

Előszó

Ez a jegyzet matematikus hallgatók számára tartott kombinatorika előadások alapján íródott. Az anyagot a halmazrendszerek fogalma köti össze. A halmazrendszerek a kombinatorika egyik legáltalánosabb fogalma, alkalmazási területekkel a matematika és a gyakorlati élet legkülönbözőbb ágaiban.

Az egyes fejezetek a halmazrendszerek nagy témaköreit ölelik fel. Persze így a teljes kombinatorika anyagot ebbe a jegyzetbe lehetne gyűjteni. A jegyzet azonban még a nyilvánvalóan „halmazrendszeres” témakörök számára is szűk. Ennek ellenére igyekeztem az összes fontos módszert, kérdéskört — ha néha csak érintőlegesen is — felvillantani. Így a kombinatorika iránt érdeklődő diákok, kombinatorikus módszereket használó PhD hallgatók számára egy alapot adni, hogy a modern szakirodalom vizsgálatában elindulhassanak, eligazodjanak. Az, hogy végül mi került a jegyzetbe és mi maradt ki az a szerző saját ízlését, tanulmányait, érdeklődési területeit tükrözi. Elnézést, ha valaki fontos témák után nézve ebben a jegyzetben nem, vagy csak hiányosan találja azt meg.

Az, hogy a válogatás és a „tálalás” ilyen módon történt jelentős szerepet játszottak egykori tanárain. Közülük ki kell emelnem Édesapámat, aki megismertetett a matematikai gondolkodás alapvető szabályaival, ennek szépségével, és aki rászoktatott a kitartó munkára. Későbbi tanárain is jelentős hatással voltak rám. A kombinatorika modern problémáit, eszközeit a témkör legjobb kutatóitól tanulhattam. A szakmai tudás mellett a tudomány művelésének alapvető módszereit is ellestem Tőlük. Közülük Lovász Lászlót, Babai Lászlót, Simonovits Miklóst és Szemerédi Endrét emelem ki. Köszönettel tartozom Nekik, és bízom abban, hogy munkámban tükröződik hatásuk.

A kombinatorika magasabb szintű vizsgálata közben igen jelentős segédeszközökre van szükség a matematika más ágaiból. Az algebrai, geometriai, lineáris programozási módszerek nélkül már nélkülözhetetlen alaperedmények tárgyalása is lehetetlen. A jegyzet olvasása közben több olyan szekció, fejezet van, amelyhez előismeret szükséges. Itt a szükséges fogalmak ismeretete után feltételezem az algebrai, geometriai st. háttér ismeretét. Ennek hiánya gyakran intuícióval pótolható.

Azonban mindenki legyen tudatában, hogy a legszemléletesebb, elemibben tekintett matematikához sem vezet királyi út. A modern elméletek ismeretése mellett nagyon sok anyag középiskolai tudással is követhető és szépsége élvezhető. Bizom benne, ha egy olvasó ismereteinek hiányosságát fedezi fel, akkor nem keseredik el, hanem a hiány pótlására törekszik.

A jegyzet végén csak általános referenciákat, illetve összefoglaló cikkeket tüntettem fel. Nem törekedtem a teljességre. Ezek fejezetenként vannak csoportosítva. Törekedtem a magyar nyelvű irodalmat átfogni (amely szerencsére gyarapodik) és az alap angol nyelvű munkákat feltüntetni. Néhány érintőlegesen érintett témában (például véges síkok) remek, részletes magyar nyelvű irodalom is létezik. Jegyzetünk csupán étvágygerjesztő lehet ezekhez a könyvekhez. Más esetben irodalomjegyzékünk segítséget nyújt az érdeklődő olvasónak abban, hogy további a témakörbe vágó ismeretekhez jusson. A jegyzeten belül is néhány helyen lábjegyzetben utalok az éppen tárgyalt kérdéskört tárgyaló hasznos cikkekre. Jegyzetünknek azonban nem célja, hogy a halmazrendszerek nagyon szerteágazó irodalmáról attekintő képet nyújtson.

A jegyzet végén egy jelölések fejezet foglal össze néhány jelölést és megállapodást. Ennek a célja nem új fogalmak bevezetése. A szokatlan jelölések, nem standard nézőpontok esetén lehet ezt a részt segítségül hívni. Semmiképpen sem lehet a vizsgált témakörbeli járatlanságot innen pótolni.

Az egyes fejezetekhez feladatok is társulnak, amelyek bizonyítás nélkül vannak közölve. Ezek megoldása elmélyíti a tárgyalt anyag megértését. Sajos a feladatanyag eléggé szűkös. Ez köszönhető annak is, hogy a kombinatorika ezen fejezeteinek többsége az egyetemen speciálkollégiumok keretében tárgyaltak. Ezekhez pedig nem kapcsolódnak gyakorlatok. Talán egy későbbi kiadás idejére megfelelő feladatanyag is társul majd az elméleti részhez. A nehezebb, feladatok nélkül közölt részekben az egyes anyagrészt tisztázása, a részletesen nem közölt bizonyítások végiggondolása nyújt segítséget a mélyebb elsajátításhoz.

A jegyzet 13 fejezetre van osztva. Mindegyikben további alfejezetek, szekciók vannak. A szekciókon belül az állítások, definíciók, ábrák és feladatok folyamatosan vannak számozva. Tehát a 5.3.4. ábra az ötödik fejezetének, harmadikk szekciójában fejezetében a négyes számú ábra. Ezt követheti a 5.3.5. lemma, majd a 5.3.6. ábra, és a 5.3.7. definíció.

A jegyzet végső formájának kialakításában nagyon sokan segítségemre voltak. Ki kell emelnem Barát János és Füredi Zoltán lektori munkáját. Lelkiismeretes munkájuk jelentősen javított a korábbi változatok minőségén. Továbbá szeretném megköszönni Balogh József, Csaba Béla, Goldman Júlia, Imreh Csanád, Pete Gábor és Timár Ádám munkáját akik a jegyzet különböző változatait figyelemmel átolvasták és megjegyzéseikkel segítették a jelen forma kialakulását. Fáradozásaik

és fáradozásom ellenére bizonyára több elírás, rosszul megfogalmazott mondat és talán hiba is maradt a jegyzetben. Ezekért én vállalom a felelősséget. Bármilyen, a jegyzettel kapcsolatos, megjegyzést várok a tanító kollégáktól és a jegyzet olvasóitól. Ezúton is kérek mindenkit, hogy véleményét juttassa el hozzám.

Végül köszönöm az OTKA T???? és T????? pályázatok és a Széchenyi Professzori Ösztöndíj támogatását.

Hajnal Péter

Szeged, 2002.

Tartalom

Előszó	i
1. Halmazrendszerek	1
1.1. A halmazrendszer és hipergráf fogalma	1
1.2. Halmazrendszerek legegyszerűbb paraméterei	3
1.3. Halmazrendszerek és hipergráfok megadása	5
1.4. Műveletek halmazrendszerekkel és hipergráfokkal	7
1.5. Halmazrendszerek automorfizmusai	9
2. Halmazrendszerek lefogása és páronként diszjunkt részrendszerek keresése	11
2.1. Független élek	11
2.2. Lefogó ponthalmazok	12
2.3. Elemi becslések, mohó algoritmusok	15
2.4. Lineáris programozási módszer	17
2.5. A τ és $\tilde{\tau}$ paraméterek különbsége	22
2.6. τ -kritikus halmazrendszerek	24
2.7. Halmazrendszerek Kőnig-tulajdonsága	28
2.8. Normális hipergráfok	33
2.9. Halmazrendszerek Erdős-Pósa tulajdonsága	40
3. Halmazrendszerek színezése	43
3.1. Alapfogalmak	43
3.2. Uniform halmazrendszerek 2-színezhetősége.	44
4. Halmazrendszerek Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenziója.	53
4.1. Alapfogalmak	53
4.2. Az alaptétel	54
4.3. Végtelen halmazrendszerek és a Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió	58
4.4. Származtatott halmazrendszerek Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenziója	59
4.5. A Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió és a lefogási probléma	60
5. Halmazrendszerek diszkrepanciája	65
5.1. Alapfogalmak	65
5.2. A diszkrepancia becslése az alaphalmaz méretével és	

a halmazok számával	67
5.3. A diszkrepancia becslése a maximális fokszámmal	67
6. Extremális halmazrendszerek	69
6.1. Halmazrendszerekre vonatkozó extremális kérdések	69
6.2. Sperner-tétel	70
6.3. Sperner-tulajdonságú részbenrendezett halmazok	74
6.4. Erdős—Ko—Rado-tétel	79
6.5. Extremális kérdések metszet feltételekkel	80
6.6. Alkalmazások	86
6.7. Erdős-Rado tétel	91
7. A halmazrendszerekkel kapcsolatos problémák egymáshoz való viszonya	93
7.1. Halmazrendszerekre vonatkozó problémák	93
7.2. Halmazrendszerek kódolása	94
7.3. Relatív nehézség, redukció	95
7.4. Halmazrendszerekkel kapcsolatos problémák redukciói	96
7.5. Az $\mathcal{NP}$ problémaosztály, $\mathcal{NP}$ -teljesség.	101
7.6. Kiutak a nehezen kezelhető problémák megoldása esetén	102
8. Blokkrendszerek	105
8.1. Blokkrendszerek alapfogalmai	105
8.2. Steiner-rendszerek	107
8.3. Steiner-rendszerek elemi geometriai konstrukciói	108
8.4. Steiner-rendszerek rekurzív definíciói	111
8.5. Steiner-rendszerek számelméleti definíciói	114
8.6. Steiner-rendszerek alaptétele	115
8.7. Feloldható blokkrendszerek	115
8.8. Hadamard-mátrixok	119
8.9. Véges projektív síkok	126
8.10. Véges affin síkok	131
8.11. Optimalizálási problémák véges síkokra	136
8.12. Latinnégyzetek	145
8.13. Szimmetrikus blokkrendszerek	147
8.14. t -blokkrendszerek	152
9. Hibajavító kódok	155
9.1. A kódoláselmélet alapkérdései	155
9.2. Alapfogalmak	158
9.3. Kódok és halmazrendszerek, gráfelmélet kapcsolata	161
9.4. Kódok hatékonysága és hibajavítási paramétere	162
9.5. Lineáris kódok	166
9.6. Hibafelderítés és hibajavítás lineáris kódok esetén	170

9.7. Hamming-kódok	172
9.8. Hadamard-kódok	173
9.9. Ciklikus kódok	174
9.10. Reed—Muller-kódok	175
9.11. Lineáris kódok súlyszámláló polinomja	177
10. Matroidok	181
10.1. Történeti előzmények	181
10.2. Két alappélda és alapfogalmak	187
10.3. További példák	193
10.4. Ekvivalens definíciók	197
10.5. Megszorítás	203
10.6. Kontrakció	204
10.7. Minorok	207
10.8. Dualizálás	208
10.9. Direkt összeg	209
10.10. Homomorfizmus	212
10.11. Összeg	213
10.12. Metszet	215
10.13. Minimax tételek	216
10.14. Reprezentációelmélet	226
11. Geometriai halmazrendszerek	235
11.1. Példák geometriai halmazrendszerekre	235
11.2. Konvex geometriák	236
11.3. Lezárási operáció	238
11.4. Hámozási sorozatok	241
11.5. Konvex geometriai alapfogalmak	243
11.6. Geometriai optimalizálási problémák konvex geometriákban	246
11.7. Az Erdős-Szekeres-probléma	252
11.8. Greedoidok	253
11.9. Geometriai halmazrendszerek diszkrepanciája	254
12. Boole-függvények	259
12.1. Bevezetés	259
12.2. Döntési fa modell	260
12.3. Alsó becslések a döntési fa bonyolultságára	266
12.4. Elágazó programok	269
12.5. Alsó becslések az elágazó program bonyolultságára.	273
12.6. Kommunikációs bonyolultság	275
12.7. Alsó becslések a kommunikációs bonyolultságra	282
12.8. Formulák	285

12.9. Alsó becslések a formula bonyolultságra	292
12.10. Hálózatok	305
12.11. Approximációs módszer	308
12.12. Alsó becslések monoton hálózati bonyolultságra	309
13. Szimpliciális komplexusok	317
13.1. Alapfogalmak	317
13.2. Szimpliciális komplexusok kombinatorikus, geometriai és topológiai ekvivalenciája	321
13.3. Döntési fák és szimpliciális komplexusok	327
13.4. Szimpliciális komplexusok f -vektora	335
13.5. Szimpliciális komplexusok f -vektorainak karakterizációja, Katona—Kruskal tétel	339
13.6. Szimpliciális politop határa	344
13.7. Szimpliciális politop határának szép felépítése, h -vektor, Dehn—Sommerville-összefüggések	351
13.8. Szimpliciális politop határának f -vektora, felső becslés tétel	363
13.9. Szimpliciális politop határának f -vektora, alsó becslés tétel	366
13.10. Szimpliciális politop határának f -vektora, karakterizáció	368
Jelölések	371
Irodalomjegyzék	375