Komponensek

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

Elérhetőségi osztályok

Emlékeztető

- Egy V halmaz feletti ekvivalenciareláció esetén egyértelműen meghatározható egy osztályozása V-nek, hogy „relációban állni" pontosan azt jelentse, hogy „egy osztályhoz tartozni".
- A G gráfbeli $\sim$ elérhetőség egy ekvivalenciareláció V-n, egy gráf csúcshalmazán.

Tétel

Minden G gráf csúcshalmazának van egy egyértelmű osztályozása úgy, hogy egy osztályokból vett két csúcs között elérhetőség van, míg ha két különböző osztályból veszünk egy-egy csúcsot, akkor köztük nincs elérhetőség.

Definíció

Egy osztályt *elérhetőségi osztálynak* nevezünk. A csúcsok ezen osztályozását a gráf *komponens-osztályozásának* nevezzük.

Az elérhetőségi osztályok fontos tulajdonságai

(A) tulajdonság

Ha veszünk egy $O \subset V$ elérhetőségi osztályt, akkor tetszőleges két x és y csúcsa között elérhetőség van, amit egy séta reprezentálhat. Ennek a sétának minden csúcsa O-ba esik.

Valóban, az xy séta nem csak azt demonstrálja, hogy x-ből y-be el tudunk sétálni, hanem azt is hogy x-ből a séta bármely csúcsa elérhető. Így ők is ugyanabba az osztálya kell, hogy essenek.

(B) tulajdonság

Ha két különböző osztályból veszünk egy-egy csúcsot ($x \in O, x' \in O'$), akkor x és x' nem összekötött.

Valóban, egy $e = xx'$ él egy x, e, x' sétát adna, ami x-ből x' elérhetőségét igazolná, de ez a különböző osztályhoz tartozás miatt nem lehetséges.

További definíciók felé

Az (A) tulajdonság alapján egy G gráf elérhetőség relációja mögötti osztályozásában az egy osztályon belüli csúcsok között az elérhetőség nemcsak G-ben teljesül, hanem erősebben is: ha csak az osztály csúcsait vesszük figyelembe.

Élek elhagyása

Definíció

Legyen G egy gráf és e egy éle. $G - e$ a G gráfból az e él elhagyásával/törlésével nyert gráf. Ennek csúcshalmaza ugyanaz mint G-é, élhalmaza $E(G) - \{e\}$. Az illeszkedés pedig G-ből öröklődik: Azaz $f \in E(G) - \{e\}$ két végpontja megegyezik G-beli két végpontjával.

Ha a táblára rajzoljuk fel a G gráfot, benne az e éllel, akkor $G - e$-t úgy kapjuk meg, hogy letöröljük az e élt reprezetáló élgörbét és minden mást meghagyunk.

Csúcsok elhagyása

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. $G - v$ a G gráfból a v csúcs elhagyásával/törlésével nyert gráf. Ennek csúcshalmaza $V(G) - \{v\}$, élhalmazát G azon élei alkotják, amelyek nem illeszkednek v-re: $E(G - v) = E(G) - \{e \in E(G) : vIe\}$. Az illeszkedés pedig G-ből öröklődik.

Ha a táblára rajzoljuk fel a G gráfot, benne a v csúccsal, akkor $G - v$-t úgy kapjuk meg, hogy letöröljük a v csúcsot és a ráilleszkedő élgörbéket.

A részgráf fogalma

Definíció

R a G gráf részgráfja, ha R élek/csúcsok elhagyásával kapható G-ből. Jelölésben $R \subseteq G$.

Megjegyezzük, elképzelhető, hogy a megengedett elhagyásokkal nem élünk, azaz $G \subseteq G$. Ha ezt nem akarjuk megengedni, akkor valódi részgráfról beszélünk.

A feszített részgráf fogalma

Definíció

F a G gráf feszített részgráfja, ha F csúcsok elhagyásával kapható G-ből.

Könnyű látni, hogy a csúcsok elhagyásának sorrendje nem befolyásolja a végeredményként kapott gráfot. Így a megmaradt csúcsok M halmaza egyértelműen meghatározza a feszített részgráfot. Ennek jelölése $G|_M$.

Azt mondjuk $G|_M$ az M csúcshalmaz által feszített részgráfja G-nek.

A feszítő részgráf fogalma

Definíció

S a G gráf feszítő részgráfja, ha S élek elhagyásával kapható G-ből.

Az élelhagyás nem változtatja meg a csúcshalmazt. Így egy feszítő részgráf csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával. Igazából így is fogalmazhattunk volna: G egy feszítő részgráfja olyan részgráf, amely csúcshalmza tartalmazza G összes csúcsát.

Szünet

Összefüggő gráfok

Térjünk vissza az elérhetőség relációra és a mögötte lévő osztályozásra.

A csúcsok egy osztály legyen O. Ekkor $G|_O$ egy részfráfja G-nek. Az O-n kívüli csúcsokat elhagyjuk. O pontjai és a köztük lévő élek alkotják $G|_O$-t.

Az (A) megjegyzés szerint ebben a gráfban bárhonnan bárhová elérhetünk. Ez egy fontos tulajdonság.

Definíció

Egy gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet séta.

Komponensek

A $G|_O$ típusú részgráfok (O az elérhetőség reláció mögötti osztályozás egy tetszőleges osztálya) fontos részei/alkotói G-nek.

Definíció

G komponensei azok a részgráfjai, amelyeket úgy kaphatunk, hogy egy elérhetőségi osztály csúcsait veszünk a köztük haladó élekkel. Másképpen az osztályon kívüli össszes csúcsot elhagyjuk.

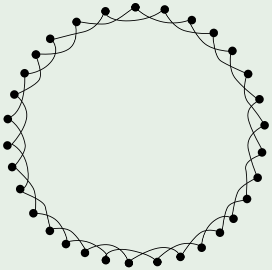
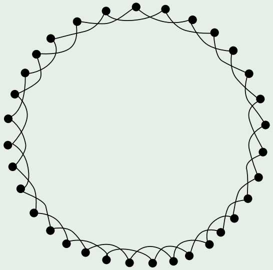
A fentiek alapján egy gráf minden komponense egy összefüggő gráf. Egy gráf pontosan akkor összefüggő, ha egyetlen komponense van. Két különböző komponens csúcsai között nem vezetnek élek (korábbi (B) tulajdonság).

Azt is mondhatjuk, hogy minden gráf lerajzolható úgy, hogy komponenseit lerajzoljuk függetlenül, majd jól elválasztva/szeparálva egymás mellé rajzoljuk őket.

Komponensek: példa/feladat

Feladat

Vegyünk fel n körszerűen rendezett csúcsot $(V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, a csúcsok indexeivel modulo n számolunk). Minden csúcsot kössünk össze a másodszomszédaival (v_i-nek két szomszédja van: v_{i-2} és v_{i+2}). Legyen G_n az így kapott gráf. Az alábbiakban két példát rajzoltunk fel két különböző n-re:

Határozzuk meg a G_n gráfok komponenseit.

A megoldás I

A két példagráf „szinte” ugyanúgy néz ki. Ennek ellenére struktúrájuk különböző. Könnyű látni, hogy n paritásától függ a válasz.

Ha n páros, akkor csúcsai sakktáblaszerűen/váltakozva kiszínezhetők két színnel. A körbeli sorrendben a két (mondjuk piros/kék) szín váltakozva következhet. Ekkor sétálva mindig másodszomszédra lépünk, de ez a szín megőrzését jelenti. Azaz különböző színű csúcsok között nincs elérhetőség.

Az azonos színű pontokat az élek egy körgráffá kötik össze, bármely két azonos színű csúcs között elérhetőség van. A komponens struktúra: a csúcshalmaz a sakktáblaszerű színezés két színosztálya szerint két csoportba van osztva. Mindkét komponens egy-egy körgráf.

A megoldás II

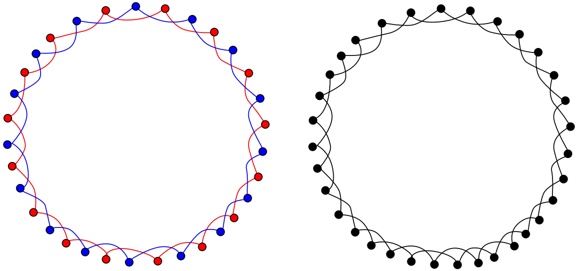
Ha n páratlan, akkor a fenti színezés nem létezik. Ebből még nem következtethetünk semmire. De az egy irányú másodszomszédokon lépegetve eljutunk egy körmentén szomszédos (ezért a gráfunkban nem összekötött) csúcshoz.

A forgásszimmetriára hivatkozva látható, hogy gráfunk összefüggő.

A megoldás vizualizálása

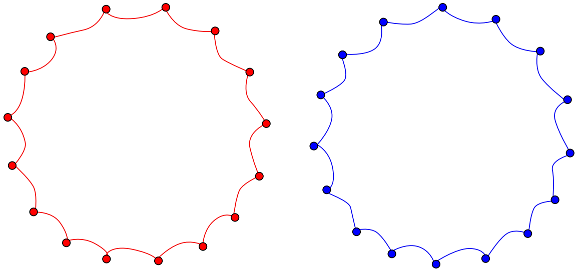
A korábbi két példánk bal oldali gráfja páros pontú, a jobb oldali pedig páratlan pontú.

Az alábbi ábrán az előző két példagráfot ismételjük meg, de a bal oldalin színekkel jelezzük a komponens-struktúrát.



A nem összefüggőség vizualizálása

A bal oldali gráf az alábbi módon is lerajzolható. Itt a két komponens látványosan felismerhető.



Az ilyen lerajzolás azonban előkészítést igényel. Gyakran gráfunk csak „oda van dobva”. Komponenseire való szétbontás nem egyszerű.

Komponensek

A fentiek alapján az összefüggő gráfok különösen fontos szerepet töltenek be a gráfelméletben.

Ha egy kérdést összefüggő gráfokra meg tudunk válaszolni, akkor a komponensekre adott válaszokból gyakran a teljes gráfra vonatkozó kérdésre összerakható a válasz.

Köszönöm a figyelmet!