Párosítások gráfokban

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M-beli él.

• Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.

• k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.

• Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.

• Másképpen: M élhalmaz egy párosítás, ha nem tartalmaz hurokélet és semelyik két élének nincs közös végpontja.

• Szemléletesen: M élei párokat alakítanak ki a V csúcshalmaz bizonyos elemei között. Azaz M elemei/élei a párosítás párjai.

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M-beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.

- Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

Definíció

Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

- Nyilván csak páros pontszámú gráfban lehet teljes párosítás. A páratlan pontszám kizárja a teljes párosítás létezését. A páros pontszám nem garantálja a teljes párosítás létezését.

Bemelegítés

Példa

$\emptyset$ mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

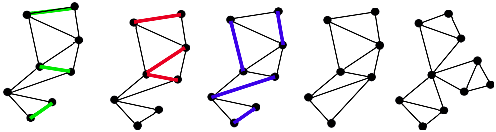
Ha M egy párosítás, akkor az M által párosított csúcsok száma $2|M|$. Azaz $2|M| \leq |V(G)|$. Azaz beláttuk, hogy

Észrevétel

Ha M egy párosítás, akkor

$$|M| \leq \frac{|V(G)|}{2}.$$

További példák



- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúcs) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúcs, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).
- A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$).
- A kék élek párosítást alkotnak, elemszámuk $4 = |V|/2$, azaz a kék élek teljes párosítást adnak.
- Az utolsó előtti gráfnak páratlan sok csúcsa van. Nem lehet benne teljes párosítás.

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban.

- A párosítások alapfeladata: Adott gráfban keressünk egy párosítást, amely mérete/elemszáma a lehető legnagyobb.

Definíció

$$\nu(G) = \max\{|M| \mid M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

- Azaz az alapfeladat egy új megfogalmazása: Adott G gráf esetén határozzuk meg/számítsuk ki $\nu(G)$-t.

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

• Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lceil n/2 \rceil$ élű párosítást adnak.

Példa: $n+1$ pontú/n élű csillag.

Legyen S_{n+1} az az $n+1$ pontú fa, amely egy speciális csúcsot (középpont) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz.

$$\nu(S_{n+1}) = 1.$$

• Bármelyik éle egy 1 elemű párosítást alkot.

• Viszont bármely két éle összefut, azaz egyik élpárja sem lesz párosítás.

További példák

Példa: Útgráfok

$$\nu(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

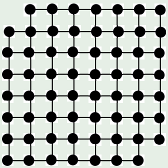
Példa: Kockagráf

$$\nu(H_3) = 4.$$

Egy feladat

Feladat

Határozzuk meg az alábbi gráfban a legnagyobb párosítás méretét:



• A fenti 62 csúcsú gráf ν paraméterének meghatározásának feladata középiskolások nyelvén is elmondható.

Vegyünk egy sakktáblát és két szemközti sarokmezőjét törjük le. Az így maradt 62 mezőre legfeljebb hány dominó helyezhető el úgy, hogy mindegyik dominó két szomszédos mezőt fedjen le és a dominók között ne legyen átfedés?

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.

- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).

- Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.

- A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el. Az egyensúly a két szín között felbomlott.

- Viszont minden dominó egy fehér és egy fekete színű mezőt fedhet le. Így a teljes fedés lehetetlen.

- Összefoglalva $\nu(G) = 30$.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

• Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:

(1) Mutatunk egy sok élű párosítást.

(2) Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást.

• Ebből az első rész próbálkozással, keresgéléssel általában megoldható.

• A másik azonban nehezebb: Az összes „nagy" élhalmazról állítjuk, hogy nem alkothat párosítást. Ennek indoklása matematikai ötleteket kíván.

• Két lehetőséget is mutatunk arra, hogy egy tetszőleges gráfban hogyan becsülhető felülről a párosítások mérete.

Szünet

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L-beli.

• $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.

• Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden v csúcsra $V(V) - \{v\}$ is lefogó.

• Nyilván minél kisebb lefogó ponthalmaz keresése az érdekes. Ez egy optimalizálási feladat.

Jelölés

$$\tau(G) = \min\{|L| : \ L \text{ lefogó csúcshalmaz}\}$$

Lefogó ponthalmazok „mesével”

• A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.

• Adott egy múzem. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók talákozási pontjai. Őrökkel szeretnénk védeni a múzeumot.

• Az őrök csúcsokba ültethetők/állíthatók, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzésük alatt tarthatják.

• Ha célunk úgy elhelyezni az őröket, hogy minden folyosó védve legyen, akkor egy lefogó ponthalmazt kell keresnünk.

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n-1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n-2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n-2$ elemű lefogó ponthalmaz.

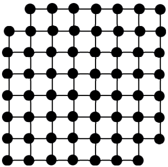
Példa: Csillaggráfok.

$$\tau(S_{n+1}) = 1.$$

- A középpont által álkotott egyelemű csúcshalmaz az összes élt lefogja.
- Az üreshalmaz csak az üresgráfban lefogó csúcshalmaz.

Újból egy feladat

Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



- Ismét gondoljunk a sakktáblára, illetve annak színezésére.

- Erre gondolhatunk mint a fenti gráf jó két-színezésére. A fenti gráf páros.

- A kisebb színosztály — mondjuk a 30 fehér mező — lefogó ponthalmazt alkot.

- A korábbi 30 elhelyezett dominó bizonyítja, hogy nincs 30-nál kisebb lefogó ponthalmaz.

A kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel

Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban: a párosítás éleinek legalább egyik végpontja L-beli. A párosítás mivolt miatt bámelyik végponttaé „oldjuk meg” egy párosításbeli él lefogását különböző csúcsokhoz kell jutnunk. Azaz tetszőleges lefogáshoz legalább $|M|$ csúcs kell.

Következmény

Tetszőleges G gráfra

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

A séma

• Tehát annak megmutására, hogy nincs $k+1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.

• Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5-t.

(i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).

(ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: A legkisebb lefogó ponthalmaz mérete 3, másképpen nincs 2-elemű lefogó ponthalmaz.

• Egy fontos gráfosztályra mágis is igaz a „teljesség”:

Kőnig Gyula tétele

Ha G páros gráf, akkor

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Szünet

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

• A két osztályra sokfélképpen hívatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobb oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.

• Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk. Ezt a páros gráfok lerajozlásánál is tükrözzük: a csúcsok egy vízszintes egyenes alá és fölé kerülnek. Összekötések csak az egyenesre vontakozólag „keresztbe” lesznek.

Példa

A korábbi feladataink 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt. Párosságát a sakktábla szokásos fehér/fekete színezése mutatja.

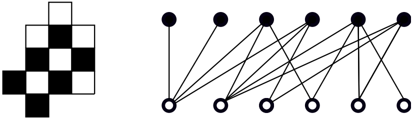
• A teljes párosítás hiányát az bizonyította, hogy a két színosztály különböző méretű volt ($30 + 32$).

• Igazából többet is mondhatunk. A nagyobb színosztály (ez esetünkben a fekete mezők voltak) összes eleme nem lehet párosítva.

• Valóban a 32 fekete mező párjai a 30 fehér mezőből kerülnek ki. Így legalább kettő fekete mező marad párosítatlan.

Egy másik példa

A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



• A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.

• Erre a tábla bal alsó sarka világít rá: Két fekete mező, ami egyetlen módon fedhető le, de ehhez közös fehér mező kell.

• Az ábra jobb oldalán a hat-hat mező páros gráfja szerepel.

• A fenti gráfban is elmondhatjuk a gondolatmenetet: A felső csúcsok közül az első kettő együttes szomszédsága egyetlen pont.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

• Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.

• A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.

• Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyikükkel legalább egyikük táncol.

• Tegyük fel, hogy a lista f fiút tartalmaz. Ha $\ell > f$, akkor nem tud minden lány egyszerre táncolni.

• Sőt már a kiválasztott ℓ lány sem táncolhat egyszerre.

• Sőt a kiválasztott lány közül legfeljebb f táncolhat egyszerre. Azaz minden pillanatban legalább $\ell - f$ lány hoppon marad (a fal mellöl nézheti a táncolókat).

Jelölések

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció

Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok). Legyen $K \subset A$ az alsó csúcsok egy részhalmaza. Legyen $N(K)$ a K-beli pontok szomszédainak uniója. Azaz $N(K)(\subset F)$ tartalmazza azokat a csúcsokat, amelyek valamely K-beli ponttal összekötöttek. Legyen

$$\delta(K) = |K| - |N(K)|.$$

Kőnig-akadály

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$.

Definíció: Kőnig-akadály

Egy K alsó csúcshalmazt (alsó) Kőnig-akadálynak nevezünk, ha $\delta(K) > 0$.

Egy Kőnig-akadály léte megakadályozza, hogy legyen az összes alsó csúcsot párosító párosítás. Sőt, K-ból legalább $\delta(K)$ darab csúcs párosítatlan marad bármilyen „okosan” párosítsunk (hisz a K-beli csúcsok párjai $N(K)$-ból kerülhetnek csak ki).

Észrevétel

Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. $K \subset A$ tetszőleges alsó csúcshalmaz és M egy tetszőleges párosítás. Ekkor

$$\delta(K) \leq |A| - |M|.$$

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k+1$-elemű párosítás.
- Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A|-k$-val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában.
- Valóban K egy bizonyíték, hogy minden M párosítás legalább $|A|-k$ darab alsó csúcsot párosítatlanul hagy. K megakadályozza, hogy legyen $k+1$-elemű párosítás.
- Ez a séma csak páros gráfokban mondható el. Páros gráfok között azonban teljes:

Kőnig Dénes tétele

Legyen $G(A,F)$ egy páros gráf. Ekkor

$$\min\{|A|-|M|:\ M \text{ párosítás}\} = \max\{\delta(K) : K \subset A\}.$$

Egy következmény

- Érdemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

Kónig Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

(i) G-ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.

(ii) G-ben nincs Kőnig-akadály.

- Kőnig Dénes több tételét is kimondtuk. Ezek bizonyítása nem egyszerű. Időhiány miatt ezeket az indoklásokat nem végezzük el.

- A párosításokról szóló részben főleg páros gráfokról volt szó. Minden kiterjeszthető az általános esetre is. Ez a kiterjesztés, azonban nem egyszerű. Idő hiánya miatt nem tárgyaljuk.

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.

(i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
(ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
(iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
(iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
(v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
(vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?
(vii) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e benne k elemű klikk?

- Ezek nem független fejtörők. A kombinatorikus kérdések fontos elméletet alkotnak és egyre fontosabb szerepet kapnak matematika versenyeken.
- Megemlítjük, hogy a párosítások témaköre is nagyon gazdag. Az alapkérdések teljességében, hatékonyan megválaszolhatók. Ugyanúgy mint az Euler-vonalak vagy összefüggőség esetében.
- Ezzel szemben a Hamilton-kör, színezések, lefogások, illetve klikkek alapkérdései a kombinatorika nagyon nehéz, kezelhetetlen problémái.

Köszönöm a figyelmet!