Euler-vonal

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

Kőnigsbergi hidak problémája

- Kőnigsberg belvárosának gráfjával már talákoztunk (az élek hidakat reprezentálnak). Tudjuk, hogy az ábrázolt városrész közkedvelt sétálóhely volt a városban.
- Tudjuk, hogy a hidak és szárazföldek rendszere leírható egy gráffal, a hétköznapi értelem vett séta megfelel a gáfelméleti séta fogalmának.
- Persze sok ilyen hely van/volt a világban. Kőnigsberg különösségét az adja, hogy a város lakói egy fejtőrőt fogalmaztak meg: Tervezzünk olyan sétát, amely során minden hídon átmegyünk, de csak egyszer.
- A „csak egyszer” feltétel ismerős. Már van rá gráfelméleti terminoológiánk: sétánk nem ismételhet élt, vonal.

Euler-vonal

- Az, hogy minden élen/hídon át is haladjunk az egy fontos feltétel. Erre is van terminológia.
- A fejtörő keménynek bizonyult a kőnigsbergi lakosoknak. Végül a probléma Eulerhez, a kor legnagyobb matematikusához is eljutott, aki megoldotta. Tiszteletére a fogalmat Euler-vonal néven nevezik.

Definíció

Egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

vonal a G gráfban egy *Euler-vonal*, ha

(i)

$$E(\mathcal{S}) = \{e_1, e_2, \ldots, e_\ell\} = E(G)$$

(ii)

$$V(\mathcal{S}) = \{v_0, v_1, \ldots, v_\ell\} = V(G).$$

Euler-vonal egyszerűen

- Szavakkal: Az Euler-vonal olyan séta, amely során minden élen pontosan egyszer haladunk át és minden csúcsot meglátogatunk.
- Euler-vonal keresése megfogalmazható egy óvodásnak is elmagyarázható fejtőrővel:
- Rajzoljuk le a gráfot fekete ceruzával. Adjuk az óvodásnak egy piros ceruzát és kérjük meg húzza át az ábrát úgy, hogy teljesen piros legyen. Az áthúzás során ne emelje fel a ceruzáját és már pirosra színezett részen ne haladjon át újra.
- Ha ezt egy kereszteződésből indulva megteszi, akkor ceruzája egy Euler-vonalat ír le.
- Ez az egyszerű fejtörő különben a modern technikával megvalósított fejtörő, mobil telefonokra letölthető.

Euler-vonal és összefüggőség

- Nyilván Euler-vonal létezéséhez szükséges, hogy gráfunk összefüggő legyen.
- Valóban ha egy gráfban van Euler-vonal, akkor abban bárhonnan bárhová elsétálhatunk (ez az összefüggőség fogalma): A tetszőlegesen választott kiinduló csúcs és célcsúcs ott van az Euler-vonalon (hisz minden csúcs ráesik) és így meghatároz egy szakaszt/szegmenst, ami az elérhetőség bizonyítéka.
- Kőnigsberg városának gráfja összefüggő. Az összefüggőség azonban nem elégséges feltétel Euler-vonal létezésére.

Mohó vonal-növelés

- Képzeljük magunkat az Euler-vonal kereső óvodás helyébe.
- Egyik csúcsra helyezi a ceruzáját és elkezdi a rajzolást. Igazából egy sétálásba kezd: A kiinduló csúcsra illeszkedő egyik élet kiválasztja áthalad rajta (bepirosozza), az új csúcsban egy olyan élet keres amit eddig nem járt be (még nem piros) és ezen továbbhalad. Azaz a sétálás során egy dologra vigyáz: a séta vonal legyen.

Definíció

Egy sétálást *mohó vonal-növelésnek* nevezünk, ha minden lépésnél az aktuális csúcsra illeszkedő élek közül csak olyanok közül választunk, amelyen eddig nem haladtunk át.

Megjegyzések

- Megjegyezzük, hogy sétálás esetén, ha kiinduló csúcsunkra illeszkedik él, akkor bárhány lépésig folytathatjuk sétánkat (egy élen oda-vissza lépegethetünk tetszőleges ideig).
- Mohó vonal-növelésnél szükséges, hogy a sétálás ne legyen folytatható bármeddig. Legfeljebb $|E(G)|$ lépés megtétele után elérünk egy olyan helyezetet, hogy az aktuális csúcsunkra illeszkedő minden élt bejártunk már, nem tudunk továbblépni. Ezt nevezzük *elakadának*.
- Egy vonal-növelés/sétálás végén gráfunk éleit kettéosztjuk. Lesznek bejárt élek és be nem járt élek.
- Legyen B az a gráf, amelyet az összes csúcs és a bejárt élek alkotnak. Legyen C az a gráfja melyet az összes csúcs és a be nem járt élek alkotnak.

Lemma

Végezzünk el egy mohó vonal-növelést elakadásig. legyen a a kiinduló csúcs, z az elakadás csúcsa. B a bejárt élek gráfja. Ekkor

(i) Legyen x egy a-tól és z-től különböző tetszőleges csúcs. Ekkor x foka B-ben ($d_B(x)$) páros.

(ii) Tegyük fel, hogy $x = a \neq z$. Ekkor $d_B(x)$ páratlan. Hasonlóan akkor is, ha $x = z \neq a$.

(iii) Tegyük fel, hogy $x = a = z$. Ekkor $d_B(x)$ páros.

A Lemma bizonyítása: (i)

- x minden meglátogatása a sétálásban egy-egy áthaladás.
- Az x-be lépés és x-ből kilépés egy-egy élen való áthaladás.
- A vonal mivolt miatt ez pontosan két különböző él, ami kettővel járul hozzá a $d_B(x)$ fokszámhoz.
- Szintén a vonal mivolt szerint a különböző hozzájárulásokat össze kell adni a bejárt élek szerinti fok kiszámolásához.
- Így a fok 2 tagok összege, azaz páros. (Ha egy csúcson nem haladunk át egyszer sem, akkor a „hozzájáulás" egy 0 tagú összeg, amely értéke 0, ami páros szám.)

A Lemma bizonyítása: (ii) és (iii)

(ii) esetén ugyanez a gondolatmenet adódik, de ekkor az egyik látogatás éppen a kiindulás, vagy leállás. Ez az egy látogatás 1 hozzájárulással rendelkezik a $d_B(x)$ fokszámhoz, a végösszeg pártalan lesz.

(iii) esetén x-nek lesz két különleges látogatása: kiindulás, leállás és a továbbiak áthaladások. A fokszám két darab 1-es és további 2-es hozzájárulásokból áll össze. Azaz páros lesz.

Következmény

Lemma másként

Legyen a egy tetszőleges kiinduló csúcs egy G gráfban. Indítsunk el a-ból egy mohó vonalnövelést és folytassuk elakadásig, amely helye legyen a z csúcs. Ekkor a következő két lehetőség közül az egyik áll fenn:

(i) A vonal záródó és B minden foka páros.

(ii) A vonal nem-záródó és a, z foka páratlan B-ben, míg a többi csúcs foka páros.

Egy következményt emelünk ki:

Következmény

Ha a egy páratlan fokú csúcs, akkor az elakadás csúcsa egy másik páratlan fokú csúcs.
Ha gráfunkban minden csúcs foka páros, akkor az elakadás csúcsa szükségszerűen a kiinduló csúcs.

A megoldás

A Lemmánk meg is oldja Kőnigsberg polgárainak problémáját:

- Tegyük fel, hogy van Euler-vonal a szóban forgó G gráfban. (Indirekt bizonyítás)
- Ekkor mohó vonalnövelésként járjuk be.
- B a teljes G gráf lesz, d_B a gráfbeli fok.
- Ha $a = z$ (záródó vonal), akkor minden fok páros. Ha $a \neq z$ (nem záródó vonal), akkor a és z foka pártalan minden más fok páros.
- A két esetnek megfelelően gráfunkban 0 vagy 2 páratlan fokú csúcs van.
- Kőnigsberg városát ábrázoló gráf mind a négy csúcsa páratlan fokú, így Euler-vonal létezése kizárt.

A megoldás egyszerűen

A gondolatmenet egyszerű, talán érdemes kikülszöbölni az észrevételre való formális hivatkozást:

- Tegyük fel, hogy Kőnigsberg polgárai találnak egy megfelelő vonalat. (Indirekt bizonyítás)
- Négy csúcsunk van így lesz olyan csúcs, ahol a sétálás során csak áthaladnak.
- Az ott összefutó páratlan sok hidat áthaladásokkal, azaz párossával vagy nem tudják bejárni vagy többszörös bejárást is végeznek. Ellentmondás.

Euler-akadály

Euler nem állt meg a fejtörő megoldásánál. minden gráfra megadta az Euler-vonal létének szükséges és elégséges feltételét

A fejtörő foglalhatjuk össze: Ha egy gráfban kettőnél több páratlan fokú csúcs van, akkor nem tartalmazhat Euler-vonalat. Ha egy gráfban kettőnél több páratlan fokú csúcs van, akkor az megakadályozza Euler-vonal létezését.

Definíció

Azt a helyzetet, amikor a páratlan fokú csúcsok száma meghaladja a kettőt *Euler-akadálynak* nevezhetjük.

Az akadályok pontosítása

A fejtörő tanulságát pontosabban is fogalmazhatunk.

1. Észrevétel

Záródó Euler-vonal létezésénél szükséges, hogy gráfunk minden foka páros legyen.
Azaz páratlan fokú csúcs megakadályozza záródó Euler-vonal létét.

2. Észrevétel

Nem-záródó Euler-vonal létezésénél szükséges, hogy gráfunkban pontosan két páratlan fokú csúcs legyen.
Azaz ha nem kettő páratlan fokú csúcsunk van a gráfban, akkor az megakadályozza NEM záródó Euler-vonal létét.

Ráadásul ekkor ennek a két páratlan fokú csúcsnak kell lennie a kiinduló/végső csúcsok párjának.

Euler-tétel

Euler tétele azt mondja ki, hogy a fent megtalált szükséges feltételek már elegendőek is Euler-vonal létezésére.

(Euler tétele)

(i) G-ben akkor és csak akkor van záródó Euler-vonal, ha összefüggő és minden foka páros.

(ii) G-ben akkor és csak akkor van nem-záródó Euler-vonal, ha összefüggő és pontosan két csúcsának foka páratlan. Ekkor minden Euler-vonal a két páratlan fokú csúcs között halad.

A tétel egyik iránya könnyű, a korábbiakban már indokoltuk is. A nehéz rész a feltételek mellett az Euler-vonal garantálása.

A két forma ekvivalenciája

Az (i) eset igazolásából könnyen adódik a (ii) eset is. Azaz, ha tudjuk az (i) állítást, akkor (ii) is egyszerűen adódik.

Valóban. Azt kell belátnunk, hogy egy összefüggő, pontosan két (mondjuk u és v) páratlan fokú csúccsal rendelkező gráfban van nem-záródó Euler-vonal.

Ehhez G-ben kössük össze u-t és v-t egy új éllel, legyen ez e^+. Legyen $\widehat{G}$ a kapott gráf. (Lehet, hogy egy korábbival párhuzamos élre volt szükségünk, de ez nem zavaró.)

$\widehat{G}$ egy összefüggő, csak páros fokú csúcsokkal rendelkező gráf. (i) szerint van benne ZÁRÓDÓ Euler-vonal.

Ez a gráf éleit körszerűen rendezi. A „körben” ott van e^+, amely u-t és v-t köti össze. Ebből könnyen látható egy $G = \widehat{G} - e^+$-beli nem záródó (u és v közötti) Euler-vonal.

Az alapötlet

Mi csak az (i) esetet bizonyítjuk. Az Euler-vonal létézésénél többet igazolunk. Adunk egy eljárást, amely egy csak páros fokú csúcsokat tartalmazó összefüggő gráfban talál egy Euler-vonalat. (Ilyenkor azt mondjuk, hogy bizonyításunk konstruktív.)

Az algoritmus leírásánál hivatkozunk a korábban már emlegetett óvodásra. Mit csinál az óvodás, ha egy feltételeket teljesítő gráfot kell pirosozni? Természetesen a mohó algoritmust hajtja végig. Sajnos előfordulhat, hogy elakad a vonal-növelése anélkül, hogy a teljes ábrát bejárta volna. Ekkor elkezd sírni. A megoldás lényege, hogy meg tudjuk vigasztalni őt. A következő algoritmus javítani/nagyobbítani fogja a részben lerajzolt/bejárt gráfot.

Javító algoritmus: Adott egy összefüggő G gráf, melynek minden foka páros.

- Legyen v egy tetszőleges csúcs. Indítsunk egy mohó vonalnövelést elakadásig$\to \mathcal{V}$. // A korábbiak alapján szükségszerű, hogy a kiinduló pontban akadjon el, $\mathcal{V}$ záródó.
- Ha a bejárt élek B gráfja (az óvodás piros éleinek gráfja) a teljes kiinduló gráf készen vagyunk.
  Ha nem, akkor legyen N a be nem járt élek (nemüres) gráfja. $//N$ minden foka páros. Valóban, az eredeti fok és a piros élekre vonatkozó (B-fok) különbsége adja ezt a fokot. Két páros szám különbsége is páros.
- Az összefüggőség miatt tudjuk, hogy lesz olyan x csúcs, ahol piros és nem piros él találkozik (B-beli és N-beli). Keressünk egy ilyen x csúcsot. (folyt. köv.)

A javító algoritmus vége

Ne feledkezzünk meg a síró óvodásről. Menjünk oda hozzás és kérdezzük meg, hogy rajzolt. Az x csúcsban állítsuk meg. Itt vezessük az N (eddig be nem járt részre a kezét) és megkérjük most csak ott rajzoljon. Tudjuk, hogy szükségszerűen x-ben akad el. Ekkor kérjük fejezze be eredeti rajzát. Lehet, hogy ez sem a sikeres átrajzolás, nem teljes a bepirosozás. De nagyobb részt pirosozott be.

Javító algoritmus (folytatás): Adott egy összefüggő G gráf, benne egy $\mathcal{V}$ záródó vonal, vele együtt egy be nem járt élek N gráfja, amelyben minden fok páros. Továbbá adott egy x csúcs $\mathcal{V}$-ről, amelyre illeszkedik N-beli él.

- x-ből indítsunk egy mohó vonal növelést$\to \mathcal{U}$ // A korábbiak alapján szükségszerű, hogy a kiinduló x pontban akadjon el, $\mathcal{U}$ záródó.
- Legyen $\widehat{\mathcal{V}}$ az a vonal, amely három szakszból áll: $\mathcal{V}$ eleje x-ig, majd jön $\mathcal{U}$, végül $\mathcal{V}$ vége x-től. (Miért is vonal $\widehat{\mathcal{V}}$?)

Az algoritmus

A javító algoritmus folytatása egy $\mathcal{V}$ záródó vonalból egy nagyobb/hosszabb $\widehat{\mathcal{V}}$ záródó vonalat „számol ki”. Ha $\widehat{\mathcal{V}}$ nem Euler-vonal, akkor hozzá is van egy alkalmas x csúcs (gráfunk összefüggő).

Definíció

A javító algoritmus második részét (a folytatást) *beszúró algoritmusnak nevezzük*.

Euler-algoritmus: Adott egy összefüggő G gráf, melynek minden foka páros.

- Legyen v egy tetszőleges csúcs. Indítsunk egy mohó vonalnövelést elakadásig$\rightarrow \mathcal{V}$.
- **Amíg** $\mathcal{V}$ nem Euler-vonal, **addig** $\mathcal{V} \leftarrow \widehat{\mathcal{V}}$, ahol $\widehat{\mathcal{V}}$ a beszúró algoritmus által kiszámolt záródó vonal.

Miért korekt ez?

Az algoritmusunk egy vonalat helyettesít egy másikkal és ezt a helyettesítést ismételgeti.

Biztos leáll? Ha igen, akkor tényleg készen vagyunk. A leállás csak egy Euler-vonal megtalálásával történhet.

Tétel

Az Euler-algoritmus garantáltan leáll és így egy Euler-vonalat számol ki.

A bizonyítás nagyon egyszerű: minden javítás növeli vonalunk hosszát. A gráfunk élszáma felső korlátot ad a gráfunk vonalainak hosszára. A hossz egy természetes szám, így a leállás szükségszerű.

Az algoritmusról szóló állítás KONSTRUKTÍVAN bizonyítja Euler tételét.

Köszönöm a figyelmet!