Klikkek

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

Emlékeztető: klikkek

Emlékeztető: klikkek

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

Emlékeztető: klikkek

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

Az alapfogalommal kapcsolatos egy optimalizálási probléma:

Emlékeztető: klikkek

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

Az alapfogalommal kapcsolatos egy optimalizálási probléma:

Jelölés

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

Emlékeztető: klikkek

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

Az alapfogalommal kapcsolatos egy optimalizálási probléma:

Jelölés

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$$

Mi most egy másik szélsőérték kérdést vizsgálunk.

Turán Pál kérdése

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

- A kérdés megválaszolása két feladatot jelent:

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

- A kérdés megválaszolása két feladatot jelent:

(1) Az n pontú egyszerű gráfok közt meg kell adnunk egy sok élű gráfot, amely nem tartalmaz k elemű klikket.

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

- A kérdés megválaszolása két feladatot jelent:

(1) Az n pontú egyszerű gráfok közt meg kell adnunk egy sok élű gráfot, amely nem tartalmaz k elemű klikket.

(2) Majd be kell látnunk, hogy MINDEN ennél több élű gráf már szükségszerűen tartalmaz k elemű klikket.

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

- A kérdés megválaszolása két feladatot jelent:

(1) Az n pontú egyszerű gráfok közt meg kell adnunk egy sok élű gráfot, amely nem tartalmaz k elemű klikket.

(2) Majd be kell látnunk, hogy MINDEN ennél több élű gráf már szükségszerűen tartalmaz k elemű klikket. Vagy pedig igazolnunk kell hogy MINDEN olyan gráf, amely nem tartalmaz k elemű klikket annak élszáma felülről becsülhető a megkonstruált gráfunk élszámával.

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

- A kérdés megválaszolása két feladatot jelent:

(1) Az n pontú egyszerű gráfok közt meg kell adnunk egy sok élű gráfot, amely nem tartalmaz k elemű klikket.

(2) Majd be kell látnunk, hogy MINDEN ennél több élű gráf már szükségszerűen tartalmaz k elemű klikket. Vagy pedig igazolnunk kell hogy MINDEN olyan gráf, amely nem tartalmaz k elemű klikket annak élszáma felülről becsülhető a megkonstruált gráfunk élszámával.

- Az (1) egyetlen „konstrukciót” kíván. Gyakran ez nem olyan nehéz.

Turán Pál kérdése

Az alapkérdés

Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

- A kérdés megválaszolása két feladatot jelent:

(1) Az n pontú egyszerű gráfok közt meg kell adnunk egy sok élű gráfot, amely nem tartalmaz k elemű klikket.

(2) Majd be kell látnunk, hogy MINDEN ennél több élű gráf már szükségszerűen tartalmaz k elemű klikket. Vagy pedig igazolnunk kell hogy MINDEN olyan gráf, amely nem tartalmaz k elemű klikket annak élszáma felülről becsülhető a megkonstruált gráfunk élszámával.

- Az (1) egyetlen „konstrukciót” kíván. Gyakran ez nem olyan nehéz.
- (2) gráfok sokaságáról állít valamit.

r-részes gráfok

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva ($O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r$)

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

• Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

• Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

- Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket.
- Egy alternatív indoklás lehet a következő:

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

• Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket.

• Egy alternatív indoklás lehet a következő: Az r-részes gráfok r színezhetőek.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

• Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket.

• Egy alternatív indoklás lehet a következő: Az r-részes gráfok r színezhetőek. Így minden részgráfjuk is az.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

• Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket.

• Egy alternatív indoklás lehet a következő: Az r-részes gráfok r színezhetőek. Így minden részgráfjuk is az. Speciálisan nem lehet $r+1$ pontú teljes részgráfjuk.

r-részes gráfok

Definíció: r-részes gráfok.

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r)$ és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Észrevétel

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket.

• Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket.

• Egy alternatív indoklás lehet a következő: Az r-részes gráfok r színezhetőek. Így minden részgráfjuk is az. Speciálisan nem lehet $r+1$ pontú teljes részgráfjuk. Azaz nincs $r+1$ elemű klikk benne.

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazú r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket,

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazű r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat,

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazú r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat, teljeseket.

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazű r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat, teljeseket.

Definíció: Teljes r-részes gráfok

A teljes r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \ldots \dot\cup O_r)$ és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazú r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat, teljeseket.

Definíció: Teljes r-részes gráfok

A teljes r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1\dot{\cup}O_2\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}O_r)$ és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

• Azaz az osztályozás után, ha két csúcs sösszeköthető, akkor össze is kötjük őket.

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazú r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat, teljeseket.

Definíció: Teljes r-részes gráfok

A teljes r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \ldots \dot\cup O_r)$ és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

- Azaz az osztályozás után, ha két csúcs sösszeköthető, akkor össze is kötjük őket.
- Turán Pál első fontos problémája volt, hogy meghatározza, hogy a teljes r-részes gráfok között melyiknek van legtöbb éle.

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazú r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat, teljeseket.

Definíció: Teljes r-részes gráfok

A teljes r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \ldots \dot\cup O_r)$ és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

- Azaz az osztályozás után, ha két csúcs sösszeköthető, akkor össze is kötjük őket.
- Turán Pál első fontos problémája volt, hogy meghatározza, hogy a teljes r-részes gráfok között melyiknek van legtöbb éle. Vagyis: hogyan oszályozzuk a csúcsokat r részbe, hogy lehető legtöbb keresztél legyen?

Teljes r-részes gráfok

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az adott V csúcshalmazű r-részes gráfok közül kiemeljük a telítetteket, maximálisakat, teljeseket.

Definíció: Teljes r-részes gráfok

A teljes r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva $(O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \ldots \dot\cup O_r)$ és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

- Azaz az osztályozás után, ha két csúcs sösszeköthető, akkor össze is kötjük őket.
- Turán Pál első fontos problémája volt, hogy meghatározza, hogy a teljes r-részes gráfok között melyiknek van legtöbb éle. Vagyis: hogyan oszályozzuk a csúcsokat r részbe, hogy lehető legtöbb keresztél legyen?
- A válasz természetes: A csúcsok legegyenletesebb szétosztása

Egyenletes r-részes gráfok

Egyenletes r-részes gráfok

- A legegyenletesebb szétosztás fogalma magyarázatra szorul.

Egyenletes r-részes gráfok

- A legegyenletesebb szétosztás fogalma magyarázatra szorul.
- Ha $r|n = |V(G)|$, akkor a legegyenletesebb szétosztása pontjainknak r osztályba úgy történhet, hogy minden osztályba $\frac{n}{r}$ csúcs kerül.

Egyenletes r-részes gráfok

- A legegyenletesebb szétosztás fogalma magyarázatra szorul.
- Ha $r|n = |V(G)|$, akkor a legegyenletesebb szétosztása pontjainknak r osztályba úgy történhet, hogy minden osztályba $\frac{n}{r}$ csúcs kerül.
- Ha az oszthatóság nem teljesül, akkor nem követelhetjük meg az osztályok azonos méretűségét.

Egyenletes r-részes gráfok

- A legegyenletesebb szétosztás fogalma magyarázatra szorul.
- Ha $r|n = |V(G)|$, akkor a legegyenletesebb szétosztása pontjainknak r osztályba úgy történhet, hogy minden osztályba $\frac{n}{r}$ csúcs kerül.
- Ha az oszthatóság nem teljesül, akkor nem követelhetjük meg az osztályok azonos méretűségét.

Definíció: V egyenletes osztályozása.

V véges halmaz egy osztályozása egyenletes, ha bármély két osztály mérete legfeljebb egyben tér el.

Egyenletes r-részes gráfok

- A legegyenletesebb szétosztás fogalma magyarázatra szorul.
- Ha $r|n = |V(G)|$, akkor a legegyenletesebb szétosztása pontjainknak r osztályba úgy történhet, hogy minden osztályba $\frac{n}{r}$ csúcs kerül.
- Ha az oszthatóság nem teljesül, akkor nem követelhetjük meg az osztályok azonos méretűségét.

Definíció: V egyenletes osztályozása.

V véges halmaz egy osztályozása egyenletes, ha bármély két osztály mérete legfeljebb egyben tér el.

- Ha $r|n$, akkor a fenti definíció azt jelenti, hogy minden osztály ugyanakkora. (Miért?)

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Ha $k \nmid n$, akkor n/k — az átlagos osztályméret — nem egész szám,

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Ha $k \nmid n$, akkor n/k — az átlagos osztályméret — nem egész szám, két szomszédos egész közé ($\lfloor n/k \rfloor, \lceil n/k \rceil$) közé esik.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Ha $k \nmid n$, akkor n/k — az átlagos osztályméret — nem egész szám, két szomszédos egész közé $(\lfloor n/k \rfloor, \lceil n/k \rceil)$ közé esik.

• Sőt lennie kell olyan osztálynak amely mérete legfeljebb $\lfloor n/k \rfloor$, és olyannak is, amely mérete legalább $\lceil n/k \rceil$.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Ha $k \nmid n$, akkor n/k — az átlagos osztályméret — nem egész szám, két szomszédos egész közé $(\lfloor n/k \rfloor, \lceil n/k \rceil)$ közé esik.

• Sőt lennie kell olyan osztálynak amely mérete legfeljebb $\lfloor n/k \rfloor$, és olyannak is, amely mérete legalább $\lceil n/k \rceil$.

• Könnyen látható, ha lenne ettől a két számtól eltérő osztályméret, akkor lenne két osztály amely mérete legalább kettővel különbözne.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Ha $k \nmid n$, akkor n/k — az átlagos osztályméret — nem egész szám, két szomszédos egész közé $(\lfloor n/k \rfloor, \lceil n/k \rceil)$ közé esik.

• Sőt lennie kell olyan osztálynak amely mérete legfeljebb $\lfloor n/k \rfloor$, és olyannak is, amely mérete legalább $\lceil n/k \rceil$.

• Könnyen látható, ha lenne ettől a két számtól eltérő osztályméret, akkor lenne két osztály amely mérete legalább kettővel különbözne.

Egyenletes osztályozás (újra)

V egy r részes osztályozása egyenletes, ha mindegyik osztály mérete a $\{\lfloor n/r \rfloor, \lceil n/r \rceil\}$ halmazból kerül ki.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).
- Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).
- Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Egyenletes osztályozás (újra)

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).
- Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Egyenletes osztályozás (újra)

V egy n elemű ponthalmaz r-részes osztályozását akkor nevezzük egyenletesnek, ha

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).
- Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Egyenletes osztályozás (újra)

V egy n elemű ponthalmaz r-részes osztályozását akkor nevezzük egyenletesnek, ha

(i) q az n szám r-rel való maradékos osztásánál a maradék ($0 \leq q < r$),

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).
- Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Egyenletes osztályozás (újra)

V egy n elemű ponthalmaz r-részes osztályozását akkor nevezzük egyenletesnek, ha

(i) q az n szám r-rel való maradékos osztásánál a maradék ($0 \leq q < r$),

(ii) q darab osztály mérete $\lceil n/r \rceil$,

Egyenletes r-részes gráfok (folytatás)

- Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk” az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r - 1$ közötti szám.
- Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így ezek mérete $\lceil n/r \rceil$ lesz).
- Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Egyenletes osztályozás (újra)

V egy n elemű ponthalmaz r-részes osztályozását akkor nevezzük egyenletesnek, ha

(i) q az n szám r-rel való maradékos osztásánál a maradék ($0 \leq q < r$),

(ii) q darab osztály mérete $\lceil n/r \rceil$,

(iii) a maradék $r - q$ darab osztály mérete $\lfloor n/r \rfloor$.

Turán-gráfok

Turán-gráfok

Definíció

Az n pontú, r-részes $T_{n,r}$ Turán-gráf az az teljes r részes gráf, amely osztályai a fenti értelemben egyenletes méretűek.

Turán-gráfok

Definíció

Az n pontú, r-részes $T_{n,r}$ Turán-gráf az az teljes r részes gráf, amely osztályai a fenti értelemben egyenletes méretűek.

Feladat

Legyen T egy teljes r-részes gráf, amelyben van két osztály, amelyek közül az egyik legalább kettővel több csúcsot tartalmaz mint a másik. Az osztályozást változtassuk meg úgy, hogy a nagyobb osztályból egy csúcsot átteszünk a másikba. Az új osztályozás is definiált egy teljes r-részes gráfot. Igazoljuk, hogy a változtatás során nőtt az élszám.

Turán-gráfok

Definíció

Az n pontú, r-részes $T_{n,r}$ Turán-gráf az az teljes r részes gráf, amely osztályai a fenti értelemben egyenletes méretűek.

Feladat

Legyen T egy teljes r-részes gráf, amelyben van két osztály, amelyek közül az egyik legalább kettővel több csúcsot tartalmaz mint a másik. Az osztályozást változtassuk meg úgy, hogy a nagyobb osztályból egy csúcsot átteszünk a másikba. Az új osztályozás is definiált egy teljes r-részes gráfot. Igazoljuk, hogy a változtatás során nőtt az élszám.

Feladat

Igazoljuk, hogy az n pontú r részes gráfok között a Turán-gráfnak van legtöbb éle.

Turán-tétel, I. változat

Turán-tétel, I. változat

- Ezzel Turán Pál megtette az (1) konstrukciót a probléma megoldásában.

Turán-tétel, I. változat

- Ezzel Turán Pál megtette az (1) konstrukciót a probléma megoldásában.

- A további lépések nehezebbek voltak. Belátta, hogy semilyen más módszerrel nem adható megtöbb élű gráf, amely elkerül egy adott méretű klikket.

Turán-tétel, I. változat

- Ezzel Turán Pál megtette az (1) konstrukciót a probléma megoldásában.

- A további lépések nehezebbek voltak. Belátta, hogy semilyen más módszerrel nem adható megtöbb élű gráf, amely elkerül egy adott méretű klikket.

Turán-tétel

Ha G egy n pontú k elemű klikket nem tartalmazó egyszerű gráf, akkor

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

Turán-tétel, II. változat

Turán-tétel, II. változat

- A tétel egy másik alakja:

Turán-tétel, II. változat

- A tétel egy másik alakja:

Turán-tétel

Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amelyre

$$|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|,$$

akkor G tartalmaz k-elemű klikket.

$k = 2$ eset

$k = 2$ eset

- A $k = 2$ eset semmit mondó:

$k = 2$ eset

- A $k = 2$ eset semmit mondó:
- Az 1-részes Turán-gráf csúcsai egyetlen osztályba vannak sorolva.

$k = 2$ eset

- A $k = 2$ eset semmit mondó:

- Az 1-részes Turán-gráf csúcsai egyetlen osztályba vannak sorolva. Benne nem halad él, hiszen csak a különböző osztályok között vezet él.

$k = 2$ eset

- A $k = 2$ eset semmit mondó:

- Az 1-részes Turán-gráf csúcsai egyetlen osztályba vannak sorolva. Benne nem halad él, hiszen csak a különböző osztályok között vezet él. Azaz az 1-részes Turán-gráf az üres gráf.

$k = 2$ eset

- A $k = 2$ eset semmit mondó:

- Az 1-részes Turán-gráf csúcsai egyetlen osztályba vannak sorolva. Benne nem halad él, hiszen csak a különböző osztályok között vezet él. Azaz az 1-részes Turán-gráf az üres gráf.

- Az ennél több élet tartalmazó gráfban van él, így két elemű klikk is.

$k = 3$ eset, Mantel tétele

$k = 3$ eset, Mantel tétele

- A $k = 3$ eset már érdekes, nem egyszerű.

$k = 3$ eset, Mantel tétele

- A $k = 3$ eset már érdekes, nem egyszerű.
- Ezt jóval korábban a XX. század elején Mantel tűzte ki feladatként egy matematikai újságban.

$k = 3$ eset, Mantel tétele

- A $k = 3$ eset már érdekes, nem egyszerű.
- Ezt jóval korábban a XX. század elején Mantel tűzte ki feladatként egy matematikai újságban.
- Ezt a speciális esetet ma Mantel tételének nevezik.

Mantel-tétel

Ha G egy n pontú háromszöget nem tartalmazó egyszerű gráf, akkor

$$|E(G)| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = |E(T_{n,2})|.$$

Mantel-tételének bizonyítása

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.
- Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.
- Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.
- Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát.

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.
- Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.
- Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát. Legyen $M = V(G) - N$.

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.
- Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.
- Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát. Legyen $M = V(G) - N$. Ekkor nyilván $|N| = D$,

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.
- Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.
- Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát. Legyen $M = V(G) - N$. Ekkor nyilván $|N| = D$,$|M| = n - D$,

Mantel-tételének bizonyítása

- Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.
- Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.
- Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát. Legyen $M = V(G) - N$. Ekkor nyilván $|N| = D$,$|M| = n - D$,$v \in M$.

Mantel-tételének bizonyítása

• Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot.

• Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs.

• Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát. Legyen $M = V(G) - N$. Ekkor nyilván $|N| = D$,$|M| = n - D$,$v \in M$.

• Az eredeti $V(G)$ csúcshalmazon egy új gráfot, $\widetilde{G}$-t definiálunk: N és M között minden élt behúzunk.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

- Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak.

Bizonyítás (folytatás)

- Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak. Belátjuk, hogy minden csúcs $\widetilde{G}$-beli fokszáma legalább akkor mint G-beli foka.

Bizonyítás (folytatás)

• Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak. Belátjuk, hogy minden csúcs $\widetilde{G}$-beli fokszáma legalább akkor mint G-beli foka. Azaz minden $x \in V$ csúcs esetén

$$d_G(x) \leq d_{\widetilde{G}}(x).$$

Ha $x \in M$, akkor $d_{\widetilde{G}}(x) = |N| = D$, ami a G-beli maximális fokszám. Az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Bizonyítás (folytatás)

• Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak. Belátjuk, hogy minden csúcs $\widetilde{G}$-beli fokszáma legalább akkor mint G-beli foka. Azaz minden $x \in V$ csúcs esetén

$$d_G(x) \leq d_{\widetilde{G}}(x).$$

Ha $x \in M$, akkor $d_{\widetilde{G}}(x) = |N| = D$, ami a G-beli maximális fokszám. Az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

• Ha $x \in N$, akkor $\widetilde{G}$-ben x minden M-beli ponttal össze van kötve.

Bizonyítás (folytatás)

• Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak. Belátjuk, hogy minden csúcs $\widetilde{G}$-beli fokszáma legalább akkor mint G-beli foka. Azaz minden $x \in V$ csúcs esetén

$$d_G(x) \leq d_{\widetilde{G}}(x).$$

Ha $x \in M$, akkor $d_{\widetilde{G}}(x) = |N| = D$, ami a G-beli maximális fokszám. Az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

• Ha $x \in N$, akkor $\widetilde{G}$-ben x minden M-beli ponttal össze van kötve. Ugyanekkor G-ben legfeljebb az M-beli csúcsokkal lehet összekötve,

Bizonyítás (folytatás)

• Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak. Belátjuk, hogy minden csúcs $\widetilde{G}$-beli fokszáma legalább akkor mint G-beli foka. Azaz minden $x \in V$ csúcs esetén

$$d_G(x) \leq d_{\widetilde{G}}(x).$$

Ha $x \in M$, akkor $d_{\widetilde{G}}(x) = |N| = D$, ami a G-beli maximális fokszám. Az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

• Ha $x \in N$, akkor $\widetilde{G}$-ben x minden M-beli ponttal össze van kötve. Ugyanekkor G-ben legfeljebb az M-beli csúcsokkal lehet összekötve, hiszen más esetben az összekötés két végpontja és v egy háromszöget alkotna.

Bizonyítás vége

Bizonyítás vége

- Ezzel kaptuk, hogy $\widetilde{G}$-ben a fokok rendre legalább akkorák mint G-ben.

Bizonyítás vége

- Ezzel kaptuk, hogy $\widetilde{G}$-ben a fokok rendre legalább akkorák mint G-ben.
- Így az élszám is legalább akkora mint G-ben:

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})| = |N| \cdot |M| = D(n-D) \leq \left(\frac{D+(n-D)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

Bizonyítás vége

- Ezzel kaptuk, hogy $\widetilde{G}$-ben a fokok rendre legalább akkorák mint G-ben.
- Így az élszám is legalább akkora mint G-ben:

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})| = |N| \cdot |M| = D(n-D) \leq \left(\frac{D+(n-D)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

- Ebből az állítás nyilvánvaló.

Turán tételének bizonyításáról

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.
- Az eredeti bizonyítás alapján tudjuk, hogy

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})|,$$

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.
- Az eredeti bizonyítás alapján tudjuk, hogy

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})|,$$

továbbá $\widetilde{G}$ egy kétrészes gráf.

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.
- Az eredeti bizonyítás alapján tudjuk, hogy

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})|,$$

továbbá $\widetilde{G}$ egy kétrészes gráf.

- Láttuk, hogy ekkor élszáma legfeljebb $|E(T_{n,2})|$.

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.
- Az eredeti bizonyítás alapján tudjuk, hogy

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})|,$$

továbbá $\widetilde{G}$ egy kétrészes gráf.

- Láttuk, hogy ekkor élszáma legfeljebb $|E(T_{n,2})|$.
- A fenti okoskodás csupán kiküszöböli a korábbi gondolatainkra való hivatkozást.

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.
- Az eredeti bizonyítás alapján tudjuk, hogy

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})|,$$

továbbá $\widetilde{G}$ egy kétrészes gráf.

- Láttuk, hogy ekkor élszáma legfeljebb $|E(T_{n,2})|$.
- A fenti okoskodás csupán kiküszöböli a korábbi gondolatainkra való hivatkozást.
- A Turán-tétel általános igazolását nem végezzük el.

Turán tételének bizonyításáról

- A fenti bizonyítás egy alternatív befejezése lehet a következő.
- Az eredeti bizonyítás alapján tudjuk, hogy

$$|E(G)| \leq |E(\widetilde{G})|,$$

továbbá $\widetilde{G}$ egy kétrészes gráf.

- Láttuk, hogy ekkor élszáma legfeljebb $|E(T_{n,2})|$.
- A fenti okoskodás csupán kiküszöböli a korábbi gondolatainkra való hivatkozást.
- A Turán-tétel általános igazolását nem végezzük el. Megjegyezzük, hogy a Mantel-tétel bizonyításában használt ötletek alapján nem nehéz a feladat.

Extremális gráfelmélet

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál.

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.

- Tétele — többek között — a négy pontú teljes gráf „tiltása” mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak.

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.

- Tétele — többek között — a négy pontú teljes gráf „tiltása” mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak. A négy pontú teljes gráf felfogható mint a tetraéder gráfja.

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.

- Tétele — többek között — a négy pontú teljes gráf „tiltása” mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak. A négy pontú teljes gráf felfogható mint a tetraéder gráfja.

- Megkérdezte mi a helyzet, ha más szabályos testnek a gráfját tiltjuk.

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.
- Tétele — többek között — a négy pontú teljes gráf „tiltása” mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak. A négy pontú teljes gráf felfogható mint a tetraéder gráfja.
- Megkérdezte mi a helyzet, ha más szabályos testnek a gráfját tiltjuk.
- Speciálisan hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak ha nem tartalmazza a kocka gráfját mint részgráfot.

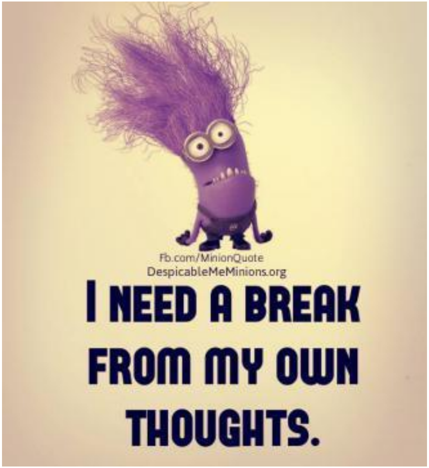
Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.
- Tétele — többek között — a négy pontú teljes gráf „tiltása” mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak. A négy pontú teljes gráf felfogható mint a tetraéder gráfja.
- Megkérdezte mi a helyzet, ha más szabályos testnek a gráfját tiltjuk.
- Speciálisan hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak ha nem tartalmazza a kocka gráfját mint részgráfot.
- Ez a kérdés a mai napig megválaszolatlan.

Extremális gráfelmélet

- Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel.
- Tétele — többek között — a négy pontú teljes gráf „tiltása” mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak. A négy pontú teljes gráf felfogható mint a tetraéder gráfja.
- Megkérdezte mi a helyzet, ha más szabályos testnek a gráfját tiltjuk.
- Speciálisan hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak ha nem tartalmazza a kocka gráfját mint részgráfot.
- Ez a kérdés a mai napig megválaszolatlan.
- Turán Pál tétele nagyon sok kutatást ösztönzött és segített. Az általa kialakított gráfelméleti ágat extremális gráfelméletnek nevezzük.

Szünet


Fb.com/MinionQuote
DespicableMeMinions.org
I NEED A BREAK
FROM MY OWN
THOUGHTS.

Egy fejtörő

Egy fejtörő

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

Egy fejtörő

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

Feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges hatfős társaságban található három ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

Egy fejtörő

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

Feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges hatfős társaságban található három ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

- A feladat zárójelbeli megjegyzése arra utal, hogy a társaság emberei között az ismeretséget egy egyszerú gráffal írhatjuk le.

Egy fejtörő

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

Feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges hatfős társaságban található három ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

- A feladat zárójelbeli megjegyzése arra utal, hogy a társaság emberei között az ismeretséget egy egyszerű gráffal írhatjuk le.
- Az ismeretséget leíró gráfban a csúcsok az emberek.

Egy fejtörő

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

Feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges hatfős társaságban található három ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

- A feladat zárójelbeli megjegyzése arra utal, hogy a társaság emberei között az ismeretséget egy egyszerű gráffal írhatjuk le.
- Az ismeretséget leíró gráfban a csúcsok az emberek.
- Két ember/csúcs pontosan akkor szomszédos/összekötött ha ismerik egymást.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak.

Három ember, akik páronként nem ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű független csúcshalmazt alkotnak.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak.

Három ember, akik páronként nem ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű független csúcshalmazt alkotnak.

Definíció: Független csúcshalmaz

Egy gráfban egy $F \subset V(G)$ csúcshalmaz független, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F-beli.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak.

Három ember, akik páronként nem ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű független csúcshalmazt alkotnak.

Definíció: Független csúcshalmaz

Egy gráfban egy $F \subset V(G)$ csúcshalmaz független, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F-beli.

- Egy csúcshalmaz akkor és csak akkor klikk, ha ugyanezen csúcshalmaz független a koplementer gráfban.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak.

Három ember, akik páronként nem ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű független csúcshalmazt alkotnak.

Definíció: Független csúcshalmaz

Egy gráfban egy $F \subset V(G)$ csúcshalmaz független, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F-beli.

- Egy csúcshalmaz akkor és csak akkor klikk, ha ugyanezen csúcshalmaz független a koplementer gráfban.

Definíció: Homogén halmaz

Egy H csúcshalmazt nevezzünk homogénnek, ha bármely két különböző eleme az összekötöttség szempontjából ugyanolyan.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

- A feladat „gráfelméleti lefordítására ” van más lehetőség is.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

• A feladat „gráfelméleti lefordítására ” van más lehetőség is.
• A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot öszekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.)

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

• A feladat „gráfelméleti lefordítására ” van más lehetőség is.
• A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot öszekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.)
• Az ismeretség/nem ismerős viszonyt most színekkel „kódoljuk”.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

• A feladat „gráfelméleti lefordítására " van más lehetőség is.
• A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot öszekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.)
• Az ismeretség/nem ismerős viszonyt most színekkel „kódoljuk".
• x-et és y-t összekötő élt kékre színezzük ha az x csúcs által reprezentált személy ismeri az y csúcs által reprezentált személyt.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

• A feladat „gráfelméleti lefordítására " van más lehetőség is.
• A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot öszekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.)
• Az ismeretség/nem ismerős viszonyt most színekkel „kódoljuk".
• x-et és y-t összekötő élt kékre színezzük ha az x csúcs által reprezentált személy ismeri az y csúcs által reprezentált személyt.
• Különben az összekötő él piros lesz. A társaság ismeretségi viszonyát egy piros/kék élszínezett teljes gráffal „kódoltuk".

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

• A feladat „gráfelméleti lefordítására ” van más lehetőség is.

• A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot öszekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.)

• Az ismeretség/nem ismerős viszonyt most színekkel „kódoljuk”.

• x-et és y-t összekötő élt kékre színezzük ha az x csúcs által reprezentált személy ismeri az y csúcs által reprezentált személyt.

• Különben az összekötő él piros lesz. A társaság ismeretségi viszonyát egy piros/kék élszínezett teljes gráffal „kódoltuk”.

• Ezek után az állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy: K_6 *tetszőleges piros/kék élszínezésében garantáltan található három olyan csúcs, amelyek között mindhárom él ugyanolyan színű (monokormatikus).*

A feladat megoldása

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.

A feladat megoldása

• Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
• A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.

A feladat megoldása

• Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
• A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
• A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többben.

A feladat megoldása

• Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
• A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
• A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többen.
• Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
- A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
- A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többen.
- Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
- Két esetet különböztetünk meg.

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
- A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
- A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többben.
- Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
- Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: J-n belül halad kék él.

A feladat megoldása

• Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
• A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
• A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többben.
• Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
• Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: J-n belül halad kék él.
   Legyen egy ilyen él az xy él.

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
- A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
- A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többen.
- Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
- Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: J-n belül halad kék él.
   Legyen egy ilyen él az xy él. Ekkor $\{v, x, y\}$ egy kék monokromatikus halmaz.

A feladat megoldása

• Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.

• A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.

• A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többben.

• Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.

• Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: J-n belül halad kék él.
   Legyen egy ilyen él az xy él. Ekkor $\{v, x, y\}$ egy kék monokromatikus halmaz.
2. eset: J-n belül nem halad kék él.

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
- A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
- A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többben.
- Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
- Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: J-n belül halad kék él.
   Legyen egy ilyen él az xy él. Ekkor $\{v, x, y\}$ egy kék monokromatikus halmaz.
2. eset: J-n belül nem halad kék él. Ekkor J egy piros monokromatikus halmaz.

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
- A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
- A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többen.
- Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
- Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: J-n belül halad kék él.
   Legyen egy ilyen él az xy él. Ekkor $\{v, x, y\}$ egy kék monokromatikus halmaz.
2. eset: J-n belül nem halad kék él. Ekkor J egy piros monokromatikus halmaz.

- Készen vagyunk.

Ramsey-tétel

Ramsey-tétel

- Frank Plumpton Ramsey (1903—1930) brit matematikus (jelentős filozófiai és közgazdaságtani munkássággal) bizonyította be az alábbi tételt:

Ramsey-tétel

- Frank Plumpton Ramsey (1903—1930) brit matematikus (jelentős filozófiai és közgazdaságtani munkássággal) bizonyította be az alábbi tételt:

Ramsey-tétel 1929, társaságos nyelvezet

Tetszőleges 4^k fős társaságban található k ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

Ramsey-tétel

- Frank Plumpton Ramsey (1903—1930) brit matematikus (jelentős filozófiai és közgazdaságtani munkássággal) bizonyította be az alábbi tételt:

Ramsey-tétel 1929, társaságos nyelvezet

Tetszőleges 4^k fős társaságban található k ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

Ramsey tétele 1929, színezéses nyelvezet

K_{4^k} éleit tetszőlegesen színezve piros/kékkel garantáltan található k csúcs, amelyek között haladó összes ($\binom{k}{2}$ darab) él ugyanolyan színű.

Ramsey-tétel

- Frank Plumpton Ramsey (1903—1930) brit matematikus (jelentős filozófiai és közgazdaságtani munkássággal) bizonyította be az alábbi tételt:

Ramsey-tétel 1929, társaságos nyelvezet

Tetszőleges 4^k fős társaságban található k ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

Ramsey tétele 1929, színezéses nyelvezet

K_{4^k} éleit tetszőlegesen színezve piros/kékkel garantáltan található k csúcs, amelyek között haladó összes ($\binom{k}{2}$ darab) él ugyanolyan színű.

Azaz a 4^k pontú teljes gráf minden piros/kék élszínezésében van k-elemű monokromatikus halmaz.

Ramsey-tétel bizonyítása

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.
- A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.

Ramsey-tétel bizonyítása

• Rendezzük sorba a csúcsokat.
• Válasszuk ki az első v csúcsot.
• A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.
• A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.
• A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket:

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.
- A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.
- A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket:
  - Az első túlélő u csúcsot kiválasztjuk (a már kiválasztott v mellé).

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.
- A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.
- A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket:
  - Az első túlélő u csúcsot kiválasztjuk (a már kiválasztott v mellé).
  - A többi túlélő csúcsot a hozzávezető él színétől függően két csoportba osztjuk.

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.
- A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.
- A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket:
  - Az első túlélő u csúcsot kiválasztjuk (a már kiválasztott v mellé).
  - A többi túlélő csúcsot a hozzávezető él színétől függően két csoportba osztjuk.
  - A többségi szomszédokat meghagyjuk, a többit eldobjuk.

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy.
- A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.
- A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket:
  - Az első túlélő u csúcsot kiválasztjuk (a már kiválasztott v mellé).
  - A többi túlélő csúcsot a hozzávezető él színétől függően két csoportba osztjuk.
  - A többségi szomszédokat meghagyjuk, a többit eldobjuk.
- Ezt ismételjük addig amíg a túlélő csúcsok elfogynak.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.
- Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus.

Bizonyítás (folytatás)

• Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.

• Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.
- Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék.

Bizonyítás (folytatás)

• Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.

• Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék.

• Azt tudjuk, hogy a sorrendben minden kiválasztott csúcsból a későbbi csúcsok felé haladó éle egyszínűek (vagy piros vagy kék).

Bizonyítás (folytatás)

• Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.

• Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék.

• Azt tudjuk, hogy a sorrendben minden kiválasztott csúcsból a későbbi csúcsok felé haladó éle egyszínűek (vagy piros vagy kék).

• A bizonyítás vége egyszerű. Minden kiválasztott csúcsra nézzük meg, hogy hátrafelé piros vagy kék él halad.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.
- Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék.
- Azt tudjuk, hogy a sorrendben minden kiválasztott csúcsból a későbbi csúcsok felé haladó éle egyszínűek (vagy piros vagy kék).
- A bizonyítás vége egyszerű. Minden kiválasztott csúcsra nézzük meg, hogy hátrafelé piros vagy kék él halad.
- Vegyük a többséget a két csúcskategória közül.

Bizonyítás (folytatás)

• Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.

• Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék.

• Azt tudjuk, hogy a sorrendben minden kiválasztott csúcsból a későbbi csúcsok felé haladó éle egyszínűek (vagy piros vagy kék).

• A bizonyítás vége egyszerű. Minden kiválasztott csúcsra nézzük meg, hogy hátrafelé piros vagy kék él halad.

• Vegyük a többséget a két csúcskategória közül. Ezek legalább k-an lesznek és nyilvánvalóan monokromatikus halmazt alkotnak.

Ramsey-számok

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.
- Megismétlem képlettel:

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.
- Megismétlem képlettel:

$$R(k) = \min\{S \in \mathbb{N} : K_S \text{ éleit tetszőlegesen piros/kék színekkel színezve garantáltan lesz } k \text{ csúcs, amelyek közt minden él ugyanolyan színű}\}.$$

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.
- Megismétlem képlettel:

$$R(k) = \min\{S \in \mathbb{N} : K_S \text{ éleit tetszőlegesen piros/kék színekkel színezve garantáltan lesz } k \text{ csúcs, amelyek közt minden él ugyanolyan színű}\}.$$

- A kiinduló feladat szerint $R(3) \leq 6$.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.
- Megismétlem képlettel:

$$R(k) = \min\{S \in \mathbb{N} : K_S \text{ éleit tetszőlegesen piros/kék színekkel színezve garantáltan lesz } k \text{ csúcs, amelyek közt minden él ugyanolyan színű}\}.$$

- A kiinduló feladat szerint $R(3) \leq 6$.
- Ramsey tétele szerint $R(k) \leq 4^k$.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.
- Megismétlem képlettel:

$$R(k) = \min\{S \in \mathbb{N} : K_S \text{ éleit tetszőlegesen piros/kék színekkel színezve garantáltan lesz } k \text{ csúcs, amelyek közt minden él ugyanolyan színű}\}.$$

- A kiinduló feladat szerint $R(3) \leq 6$.
- Ramsey tétele szerint $R(k) \leq 4^k$.
- Hiányoznak az alsó becslések.

Alsó becslések?

Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.

Alsó becslések?

• $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.

• Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.

Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.
- Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.
- Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.

Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.
- Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.
- Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.
- Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások?

Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.
- Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.
- Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.
- Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások? IGEN!

Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.
- Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.
- Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.
- Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások? IGEN! El tudunk ilyet képzelni?

Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.
- Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.
- Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.
- Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások? IGEN! El tudunk ilyet képzelni?
- Az álábbiakban először két konstruktív bizonyítást mutatok.

Alsó becslések?

• $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.

• Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.

• Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.

• Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások? IGEN! El tudunk ilyet képzelni?

• Az álábbiakban először két konstruktív bizonyítást mutatok. Tényleg mutatok,

Alsó becslések?

• $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.

• Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.

• Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.

• Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások? IGEN! El tudunk ilyet képzelni?

• Az álábbiakban először két konstruktív bizonyítást mutatok. Tényleg mutatok, nem írok semmit csak „láttatom” a konkrét színezéseket/konstrukciókat.

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

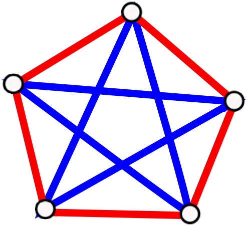
Lemma

$$R(3) > 5.$$

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

Lemma

$$R(3) > 5.$$



$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

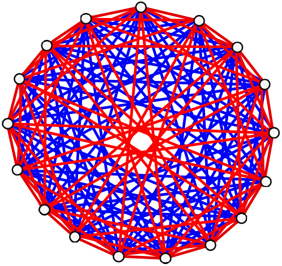
Tétel

$$R(4) > 17.$$

$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

Tétel

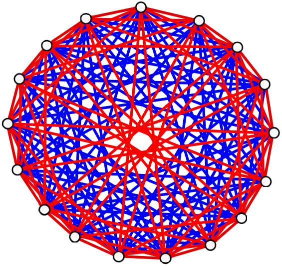
$$R(4) > 17.$$



$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

Tétel

$$R(4) > 17.$$



A csúcsok halmaza $Z_{17} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 16\}$. *ij* pontosan akkor piros, ha $i - j \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$, ahol a „számtan” a modulo 17 ($\mathbb{Z}_{17}$-beli aritmetika).

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk” az alsó becslést is.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk” az alsó becslést is.

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(4) = 18.$$

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk” az alsó becslést is.

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(4) = 18.$$

„Láttuk” az alsó becslést. A felső becslés (egy feladat egy 18 fős társaságról) nem nehéz.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk" az alsó becslést is.

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(4) = 18.$$

„Láttuk" az alsó becslést. A felső becslés (egy feladat egy 18 fős társaságról) nem nehéz. Előtte azonban oldjuk meg az alábbi feladatot.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk” az alsó becslést is.

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(4) = 18.$$

„Láttuk” az alsó becslést. A felső becslés (egy feladat egy 18 fős társaságról) nem nehéz. Előtte azonban oldjuk meg az alábbi feladatot.

Feladat

Egy 10 fős társaságban mindig találhatunk négy embert, akik páronként ismerik egymást vagy hármat, akik páronként nem ismerik egymást.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk" az alsó becslést is.

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(4) = 18.$$

„Láttuk" az alsó becslést. A felső becslés (egy feladat egy 18 fős társaságról) nem nehéz. Előtte azonban oldjuk meg az alábbi feladatot.

Feladat

Egy 10 fős társaságban mindig találhatunk négy embert, akik páronkánt ismerik egymást vagy hármat, akik páronként nem ismerik egymást. Igazoljuk, hogy 9 fős társaságra is igaz ugyanez.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük? II.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük? II.

- $R(5)$ értéke mind a mai napig nem ismert.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük? II.

- $R(5)$ értéke mind a mai napig nem ismert.
- Csak a $43 \leq R(5) \leq 49$ becsléseket tudjuk.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük? II.

- $R(5)$ értéke mind a mai napig nem ismert.
- Csak a $43 \leq R(5) \leq 49$ becsléseket tudjuk.
- Erdős „meséje”:

Melyik Ramsey-számokat ismerjük? II.

- $R(5)$ értéke mind a mai napig nem ismert.

- Csak a $43 \leq R(5) \leq 49$ becsléseket tudjuk.

- Erdős „meséje": „Ha az idegenek megtámadnának minket, és a Föld elpusztításával fenyegetőzve $R(5)$ értékét követelnénk tőlünk, még érdemes lenne minden erőnkkel, a számítógépeket is bevetve nekiesnünk a megoldásnak. $R(6)$-ot kiszámolni azonban már annyira reménytelen, hogy ha azt kérnék számon rajtunk, nem lenne más választásunk, mint fegyverrel harcolni ellenük."

Szünet

Erdős Pál alsó becslés módszere

Erdős Pál alsó becslés módszere

- Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

Erdős Pál alsó becslés módszere

- Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.
- Erdős Pál indoklása a következőképpen megy:

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt.

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.
• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot”.

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot". Ha a piros oldalára esik, akkor fessük az összekötő élt pirosra, ha a kék oldalára esik, akkor fessük kékre.

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot”. Ha a piros oldalára esik, akkor fessük az összekötő élt pirosra, ha a kék oldalára esik, akkor fessük kékre. Ha a véletlen színezésnél van esély arra, hogy ne legyen k elemű monokromatikus halmaz, akkor beláttuk az alsó becslést.

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot”. Ha a piros oldalára esik, akkor fessük az összekötő élt pirosra, ha a kék oldalára esik, akkor fessük kékre. Ha a véletlen színezésnél van esély arra, hogy ne legyen k elemű monokromatikus halmaz, akkor beláttuk az alsó becslést. ◦ Egy példán mutatjuk be módszerét.

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot”. Ha a piros oldalára esik, akkor fessük az összekötő élt pirosra, ha a kék oldalára esik, akkor fessük kékre. Ha a véletlen színezésnél van esély arra, hogy ne legyen k elemű monokromatikus halmaz, akkor beláttuk az alsó becslést. ◦ Egy példán mutatjuk be módszerét.

Tétel

$$R(20) > 1000.$$

Erdős Pál alsó becslés módszere

• Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.

• Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot". Ha a piros oldalára esik, akkor fessük az összekötő élt pirosra, ha a kék oldalára esik, akkor fessük kékre. Ha a véletlen színezésnél van esély arra, hogy ne legyen k elemű monokromatikus halmaz, akkor beláttuk az alsó becslést. ◦ Egy példán mutatjuk be módszerét.

Tétel

$$R(20) > 1000.$$

• Az egyszerűség kedvéért jó/rossz eseteket számolunk, kiküszöböljük a valószínűségszámítás nyelvezetét.

A bizonyítás

A bizonyítás

- Vegyünk fel egy 1000 elemű csúcshalmazt, mondjuk $V = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Legyen K a V csúcshalmazon definiált teljes gráf.

A bizonyítás

- Vegyünk fel egy 1000 elemű csúcshalmazt, mondjuk $V = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Legyen K a V csúcshalmazon definiált teljes gráf.
- Látnunk kellene, hogy az élek kiszínezhetők piros/kék színekkel, hogy ne legyen olyan 20 elemű csúcshalmaz, amelyen belül minden él ugyanolyan színű.

A bizonyítás

• Vegyünk fel egy 1000 elemű csúcshalmazt, mondjuk $V = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Legyen K a V csúcshalmazon definiált teljes gráf.
• Látnunk kellene, hogy az élek kiszínezhetők piros/kék színekkel, hogy ne legyen olyan 20 elemű csúcshalmaz, amelyen belül minden él ugyanolyan színű.
• A K teljes gráf piros/kék élszínezéseiből készítünk egy táblázatot. A táblázat sorai az összes lehetséges 20 elemű csúcshalmaznak felelnek meg. Egy R részhalmaz sorában élszínezések lesznek. Pontosan azok, amelyek R-en belül minden élt ugyanarra a színre színeznek.

A bizonyítás

- Vegyünk fel egy 1000 elemű csúcshalmazt, mondjuk $V = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Legyen K a V csúcshalmazon definiált teljes gráf.
- Látnunk kellene, hogy az élek kiszínezhetők piros/kék színekkel, hogy ne legyen olyan 20 elemű csúcshalmaz, amelyen belül minden él ugyanolyan színű.
- A K teljes gráf piros/kék élszínezéseiből készítünk egy táblázatot. A táblázat sorai az összes lehetséges 20 elemű csúcshalmaznak felelnek meg. Egy R részhalmaz sorában élszínezések lesznek. Pontosan azok, amelyek R-en belül minden élt ugyanarra a színre színeznek.
- Mekkora lesz táblázatunk?

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

- Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R-en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

• Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R-en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy

(1) az R-en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el.

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

• Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R-en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy

(1) az R-en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el. A színezést ezeken az éleken külön-külön egymástól függetlenül végezhetjük.

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

- Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R-en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy

(1) az R-en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el. A színezést ezeken az éleken külön-külön egymástól függetlenül végezhetjük. A lehetőségek száma $2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$.

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

• Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R-en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy

(1) az R-en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el. A színezést ezeken az éleken külön-külön egymástól függetlenül végezhetjük. A lehetőségek száma $2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}}$.

(2) Másrészt el kell döntenünk, hogy az R-en belüli élek közös színe mi legyen.

A táblázat

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

• Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R-en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy

(1) az R-en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el. A színezést ezeken az éleken külön-külön egymástól függetlenül végezhetjük. A lehetőségek száma $2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$.

(2) Másrészt el kell döntenünk, hogy az R-en belüli élek közös színe mi legyen. Erre két lehetőségünk van.

A bizonyítás terve

A bizonyítás terve

- A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}.$$

A bizonyítás terve

- A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}}.$$

- A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.

A bizonyítás terve

• A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}.$$

• A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.

• Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk.

A bizonyítás terve

- A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}.$$

- A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.
- Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk.
- Ez nyilvánvaló lesz, ha

A bizonyítás terve

- A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb
$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}.$$
- A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.
- Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk.
- Ez nyilvánvaló lesz, ha
$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}} < 2^{\binom{1000}{2}}.$$

A bizonyítás terve

• A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}.$$

• A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.

• Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk.

• Ez nyilvánvaló lesz, ha

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}} < 2^{\binom{1000}{2}}.$$

Azaz táblázatunk listája nem tartalmaz annyi elemet mint kiinduló teljes gráfunk összes élszínezése.

A bizonyítás terve

- A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}.$$

- A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.
- Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk.
- Ez nyilvánvaló lesz, ha

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}} < 2^{\binom{1000}{2}}.$$

Azaz táblázatunk listája nem tartalmaz annyi elemet mint kiinduló teljes gráfunk összes élszínezése.

- Biztosak lehetünk a táblázatban nem szereplő színezés létezésében, annak ellenére hogy ilyet nem látunk (maga a táblázat is felrajzolhatatlan, áttekinthetetlenül hatalmas).

A számolás

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.
- A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.
- A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

- A bal oldalon szereplő binomiális együttható becslése egyszerű:

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.
- A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

- A bal oldalon szereplő binomiális együttható becslése egyszerű:

$$\binom{1000}{20} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 981}{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 1} <$$

$$\frac{1024 \cdot 1024 \cdot \ldots \cdot 1024}{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(2^{10})^{20}}{(2^4)^5} = 2^{200-20} = 2^{180},$$

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.
- A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

- A bal oldalon szereplő binomiális együttható becslése egyszerű:

$$\binom{1000}{20} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 981}{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 1} <$$
$$\frac{1024 \cdot 1024 \cdot \ldots \cdot 1024}{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(2^{10})^{20}}{(2^4)^5} = 2^{200-20} = 2^{180},$$

ahol a számláló összes tényezőjét (a legkézenfekvőbb kettő hatvánnyal) felülről becsültük, míg a nevező első öt tényezőjét alúlról becsültük 16-tal, a többit pedig 1-gyel.

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.
- A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

- A bal oldalon szereplő binomiális együttható becslése egyszerű:

$$\binom{1000}{20} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 981}{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 1} <$$
$$\frac{1024 \cdot 1024 \cdot \ldots \cdot 1024}{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(2^{10})^{20}}{(2^4)^5} = 2^{200-20} = 2^{180},$$

ahol a számláló összes tényezőjét (a legkézenfekvőbb kettő hatvánnyal) felülről becsültük, míg a nevező első öt tényezőjét alúlról becsültük 16-tal, a többit pedig 1-gyel.

- A tétel adódik.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén

- Legyen γ egy véletlen piros/kék élszínezése K-nak uniform eloszlással (mindegyik lehetséges színezés ugyanolyan valószínűségű).

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén

- Legyen γ egy véletlen piros/kék élszínezése K-nak uniform eloszlással (mindegyik lehetséges színezés ugyanolyan valószínűségű).
- Legyen M_R az az esemény, hogy egy R 20-elemű csúcshalmazt γ monokormatikusan színez.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén

• Legyen γ egy véletlen piros/kék élszínezése K-nak uniform eloszlással (mindegyik lehetséges színezés ugyanolyan valószínűségű).

• Legyen M_R az az esemény, hogy egy R 20-elemű csúcshalmazt γ monokormatikusan színez.

• Legyen M az az esemény, hogy γ valamelyik 20-elemű csúcshalmazt monokromatikusan színezi. Azaz

$$M = \cup_{R:R\subset V,|R|=20} M_R.$$

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén

- Legyen γ egy véletlen piros/kék élszínezése K-nak uniform eloszlással (mindegyik lehetséges színezés ugyanolyan valószínűségű).
- Legyen M_R az az esemény, hogy egy R 20-elemű csúcshalmazt γ monokormatikusan színez.
- Legyen M az az esemény, hogy γ valamelyik 20-elemű csúcshalmazt monokromatikusan színezi. Azaz

$$M = \cup_{R:R\subset V,|R|=20} M_R.$$

- Így nyilván

$$\mathbb{P}r[M] \leq \sum_{R:R\subset V,|R|=20} \mathbb{P}r[M_R].$$

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos,

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

- Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

- Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.
- Ezt kellett igazolnunk.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

- Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.
- Ezt kellett igazolnunk.

$\star$

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.
- Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.
- Ezt kellett igazolnunk.

$\star$

- A nyelv változtatása nem tűnik jelentősnek.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

• A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

• Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.

• Ezt kellett igazolnunk.

$\star$

• A nyelv változtatása nem tűnik jelentősnek. Első látásra idegen is lehet.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

• A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

• Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.

• Ezt kellett igazolnunk.

$\star$

• A nyelv változtatása nem tűnik jelentősnek. Első látásra idegen is lehet.

• Az új nyelv azonban a kombinatorika egyik legfontosabb módszerét alapozta meg: a valószínűségszámítási módszerét.

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége

- A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására.

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége

- A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására. A valószínűségszámítás fontos, kikerülhetetlen eszközzé vált.

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége

- A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására. A valószínűségszámítás fontos, kikerülhetetlen eszközzé vált. Ebben Erdős Pálnak központi szerepe volt.

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége

• A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására. A valószínűségszámítás fontos, kikerülhetetlen eszközzé vált. Ebben Erdős Pálnak központi szerepe volt.

• Végül (a számolások mellékelése nélkül) megemlítjük, hogy a módszer általában milyen becslést ad:

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége

- A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására. A valószínűségszámítás fontos, kikerülhetetlen eszközzé vált. Ebben Erdős Pálnak központi szerepe volt.
- Végül (a számolások mellékelése nélkül) megemlítjük, hogy a módszer általában milyen becslést ad:

Erdős Pál tétele 1947

Ha $k \geq 2$, akkor

$$R(k) \geq (\sqrt{2})^k.$$

Összegzés

Összegzés

- Ramsey és Erdős tétele összegezve

Összegzés

- Ramsey és Erdős tétele összegezve

$$(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k.$$

Összegzés

- Ramsey és Erdős tétele összegezve

$$(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k.$$

- A becslések közel 70 éve ismertek és élesítésük központi probléma. Ennek ellenére az exponenciális becslések alapjain mind a mai napig nem sikerült javítani.

Összegzés

- Ramsey és Erdős tétele összegezve

$$(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k.$$

- A becslések közel 70 éve ismertek és élesítésük központi probléma. Ennek ellenére az exponenciális becslések alapjain mind a mai napig nem sikerült javítani.
- Egy élesítést megemlítek:

Erdős—Szekeres-tétel

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

Összegzés

- Ramsey és Erdős tétele összegezve

$$(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k.$$

- A becslések közel 70 éve ismertek és élesítésük központi probléma. Ennek ellenére az exponenciális becslések alapjain mind a mai napig nem sikerült javítani.
- Egy élesítést megemlítek:

Erdős—Szekeres-tétel

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

- Ez a becslés $k = 3$ esetén már a 6-ot adja felső becslésként (ahogy a kiinduló feladat). Azonban nagy k esetén sem éri el a $3{,}9999999^k$-típusú javítást.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!