

Párosítások gráfokban

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

A definíció

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik.

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.
- k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.
- k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.
- Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.
- k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.
- Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.
- Másképpen: M élhalmaz egy párosítás, ha nem tartalmaz hurokélet és semelyik két élének nincs közös végpontja.

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.
- k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.
- Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.
- Másképpen: M élhalmaz egy párosítás, ha nem tartalmaz hurokélet és semelyik két élének nincs közös végpontja.
- Szemléletesen:

A definíció

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M -beli él.

- Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. $\{e\}$ akkor és csak akkor párosítás, ha az e él nem hurokél.
- k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.
- Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.
- Másképpen: M élhalmaz egy párosítás, ha nem tartalmaz hurokélet és semelyik két élének nincs közös végpontja.
- Szemléletesen: M élei párokat alakítanak ki a V csúcshalmaz bizonyos elemei között. Azaz M elemei/élei a párosítás párjai.

Teljes párosítás

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M -beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M -beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.
- Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M -beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.
- Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

Definíció

Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M -beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.
- Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

Definíció

Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

- Nyilván csak páros pontszámú gráfban lehet teljes párosítás.

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M -beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.
- Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

Definíció

Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

- Nyilván csak páros pontszámú gráfban lehet teljes párosítás. A páratlan pontszám kizárja a teljes párosítás létezését.

Teljes párosítás

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M -beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) *párosított pontoknak* nevezzük.
- Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

Definíció

Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

- Nyilván csak páros pontszámú gráfban lehet teljes párosítás. A páratlan pontszám kizárja a teljes párosítás létezését. A páros pontszám nem garantálja a teljes párosítás létezését.

Bemelegítés

Bemelegítés

Példa

\emptyset mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Bemelegítés

Példa

\emptyset mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Bemelegítés

Példa

\emptyset mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Ha M egy párosítás, akkor az M által párosított csúcsok száma $2|M|$.

Bemelegítés

Példa

\emptyset mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Ha M egy párosítás, akkor az M által párosított csúcsok száma $2|M|$. Azaz $2|M| \leq |V(G)|$.

Bemelegítés

Példa

\emptyset mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Ha M egy párosítás, akkor az M által párosított csúcsok száma $2|M|$. Azaz $2|M| \leq |V(G)|$. Azaz beláttuk, hogy

Bemelegítés

Példa

\emptyset mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Ha M egy párosítás, akkor az M által párosított csúcsok száma $2|M|$. Azaz $2|M| \leq |V(G)|$. Azaz beláttuk, hogy

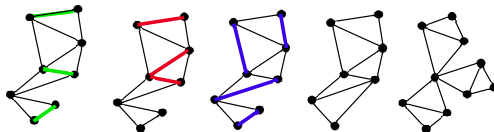
Észrevétel

Ha M egy párosítás, akkor

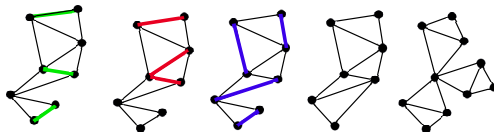
$$|M| \leq \frac{|V(G)|}{2}.$$

További példák

További példák

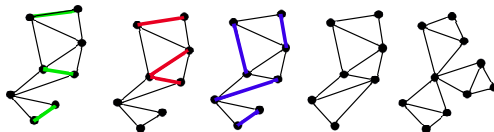


További példák



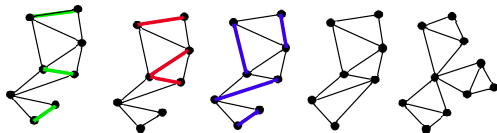
- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúcs) az első gráfban.

További példák



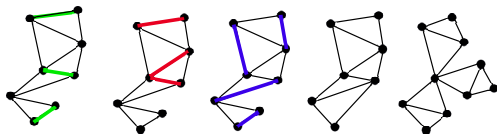
- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúcs) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúcs, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).

További példák



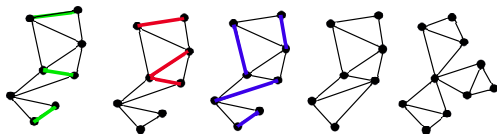
- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúc) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúc, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).
- A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$).

További példák



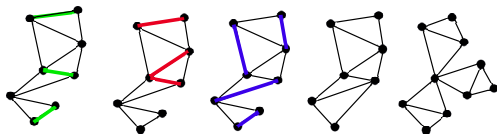
- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúc) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúc, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).
- A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$).
- A kék élek párosítást alkotnak, elemszámuk $4 = |V|/2$, azaz a kék élek teljes párosítást adnak.

További példák



- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúcs) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúcs, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).
- A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$).
- A kék élek párosítást alkotnak, elemszámuk $4 = |V|/2$, azaz a kék élek teljes párosítást adnak.
- Az utolsó előtti gráfnak páratlan sok csúcsa van.

További példák



- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúc) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúc, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).
- A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$).
- A kék élek párosítást alkotnak, elemszámuk $4 = |V|/2$, azaz a kék élek teljes párosítást adnak.
- Az utolsó előtti gráfnak páratlan sok csúcsa van. Nem lehet benne teljes párosítás.

Optimalizálás

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni.

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban.

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban.
- A párosítások alapfeladata: Adott gráfban keressünk egy párosítást, amely mérete/elemszáma a lehető legnagyobb.

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban.
- A párosítások alapfeladata: Adott gráfban keressünk egy párosítást, amely mérete/elemszáma a lehető legnagyobb.

Definíció

$$\nu(G) = \max\{|M| \mid M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban.
- A párosítások alapfeladata: Adott gráfban keressünk egy párosítást, amely mérete/elemszáma a lehető legnagyobb.

Definíció

$$\nu(G) = \max\{|M| \mid M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

- Azaz az alapfeladat egy új megfogalmazása: Adott G gráf esetén határozzuk meg/számítsuk ki $\nu(G)$ -t.

Példák

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket.

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcst, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lceil n/2 \rceil$ élű párosítást adnak.

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lceil n/2 \rceil$ élű párosítást adnak.

Példa: $n + 1$ pontú/ n élű csillag.

Legyen S_{n+1} az az $n + 1$ pontú fa, amely egy speciális csúcsot (központ) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz.

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcst, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lfloor n/2 \rfloor$ élű párosítást adnak.

Példa: $n + 1$ pontú/ n élű csillag.

Legyen S_{n+1} az az $n + 1$ pontú fa, amely egy speciális csúcst (középpont) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz.

$$\nu(S_{n+1}) = 1.$$

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lfloor n/2 \rfloor$ élű párosítást adnak.

Példa: $n + 1$ pontú/ n élű csillag.

Legyen S_{n+1} az az $n + 1$ pontú fa, amely egy speciális csúcsot (központ) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz.

$$\nu(S_{n+1}) = 1.$$

- Bármelyik éle egy 1 elemű párosítást alkot.

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lceil n/2 \rceil$ élű párosítást adnak.

Példa: $n + 1$ pontú/ n élű csillag.

Legyen S_{n+1} az az $n + 1$ pontú fa, amely egy speciális csúcsot (központ) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz.

$$\nu(S_{n+1}) = 1.$$

- Bármelyik éle egy 1 elemű párosítást alkot.
- Viszont bármely két éle összefut, azaz egyik élpárja sem lesz párosítás.

További példák

További példák

Példa: Útgráfok

További példák

Példa: Útgráfok

$$\nu(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

További példák

Példa: Útgráfok

$$\nu(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Példa: Kockagráf

További példák

Példa: Útgráfok

$$\nu(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Példa: Kockagráf

$$\nu(H_3) = 4.$$

Egy feladat

Egy feladat

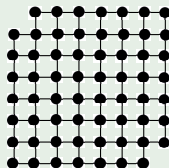
Feladat

Határozzuk meg az alábbi gráfban a legnagyobb párosítás méretét:

Egy feladat

Feladat

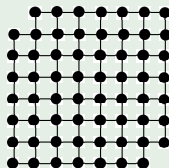
Határozzuk meg az alábbi gráfban a legnagyobb párosítás méretét:



Egy feladat

Feladat

Határozzuk meg az alábbi gráfban a legnagyobb párosítás méretét:



- A fenti 62 csúcsú gráf ν paraméterének meghatározásának feladata középiskolások nyelvén is elmondható.

Vegyünk egy sakktáblát és két szemközti sarokmezőjét törjük le. Az így maradt 62 mezőre legfeljebb hány dominó helyezhető el úgy, hogy mindegyik dominó két szomszédos mezőt fedjen le és a dominók között ne legyen átfedés?

A feladat megoldása

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).
- Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).
- Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.
- A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).
- Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.
- A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el. Az egyensúly a két szín között felbomlott.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).
- Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.
- A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el. Az egyensúly a két szín között felbomlott.
- Viszont minden dominó egy fehér és egy fekete színű mezőt fedhet le.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).
- Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.
- A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el. Az egyensúly a két szín között felbomlott.
- Viszont minden dominó egy fehér és egy fekete színű mezőt fedhet le. Így a teljes fedés lehetetlen.

A feladat megoldása

- Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető. A fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$.
- A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$).
- Ehhez a sakktabla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel.
- A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el. Az egyensúly a két szín között felbomlott.
- Viszont minden dominó egy fehér és egy fekete színű mezőt fedhet le. Így a teljes fedés lehetetlen.
- Összefoglalva $\nu(G) = 30$.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:
 - (1) Mutatunk egy sok élű párosítást.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:
 - (1) Mutatunk egy sok élű párosítást.
 - (2) Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:
 - (1) Mutatunk egy sok élű párosítást.
 - (2) Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást.
- Ebből az első rész próbálkozással, keresgéeléssel általában megoldható.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:
 - (1) Mutatunk egy sok élű párosítást.
 - (2) Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást.
- Ebből az első rész próbálkozással, keresgéeléssel általában megoldható.
- A másik azonban nehezebb: Az összes „nagy” élhalmazról állítjuk, hogy nem alkothat párosítást.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:
 - (1) Mutatunk egy sok élű párosítást.
 - (2) Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást.
- Ebből az első rész próbálkozással, keresgéeléssel általában megoldható.
- A másik azonban nehezebb: Az összes „nagy” élhalmazról állítjuk, hogy nem alkothat párosítást. Ennek indoklása matematikai ötleteket kíván.

Hány feladat egy adott G gráf ν paraméterének meghatározása

- Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll:
 - (1) Mutatunk egy sok élű párosítást.
 - (2) Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást.
- Ebből az első rész próbálkozással, keresgéléssel általában megoldható.
- A másik azonban nehezebb: Az összes „nagy” élhalmazról állítjuk, hogy nem alkothat párosítást. Ennek indoklása matematikai ötleteket kíván.
- Két lehetőséget is mutatunk arra, hogy egy tetszőleges gráfban hogyan becsülhető felülről a párosítások mérete.

Szünet



Lefogó ponthalmazok definíciója

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.

- $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.

- $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.
- Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden v csúcsra $V(G) - \{v\}$ is lefogó.

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.

- $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.
- Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden v csúcsra $V(G) - \{v\}$ is lefogó.
- Nyilván minél kisebb lefogó ponthalmaz keresése az érdekes.

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.

- $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.
- Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden v csúcsra $V(G) - \{v\}$ is lefogó.
- Nyilván minél kisebb lefogó ponthalmaz keresése az érdekes. Ez egy optimalizálási feladat.

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.

- $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.
- Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden v csúcsra $V(G) - \{v\}$ is lefogó.
- Nyilván minél kisebb lefogó ponthalmaz keresése az érdekes. Ez egy optimalizálási feladat.

Jelölés

$$\tau(G) = \min\{|L| : L \text{ lefogó csúcshalmaz}\}$$

Lefogó ponthalmazok „mesével”

Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.

Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.
- Adott egy múzeum.

Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.
- Adott egy múzem. Ennek térképét egy gráf írja le.

Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.
- Adott egy múzeum. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók találkozási pontjai.

Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.
- Adott egy múzeum. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók találkozási pontjai. Örökre szeretnénk védeni a múzeumot.



Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.
- Adott egy múzeum. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók találkozási pontjai. Örökkel szeretnénk védeni a múzeumot.



- Az örök csúcsokba ültethetők/állíthatók, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzésük alatt tarthatják.

Lefogó ponthalmazok „mesével”

- A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg.
- Adott egy múzeum. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók találkozási pontjai. Örökkel szeretnénk védeni a múzeumot.



- Az örök csúcsokba ültethetők/állíthatók, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzésük alatt tarthatják.
- Ha célunk úgy elhelyezni az örököt, hogy minden folyosó védve legyen, akkor egy lefogó ponthalmazt kell keresnünk.

Példák

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n - 2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek.

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n - 2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n - 2$ elemű lefogó ponthalmaz.

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n - 2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n - 2$ elemű lefogó ponthalmaz.

Példa: Csillaggráfok.

$$\tau(S_{n+1}) = 1.$$

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n - 2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n - 2$ elemű lefogó ponthalmaz.

Példa: Csillaggráfok.

$$\tau(S_{n+1}) = 1.$$

- A középpont által alkotott egyelemű csúcshalmaz az összes élt lefogja.

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n - 2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n - 2$ elemű lefogó ponthalmaz.

Példa: Csillaggráfok.

$$\tau(S_{n+1}) = 1.$$

- A középpont által alkotott egyelemű csúcshalmaz az összes élt lefogja.
- Az üreshalmaz csak az üresgráfban lefogó csúcshalmaz.

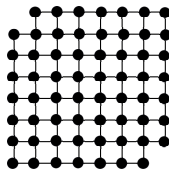
Újból egy feladat

Újból egy feladat

Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:

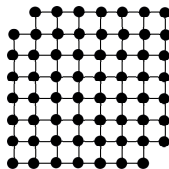
Újból egy feladat

Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



Újból egy feladat

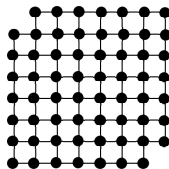
Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



- Ismét gondoljunk a sakktáblára, illetve annak színezésére.

Újból egy feladat

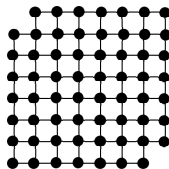
Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



- Ismét gondoljunk a sakktáblára, illetve annak színezésére.
- Erre gondolhatunk mint a fenti gráf jó két-színezésére.

Újból egy feladat

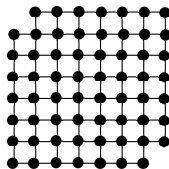
Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



- Ismét gondoljunk a sakktáblára, illetve annak színezésére.
- Erre gondolhatunk mint a fenti gráf jó két-színezésére. A fenti gráf páros.

Újból egy feladat

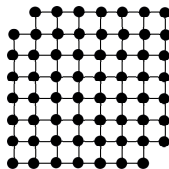
Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



- Ismét gondoljunk a sakktáblára, illetve annak színezésére.
- Erre gondolhatunk mint a fenti gráf jó két-színezésére. A fenti gráf páros.
- A kisebb színosztály — mondjuk a 30 fehér mező — lefogó ponthalmazt alkot.

Újból egy feladat

Határozzuk meg az alábbi gráf legkisebb lefogó ponthalmazának méretét:



- Ismét gondoljunk a sakktáblára, illetve annak színezésére.
- Erre gondolhatunk mint a fenti gráf jó két-színezésére. A fenti gráf páros.
- A kisebb színosztály — mondjuk a 30 fehér mező — lefogó ponthalmazt alkot.
- A korábbi 30 elhelyezett dominó bizonyítja, hogy nincs 30-nál kisebb lefogó ponthalmaz.

A kapcsolat

A kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

A kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel

Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

A kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel

Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban: a párosítás éleinek legalább egyik végpontja L -beli.

A kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel

Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban: a párosítás éleinek legalább egyik végpontja L -beli. A párosítás mivolt miatt bármelyik végponttaé „oldjuk meg” egy párosításbeli él lefogását különböző csúcsokhoz kell jutnunk. Azaz tetszőleges lefogáshoz legalább $|M|$ csúcs kell.

A kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel

Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban: a párosítás éleinek legalább egyik végpontja L -beli. A párosítás mivolt miatt bármelyik végponttaé „oldjuk meg” egy párosításbeli él lefogását különböző csúcsokhoz kell jutnunk. Azaz tetszőleges lefogáshoz legalább $|M|$ csúcs kell.

Következmény

Tetszőleges G gráfra

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

A séma

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”:

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
(i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
 - (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
 - (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).
 - (ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk:

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
 - (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).
 - (ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: A legkisebb lefogó ponthalmaz mérete 3,

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
 - (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).
 - (ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: A legkisebb lefogó ponthalmaz mérete 3, másképpen nincs 2-elemű lefogó ponthalmaz.

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
 - (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).
 - (ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: A legkisebb lefogó ponthalmaz mérete 3, másképpen nincs 2-elemű lefogó ponthalmaz.
- Egy fontos gráfosztályra mágis is igaz a „teljesség”:

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k + 1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.
- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5 -t.
 - (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).
 - (ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: A legkisebb lefogó ponthalmaz mérete 3, másképpen nincs 2-elemű lefogó ponthalmaz.
- Egy fontos gráfosztályra mágis is igaz a „teljesség”:

König Gyula tétele

Ha G páros gráf, akkor

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Szünet



Emlékeztető: páros gráfok

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok).

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobbi oldali csúcsok.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobbs oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobbs oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.
- Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobbs oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.
- Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk. Ezt a páros gráfok lerajzolásánál is tükrözzük:

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobbs oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.
- Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk. Ezt a páros gráfok lerajzolásánál is tükrözzük: a csúcsok egy vízszintes egyenes alá és fölé kerülnek.

Emlékeztető: páros gráfok

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

- A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek bal/jobbi oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.
- Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk. Ezt a páros gráfok lerajzolásánál is tükrözzük: a csúcsok egy vízszintes egyenes alá és fölé kerülnek. Összekötések csak az egyenesre vontakozólag „keresztbe” lesznek.

Példa

Példa

A korábbi feladataink 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt.

Példa

A korábbi feladataink 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt. Párosságát a sakktábla szokásos fehér/fekete színezése mutatja.

Példa

A korábbi feladataink 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt. Párosságát a sakktábla szokásos fehér/fekete színezése mutatja.

- A teljes párosítás hiányát az bizonyította, hogy a két színosztály különböző méretű volt ($30 + 32$).

Példa

A korábbi feladataink 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt. Párosságát a sakktabla szokásos fehér/fekete színezése mutatja.

- A teljes párosítás hiányát az bizonyította, hogy a két színosztály különböző méretű volt ($30 + 32$).
- Igazából többet is mondhatunk. A nagyobb színosztály (ez esetünkben a fekete mezők voltak) összes eleme nem lehet párosítva.

Példa

A korábbi feladataink 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt. Párosságát a sakktábla szokásos fehér/fekete színezése mutatja.

- A teljes párosítás hiányát az bizonyította, hogy a két színosztály különböző méretű volt ($30 + 32$).
- Igazából többet is mondhatunk. A nagyobb színosztály (ez esetünkben a fekete mezők voltak) összes eleme nem lehet párosítva.
- Valóban a 32 fekete mező párjai a 30 fehér mezőből kerülnek ki. Így legalább kettő fekete mező marad párosítatlan.

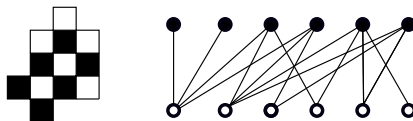
Egy másik példa

Egy másik példa

A fenti módszer alkalmazásához nem szükséges, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:

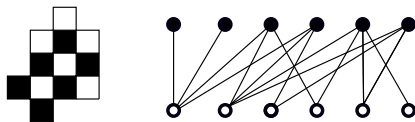
Egy másik példa

A fenti módszer alkalmazásához nem szükséges, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



Egy másik példa

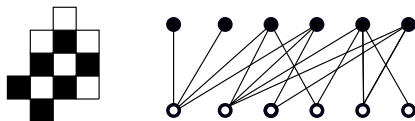
A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



- A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.

Egy másik példa

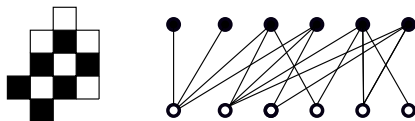
A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



- A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.
- Erre a tábla bal alsó sarka világít rá:

Egy másik példa

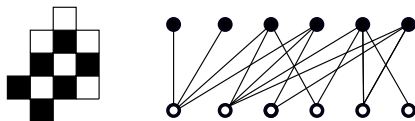
A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



- A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.
- Erre a tábla bal alsó sarka világít rá: Két fekete mező, ami egyetlen módon fedhető le, de ehhez közös fehér mező kell.

Egy másik példa

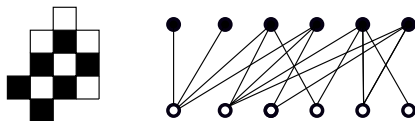
A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



- A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.
- Erre a tábla bal alsó sarka világít rá: Két fekete mező, ami egyetlen módon fedhető le, de ehhez közös fehér mező kell.
- Az ábra jobb oldalán a hat-hat mező páros gráfja szerepel.

Egy másik példa

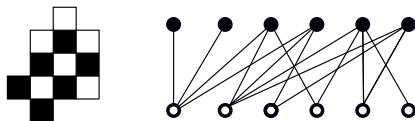
A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



- A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.
- Erre a tábla bal alsó sarka világít rá: Két fekete mező, ami egyetlen módon fedhető le, de ehhez közös fehér mező kell.
- Az ábra jobb oldalán a hat-hat mező páros gráfja szerepel.
- A fenti gráfban is elmondhatjuk a gondolatmenetet:

Egy másik példa

A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



- A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni.
- Erre a tábla bal alsó sarka világít rá: Két fekete mező, ami egyetlen módon fedhető le, de ehhez közös fehér mező kell.
- Az ábra jobb oldalán a hat-hat mező páros gráfja szerepel.
- A fenti gráfban is elmondhatjuk a gondolatmenetet: A felső csúcsok közül az első kettő együttes szomszédsága egyetlen pont.

Az ötlet elmesélve

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.
- Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.
- Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyekükkel legalább egyikük táncol.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.
- Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyekükkel legalább egyikük táncol.
- Tegyük fel, hogy a lista f fiút tartalmaz. Ha $\ell > f$, akkor nem tud minden lány egyszerre táncolni.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.
- Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyekükkel legalább egyikük táncol.
- Tegyük fel, hogy a lista f fiút tartalmaz. Ha $\ell > f$, akkor nem tud minden lány egyszerre táncolni.
- Sőt már a kiválasztott ℓ lány sem táncolhat egyszerre.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.
- Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyekükkel legalább egyikük táncol.
- Tegyük fel, hogy a lista f fiút tartalmaz. Ha $\ell > f$, akkor nem tud minden lány egyszerre táncolni.
- Sőt már a kiválasztott ℓ lány sem táncolhat egyszerre.
- Sőt a kiválasztott lány közül legfeljebb f táncolhat egyszerre.

Az ötlet elmesélve

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. A mese:

- Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni egymással.
- A hajlandóságukat egy páros gráf írja le.
- Tegyük fel, hogy találunk ℓ darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyekükkel legalább egyikük táncol.
- Tegyük fel, hogy a lista f fiút tartalmaz. Ha $\ell > f$, akkor nem tud minden lány egyszerre táncolni.
- Sőt már a kiválasztott ℓ lány sem táncolhat egyszerre.
- Sőt a kiválasztott lány közül legfeljebb f táncolhat egyszerre. Azaz minden pillanatban legalább $\ell - f$ lány hoppon marad (a fal mellől nézheti a táncolókat).

Jelölések

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció

Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok).

Jelölések

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció

Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok). Legyen $K \subset A$ az alsó csúcsok egy részhalmaza.

Jelölések

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció

Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok). Legyen $K \subset A$ az alsó csúcsok egy részhalmaza. Legyen $N(K)$ a K -beli pontok szomszédainak uniója.

Jelölések

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció

Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok). Legyen $K \subset A$ az alsó csúcsok egy részhalmaza. Legyen $N(K)$ a K -beli pontok szomszédainak uniója. Azaz $N(K) (\subset F)$ tartalmazza azokat a csúcsokat, amelyek valamely K -beli ponttal összekötöttek.

Jelölések

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció

Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok). Legyen $K \subset A$ az alsó csúcsok egy részhalmaza. Legyen $N(K)$ a K -beli pontok szomszédainak uniója. Azaz $N(K) (\subset F)$ tartalmazza azokat a csúcsokat, amelyek valamely K -beli ponttal összekötöttek. Legyen

$$\delta(K) = |K| - |N(K)|.$$

Kőnig-akadály

Kőnig-akadály

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$.

König-akadály

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$.

Definíció: König-akadály

Egy K alsó csúcshalmazt (alsó) König-akadálynak nevezünk, ha $\delta(K) > 0$.

Kőnig-akadály

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$.

Definíció: Kőnig-akadály

Egy K alsó csúcshalmazt (alsó) Kőnig-akadálynak nevezünk, ha $\delta(K) > 0$.

Egy Kőnig-akadály léte megakadályozza, hogy legyen az összes alsó csúcsot párosító párosítás.

König-akadály

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$.

Definíció: König-akadály

Egy K alsó csúcshalmazt (alsó) König-akadálynak nevezünk, ha $\delta(K) > 0$.

Egy König-akadály léte megakadályozza, hogy legyen az összes alsó csúcst párosító párosítás. Sőt, K -ból legalább $\delta(K)$ darab csúcst párosítatlan marad bármilyen „okosan” párosítsunk (hisz a K -beli csúcsok párjai $N(K)$ -ból kerülhetnek csak ki).

König-akadály

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$.

Definíció: König-akadály

Egy K alsó csúcshalmazt (alsó) König-akadálynak nevezünk, ha $\delta(K) > 0$.

Egy König-akadály léte megakadályozza, hogy legyen az összes alsó csúcst párosító párosítás. Sőt, K -ból legalább $\delta(K)$ darab csúcst párosítatlan marad bármilyen „okosan” párosítsunk (hisz a K -beli csúcspárjai $N(K)$ -ből kerülhetnek csak ki).

Észrevétel

Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. $K \subset A$ tetszőleges alsó csúcshalmaz és M egy tetszőleges párosítás. Ekkor

$$\delta(K) \leq |A| - |M|.$$

A második séma

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k + 1$ -elemű párosítás.

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k + 1$ -elemű párosítás.
- Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A| - k$ -val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában.

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k + 1$ -elemű párosítás.
- Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A| - k$ -val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában.
- Valóban K egy bizonyíték, hogy minden M párosítás legalább $|A| - k$ darab alsó csúcsot párosítatlanul hagy. K megakadályozza, hogy legyen $k + 1$ -elemű párosítás.

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k + 1$ -elemű párosítás.
- Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A| - k$ -val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában.
- Valóban K egy bizonyíték, hogy minden M párosítás legalább $|A| - k$ darab alsó csúcsot párosítatlanul hagy. K megakadályozza, hogy legyen $k + 1$ -elemű párosítás.
- Ez a séma csak páros gráfokban mondható el.

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k + 1$ -elemű párosítás.
- Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A| - k$ -val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában.
- Valóban K egy bizonyíték, hogy minden M párosítás legalább $|A| - k$ darab alsó csúcsot párosítatlanul hagy. K megakadályozza, hogy legyen $k + 1$ -elemű párosítás.
- Ez a séma csak páros gráfokban mondható el. Páros gráfok között azonban teljes:

A második séma

- A fenti gondolatmenet ismét lehetőséget ad arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k + 1$ -elemű párosítás.
- Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A| - k$ -val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában.
- Valóban K egy bizonyíték, hogy minden M párosítás legalább $|A| - k$ darab alsó csúcsot párosítatlanul hagy. K megakadályozza, hogy legyen $k + 1$ -elemű párosítás.
- Ez a séma csak páros gráfokban mondható el. Páros gráfok között azonban teljes:

König Dénes tétele

Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. Ekkor

$$\min\{|A| - |M| : M \text{ párosítás}\} = \max\{\delta(K) : K \subset A\}.$$

Egy következmény

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

- G -ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

- G -ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.
- G -ben nincs König-akadály.

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

- G -ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.
 - G -ben nincs König-akadály.
- König Dénes több tételét is kimondtuk. Ezek bizonyítása nem egyszerű. Időhiány miatt ezeket az indoklásokat nem végezzük el.

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

- (i) G -ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.
 - (ii) G -ben nincs König-akadály.
- König Dénes több tételét is kimondtuk. Ezek bizonyítása nem egyszerű. Időhiány miatt ezeket az indoklásokat nem végezzük el.
 - A párosításokról szóló részben főleg páros gráfokról volt szó.

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

- (i) G -ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.
 - (ii) G -ben nincs König-akadály.
- König Dénes több tételét is kimondtuk. Ezek bizonyítása nem egyszerű. Időhiány miatt ezeket az indoklásokat nem végezzük el.
 - A párosításokról szóló részben főleg páros gráfokról volt szó. Minden kiterjeszthető az általános esetre is.

Egy következmény

- Érdeemes kimondani a fenti tétel egy speciális esetét.

König Dénes tételének következménye

Legyen G egy tetszőleges páros gráf. A következők ekvivalensek:

- (i) G -ben van olyan párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja.
 - (ii) G -ben nincs König-akadály.
- König Dénes több tételét is kimondtuk. Ezek bizonyítása nem egyszerű. Időhiány miatt ezeket az indoklásokat nem végezzük el.
 - A párosításokról szóló részben főleg páros gráfokról volt szó. Minden kiterjeszthető az általános esetre is. Ez a kiterjesztés, azonban nem egyszerű. Idő hiánya miatt nem tárgyaljuk.

Az eddigi problémák összegzése

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
 - (vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
 - (vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?
 - (vii) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e benne k elemű klikk?

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
 - (vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?
 - (vii) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e benne k elemű klikk?
- Ezek nem független fejtörők.

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
 - (vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?
 - (vii) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e benne k elemű klikk?
- Ezek nem független fejtörők. A kombinatorikus kérdések fontos elméletet alkotnak és egyre fontosabb szerepet kapnak matematika versenyeken.

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
 - (vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?
 - (vii) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e benne k elemű klikk?
- Ezek nem független fejtörők. A kombinatorikus kérdések fontos elméletet alkotnak és egyre fontosabb szerepet kapnak matematika versenyeken.
- Megemlítjük, hogy a párosítások témaköre is nagyon gazdag. Az alapkérdések teljességében, hatékonyan megválaszolhatók. Ugyanúgy mint az Euler-vonalak vagy összefüggőség esetében.

Az eddigi problémák összegzése

- Az eddigi alapkérdések hasonlóak voltak.
 - (i) Adott egy G gráf. Összefüggő-e?
 - (ii) Adott egy G gráf. Van-e benne Hamilton-kör?
 - (iii) Adott egy G gráf. Van-e benne Euler-vonal?
 - (iv) Adott egy G gráf és egy k szám. Kiszínezhető-e jól k színnel?
 - (v) Adott egy G gráf. Van-e benne teljes párosítás?
 - (vi) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e k elemű lefogás?
 - (vii) Adott egy G gráf és egy k szám. Van-e benne k elemű klikk?
- Ezek nem független fejtörők. A kombinatorikus kérdések fontos elméletet alkotnak és egyre fontosabb szerepet kapnak matematika versenyeken.
- Megemlítjük, hogy a párosítások témaköre is nagyon gazdag. Az alapkérdések teljességében, hatékonyan megválaszolhatók. Ugyanúgy mint az Euler-vonalak vagy összefüggőség esetében.
- Ezzel szemben a Hamilton-kör, színezések, lefogások, illetve klikkek alapkérdései a kombinatorika nagyon nehéz, kezelhetetlen problémái.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!