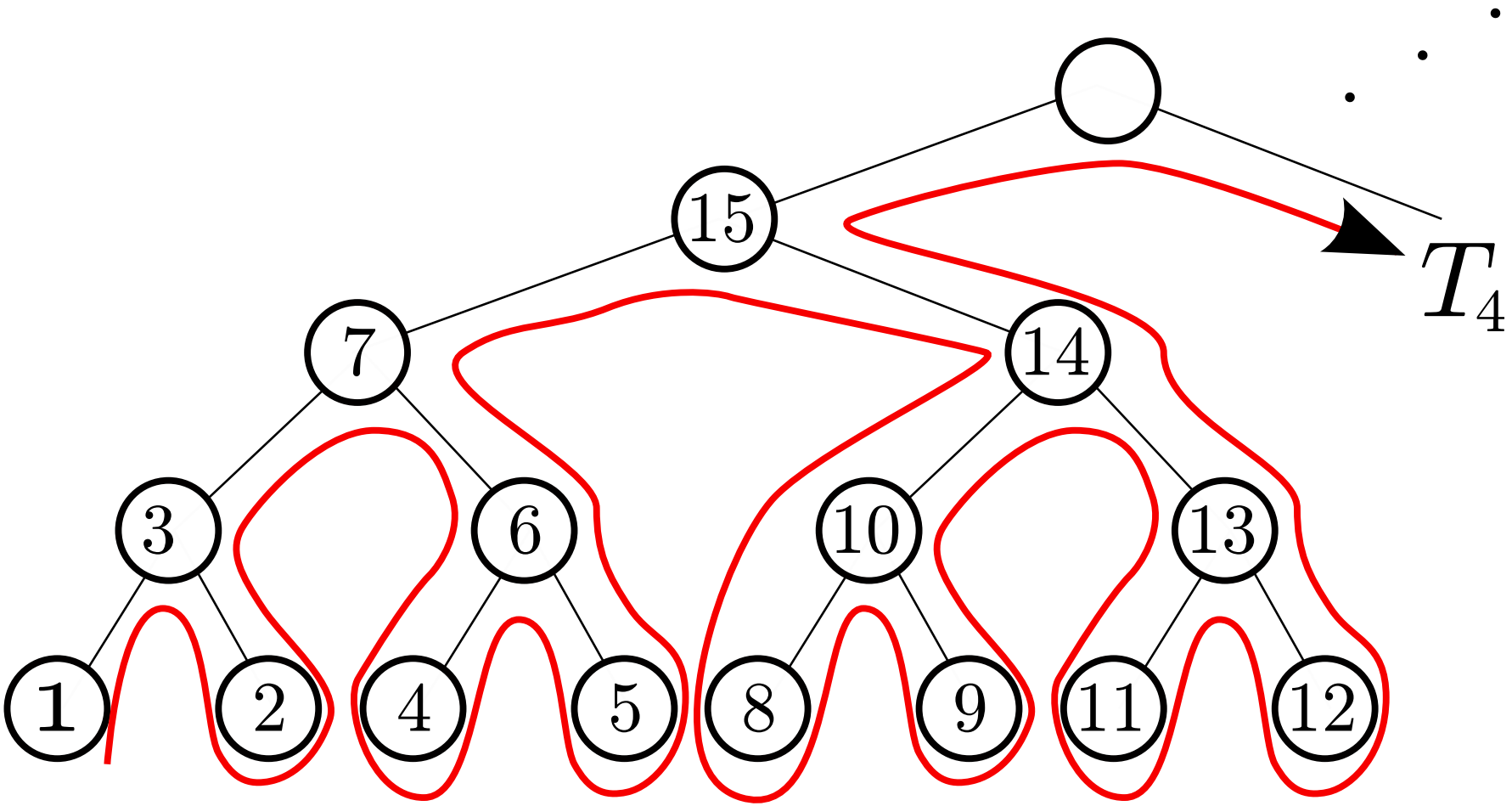
A fa bejárása



A fa bejárása



A fa bejárása



Egy újabb(?) függvény

Egy újabb(?) függvény

Definíció

Legyen $I(k)$ a fenti számozott fa $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ csúcsai alatt lévő levelek száma.

Egy újabb(?) függvény

Definíció

Legyen $I(k)$ a fenti számozott fa $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ csúcsai alatt lévő levelek száma.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I(k)	1	2	2	3	4	4	4	5	6	6	7	8

Minden út Rómába vezet

Minden út Rómába vezet

FELADAT

(a) Az inverz probléma $i(k)$ megoldása,

(b) a fával definiált $I(k)$ sorozat

UGYANAZ!

Egy fura számrendszer

Egy fura számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots\ldots, 2^k - 1, \ldots, 2^4 - 1, 2^3 - 1, \text{ hármasok, egyesek}$$

Egy fura számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots\ldots, 2^k - 1, \ldots, 2^4 - 1, 2^3 - 1, \text{ hármasok, egyesek}$$

Számjegyek:

$$0, 1, 2$$

Egy fura számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots\ldots, 2^k - 1, \ldots, 2^4 - 1, 2^3 - 1, \text{ hármasok, egyesek}$$

Számjegyek:

$$0, 1, 2$$

Szabály:

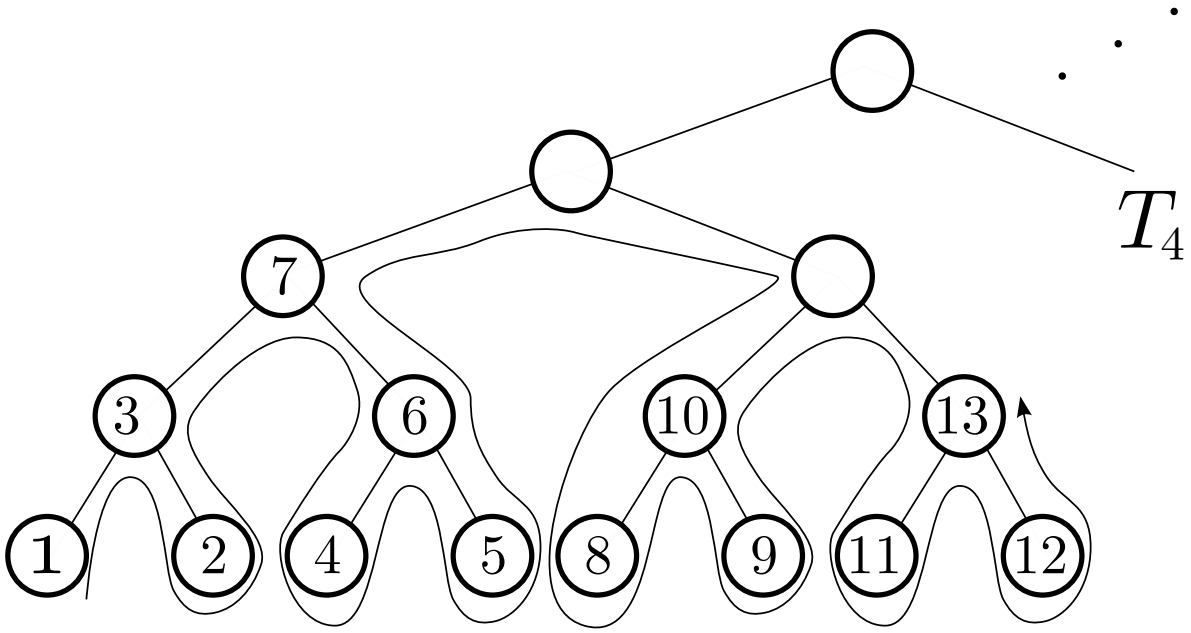
2-s számjegyet csak 0-k követhetnek!

Példa

13

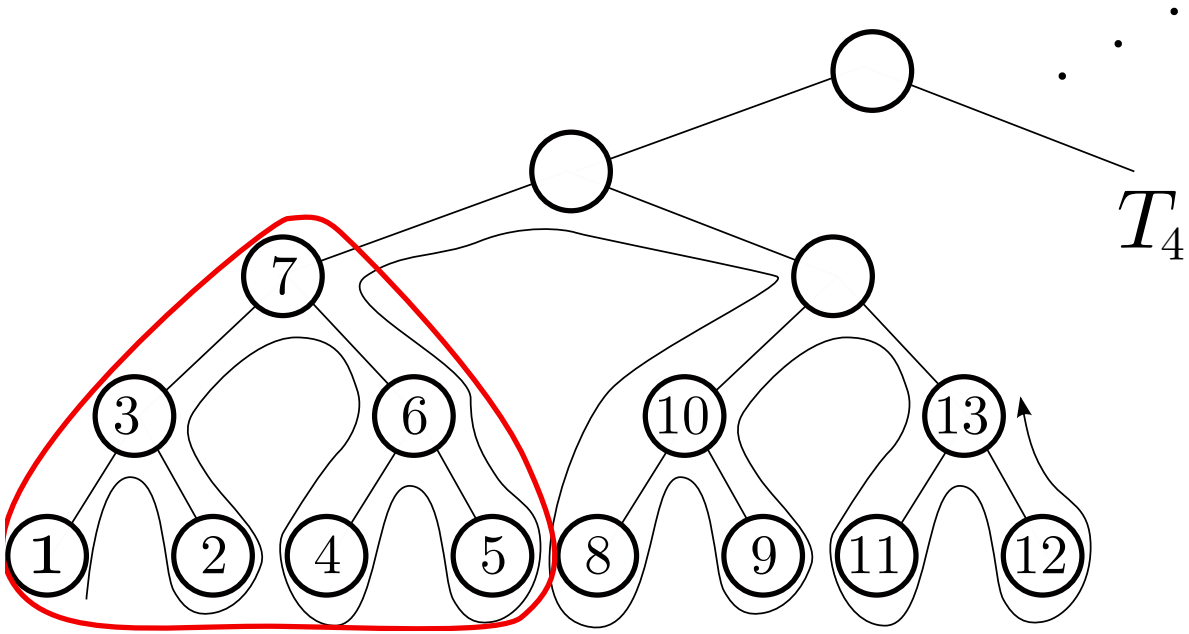
Példa

13



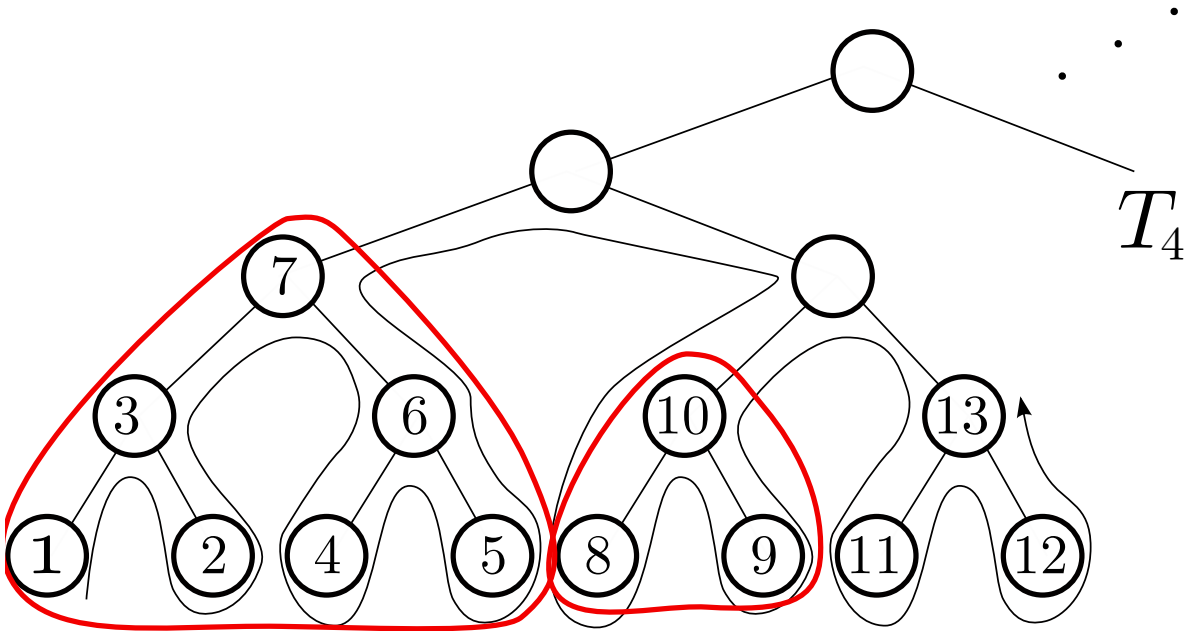
Példa

13



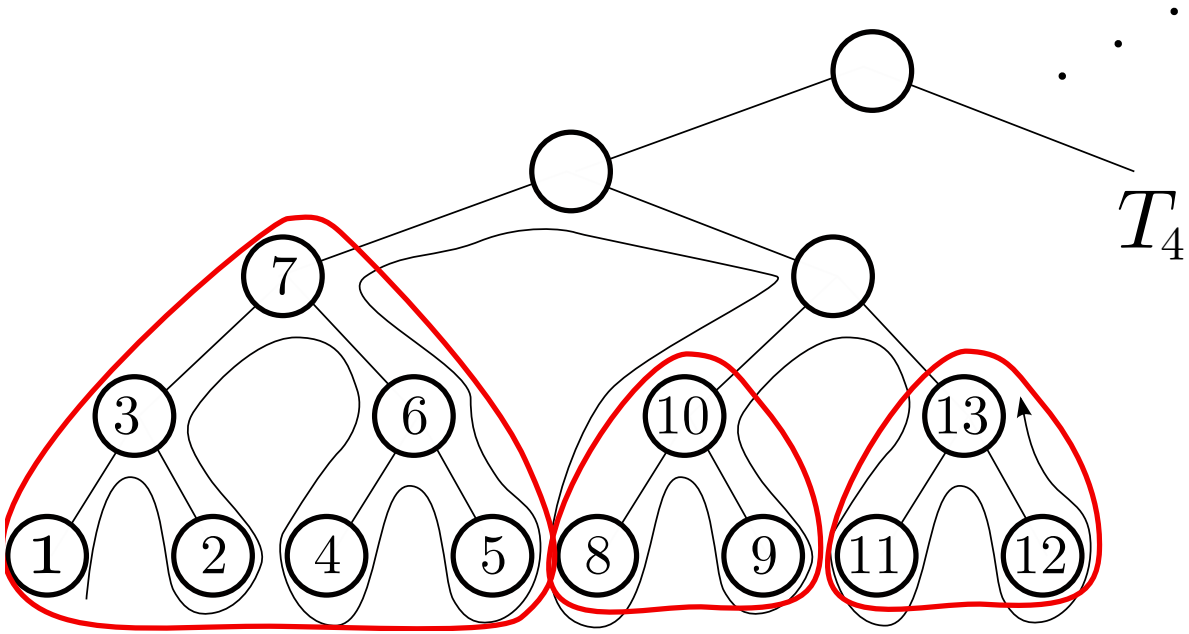
Példa

13



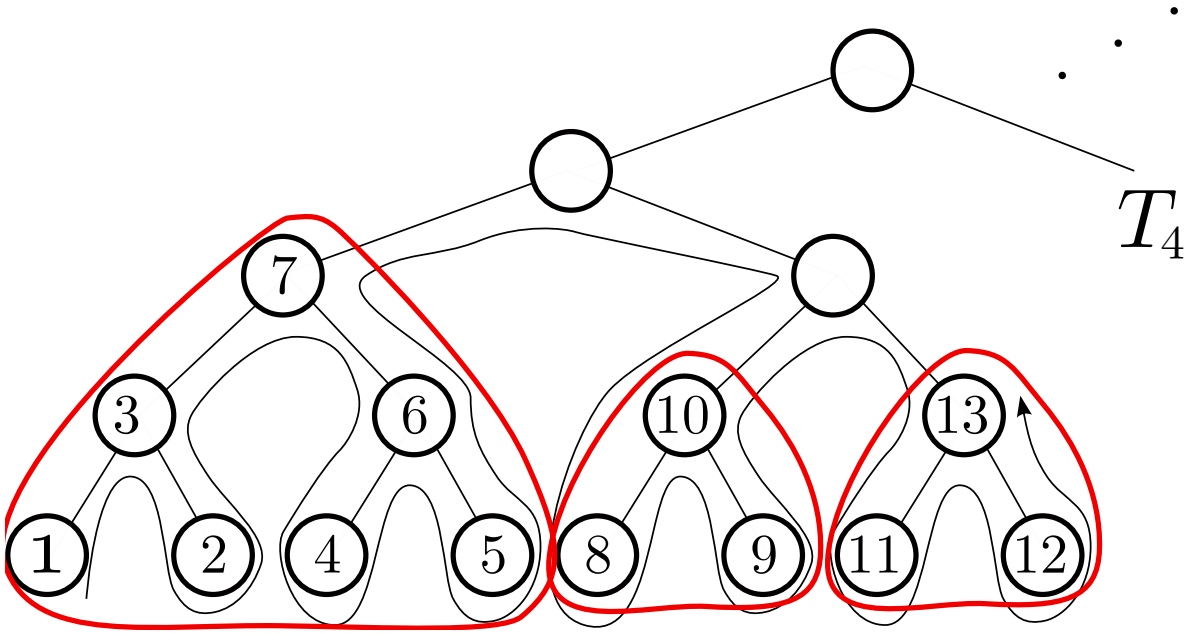
Példa

13



Példa

13



$$13 = 7 + 2 \cdot 3 = \begin{array}{ccc} \overset{7}{\smile} & \overset{3}{\smile} & \overset{1}{\smile} \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

A fura számrendszer

A fura számrendszer

FELADAT

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1, 2\}$,
- $\gamma_n \neq 0$,
- $\gamma_i = 2$ esetén $0 = \gamma_{i-1} = \gamma_{i-2} = \ldots$.

Vissza a kályhához

Vissza a kályhához

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathrm{fura}}.$$

Ekkor

$$i(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

Vissza a kályhához

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathrm{fura}}.$$

Ekkor

$$i(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

Vissza a kályhához

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\text{fura}}.$$

Ekkor

$$i(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

$$2015 = 1111110012_{\text{fura}}.$$

Vissza a kályhához

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\text{fura}}.$$

Ekkor

$$i(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

$$2015 = 1111110012_{\text{fura}}.$$

$$i(2015) = 1111110012_2 = 1012.$$

Vissza a kályhához

FELADAT

Legyen
$k = \gamma_n(2^n - 1) + \gamma_{n-1}(2^{n-1} - 1) + \ldots + \gamma_i(2^i - 1) + \ldots + \gamma_1(2^1 - 1)$
az előző „fura” számrendszerben. Azaz

$$k = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\text{fura}}.$$

Ekkor

$$i(k) = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\cdots\gamma_2\gamma_{1\,\mathbf{2}}.$$

$$2015 = 1023 + 511 + 255 + 127 + 63 + 31 + 3 + 2 \cdot 1.$$

$$2015 = 1111110012_{\text{fura}}.$$

$$i(2015) = 1111110012_2 = 1012.$$

$$2^{2015} \mid (2 \cdot 1012)! \qquad DE \qquad 2^{2015} \not\mid 2023!.$$

Feladat

Feladat

FELADAT

Igazoljuk, hogy

(i)

$$i(n) \geq \frac{n}{2},$$

(ii)

$$\left| i(n) - \frac{n}{2} \right| \leq \frac{\log_2 n}{2},$$

feltéve, hogy n „nagy”.

Wythoff-NIM játék

Egyetlen táblán egyetlen királynő.

Wythoff-NIM játék

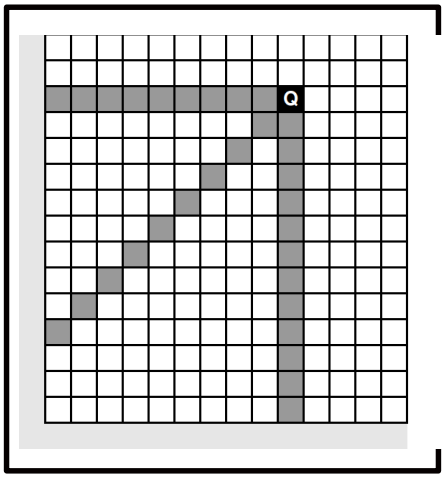
Egyetlen táblán egyetlen királynő.

Két játékos felváltva mozgatja a királynőt a bal alsó sarok felé.

Wythoff-NIM játék

Egyetlen táblán egyetlen királynő.

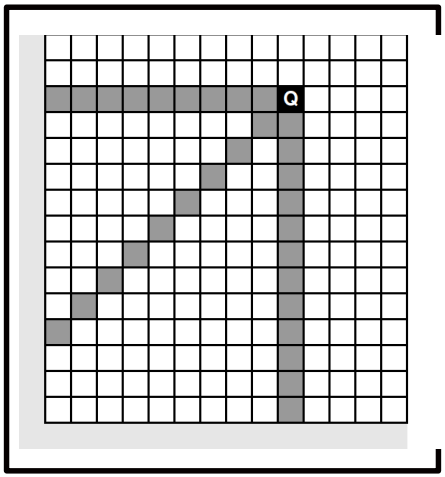
Két játékos felváltva mozgatja a királynőt a bal alsó sarok felé.



Wythoff-NIM játék

Egyetlen táblán egyetlen királynő.

Két játékos felváltva mozgatja a királynőt a bal alsó sarok felé.



Ki nyer/ki veszít?

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143,$$

Fibonacci-számok

Definíció, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ Fibonacci-számok

$$F_0 = F_1 = 1,$$

Ha F_n-hez van két megelőző tag, akkor

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143, \ldots$$

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

$$2015 = 1597 + 377 + 34 + 5 + 2.$$

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

$$2015 = 1597 + 377 + 34 + 5 + 2.$$

$$2015 = F_{16} + F_{13} + F_8 + F_4 + F_2.$$

Egy újabb feladat

FELADAT (Zeckendorf)

Minden természetes szám egyértelműen írható fel

$$\gamma_n F_n + \gamma_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \gamma_i F_i + \ldots + \gamma_1 F_1$$

alakban, ahol

- $\gamma_i \in \{0, 1\}$,
- $\gamma_n = 1$,
- $(\gamma_{i+1}, \gamma_i) \neq (1, 1)$.

$$2015 = 1597 + 377 + 34 + 5 + 2.$$

$$2015 = F_{16} + F_{13} + F_8 + F_4 + F_2.$$

$$2015 = 1001000010001010_{\text{Fibonacci}}.$$

Fibonacci-számrendszer

Fibonacci-számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots F_5,\ F_4,\ F_3,\ \text{kettesek, egyesek}$$

Fibonacci-számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots F_5,\ F_4,\ F_3,\ \text{kettesek, egyesek}$$

Számjegyek:

$$0, 1$$

Fibonacci-számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots F_5,\ F_4,\ F_3,\ \text{kettesek, egyesek}$$

Számjegyek:

$$0, 1$$

Szabály:

Két 1-es számjegy sose követi egymást

Fibonacci/bináris számrendszerek hasonlóak

Fibonacci/bináris számrendszerek hasonlóak

FELADAT

Bizonyítsuk be, hogy

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rceil .$$

Fibonacci/bináris számrendszerek hasonlóak

FELADAT

Bizonyítsuk be, hogy

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rceil .$$

FELADAT

Hány n-jegyű

- bináris szám van?
- Fibonacci-számrendszerbeli szám van?

Problémák

Probléma

Adjunk JÓ eljárást Fibonacci-számrendszerben felírt számok összeadására, kivonására, szorzására.

A Wythoff NIM alaptétele

Tétel

Az (s, t) pozíció $s < t$ akkor és csak akkor vesztő, ha

$$s = i_\ell i_{\ell-1} \dots i_2 i_1{}_{\textbf{Fibonacci}}$$

páros sok 0-val végződik és

$$t = i_\ell i_{\ell-1} \dots i_2 i_1 0_{\textbf{Fibonacci}}$$

További lehetőségek

Igen!

Alternáló bináris számrendszer

Alternáló bináris számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots, 2^n, \ldots, \text{négyesek, kettesek, egyesek}$$

Alternáló bináris számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots, 2^n, \ldots, \text{négyesek, kettesek, egyesek}$$

Számjegyek:

$$-1, 0, 1$$

Alternáló bináris számrendszer

Helyi értékek:

$$\ldots, 2^n, \ldots, \text{négyesek, kettesek, egyesek}$$

Számjegyek:

$$-1, 0, 1$$

Szabály:

Nem-0 számjegyek között 1 és -1 alternál

Még további lehetőségek?

Még további lehetőségek?

Donald E. Knuth: A számítógép-programozás művészete I-II

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!