

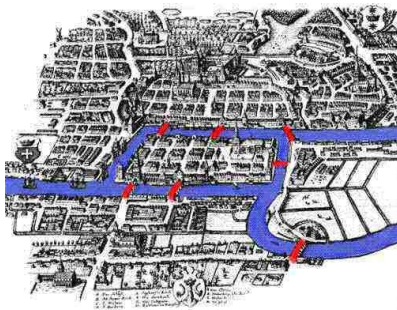
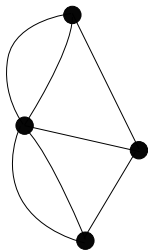
# Séták gráfokban

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

# Königsberg, ahol a gráfelmélet megszületett



Történetileg legfontosabb példa gráfra: a XIX. századi Königsberg városának középpontjában lévő szárazföldi egységek és a köztük fekvő hidak rendszere

## A gráfelméleti séta definíciója

Egy séta a  $G$  gráfban egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

sorozat, ahol

## A gráfelméleti séta definíciója

Egy séta a  $G$  gráfban egy

$$S : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

sorozat, ahol

(i)  $v_0, v_1, \dots, v_\ell \in V, e_1, \dots, e_\ell \in E,$

## A gráfelméleti séta definíciója

Egy séta a  $G$  gráfban egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

sorozat, ahol

- (i)  $v_0, v_1, \dots, v_\ell \in V, e_1, \dots, e_\ell \in E,$
- (ii) Minden  $e_j$  élt a sorozatban két végpontja veszi körül:  
 $e_j = v_{j-1}v_j.$

## A gráfelméleti séta definíciója

Egy séta a  $G$  gráfban egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

sorozat, ahol

- (i)  $v_0, v_1, \dots, v_\ell \in V, e_1, \dots, e_\ell \in E,$
- (ii) Minden  $e_j$  élt a sorozatban két végpontja veszi körül:  
 $e_j = v_{j-1}v_j.$

Szavakkal: A sorozat csúccsal kezdődik, végződik. A sorozatban a csúcs/él kategóriák alternálnak. Minden élt két végpontja veszi közre.

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$  egy séta

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$  egy séta

$\mathcal{S}$   $u$ -ból indul,  $v$ -be érkezik,



$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$  egy séta

$\mathcal{S}$   $u$ -ból indul,  $v$ -be érkezik,

$\mathcal{S}$  egy  $uv$ -séta,

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$  egy séta

$\mathcal{S}$   $u$ -ból indul,  $v$ -be érkezik,

$\mathcal{S}$  egy  $uv$ -séta,

$\ell$  a séta hossza,

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$  egy séta

$\mathcal{S}$   $u$ -ból indul,  $v$ -be érkezik,

$\mathcal{S}$  egy  $uv$ -séta,

$\ell$  a séta hossza, Megjegyezzük, hogy  $\ell = 0$  lehetséges, azaz 'u' egy séta,

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$  egy séta

$\mathcal{S}$   $u$ -ból indul,  $v$ -be érkezik,

$\mathcal{S}$  egy  $uv$ -séta,

$\ell$  a séta hossza, Megjegyezzük, hogy  $\ell = 0$  lehetséges, azaz ' $u$ ' egy séta,

$V(\mathcal{S}) = \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$  a séta csúcshalmaza,

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$  egy séta

$\mathcal{S}$   $u$ -ból indul,  $v$ -be érkezik,

$\mathcal{S}$  egy  $uv$ -séta,

$\ell$  a séta hossza, Megjegyezzük, hogy  $\ell = 0$  lehetséges, azaz ' $u$ ' egy séta,

$V(\mathcal{S}) = \{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$  a séta csúcshalmaza,

$E(\mathcal{S}) = \{e_1, \dots, e_\ell\}$  a séta élhalmaza.

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

Séta: dinamikus szemlélet

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

## Séta: dinamikus szemlélet

Egy sétálás egy gráfban egy folyamat,  $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$  diszkrét időpontokkal, „óraütésekkel”,



# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

## Séta: dinamikus szemlélet

Egy sétálás egy gráfban egy folyamat,  $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$  diszkrét időpontokkal, „óraütésekkel”,

Minden időpontban a gráf egy-egy csúcsában foglalunk helyet.  $t = i$  időpontban  $v_i$ -ben vagyunk.

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

## Séta: dinamikus szemlélet

Egy sétálás egy gráfban egy folyamat,  $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$  diszkrét időpontokkal, „óraütésekkel”,

Minden időpontban a gráf egy-egy csúcsában foglalunk helyet.  $t = i$  időpontban  $v_i$ -ben vagyunk.

Két időpont között a megfelelő két csúcs (szükségszerűen szomszédosak) egy összekötő élén haladunk át (a séta egy lépését tesszük meg).

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

## Séta: dinamikus szemlélet

Egy sétálás egy gráfban egy folyamat,  $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$  diszkrét időpontokkal, „óraütésekkel”,

Minden időpontban a gráf egy-egy csúcsában foglalunk helyet.  $t = i$  időpontban  $v_i$ -ben vagyunk.

Két időpont között a megfelelő két csúcs (szükségszerűen szomszédosak) egy összekötő élén haladunk át (a séta egy lépését tesszük meg).

Azaz  $t = i - 1$  és  $t = i$  időpont között az  $e_i = v_{i-1}v_i$  élén haladunk át, így  $v_{i-1}$ -ből  $v_i$ -be kerülünk át.

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényegét. Van egy dinamikus szemlélet is.

## Séta: dinamikus szemlélet

Egy sétálás egy gráfban egy folyamat,  $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$  diszkrét időpontokkal, „óraütésekkel”,

Minden időpontban a gráf egy-egy csúcsában foglalunk helyet.  $t = i$  időpontban  $v_i$ -ben vagyunk.

Két időpont között a megfelelő két csúcs (szükségszerűen szomszédosak) egy összekötő élén haladunk át (a séta egy lépését tesszük meg).

Azaz  $t = i - 1$  és  $t = i$  időpont között az  $e_i = v_{i-1}v_i$  élén haladunk át, így  $v_{i-1}$ -ből  $v_i$ -be kerülünk át.

Azaz a gráfelméleti sétálás a korábbi valódi sétálás filmszalagjának, képsorozatának kiritkített sorozata.

## A vonal definíciója

A *von*al egy olyan séta, melyben az élek nem ismétlődnek.

## A vonal definíciója

A *von*al egy olyan séta, melyben az élek nem ismétlődnek.

Azt is mondhatjuk, hogy élhalmazának elemszáma ugyanaz mint a hossza. Ez általában nem igaz.

## A vonal definíciója

A *von*al egy olyan séta, melyben az élek nem ismétlődnek.

Azt is mondhatjuk, hogy élhalmazának elemszáma ugyanaz mint a hossza. Ez általában nem igaz. Ha egy élen oda-vissza lépegetve sétálunk hosszú ideig, akkor élhalmaza egyetlen élből áll míg hossza tetszőleges hosszú lehet.

## A vonal definíciója

A *vonat* egy olyan séta, melyben az élek nem ismétlődnek.

Azt is mondhatjuk, hogy élhalmazának elemszáma ugyanaz mint a hossza. Ez általában nem igaz. Ha egy élen oda-vissza lépegetve sétálunk hosszú ideig, akkor élhalmaza egyetlen élből áll míg hossza tetszőleges hosszú lehet.

Azaz a vonal olyan séta, amely bejárása során tiltott az olyan élen való áthaladás, amelyen korábban már átléptünk.



# Speciális séták: út

## Az út definíciója

Az *út* egy olyan séta, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek.

## Az út definíciója

Az *út* egy olyan séta, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek.

Azaz sétálásként fogva fel az utat minden lépés egy eddig nem látogatott csúcsba vezet.

## Az út definíciója

Az *út* egy olyan séta, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek.

Azaz sétálásként fogva fel az utat minden lépés egy eddig nem látogatott csúcsba vezet.

Azaz út olyan séta, amely bejárása során tiltott a már látogatott csúcsba való visszalépés.



Nyilván van olyan vonal, amely nem út. Azaz az élek nem-ismétlődése mellett ugyanabba a csúcsba visszatérhetünk. Fordítva azonban nem igaz: Ha egy séta során tiltjuk a csúcsok ismétlődését, akkor az élek automatikusan nem ismétlődnek.

Nyilván van olyan vonal, amely nem út. Azaz az élek nem-ismétlődése mellett ugyanabba a csúcsba visszatérhetünk. Fordítva azonban nem igaz: Ha egy séta során tiltjuk a csúcsok ismétlődését, akkor az élek automatikusan nem ismétlődnek.

## Észrevétel

Egy  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$  út egy vonal.

# Az észrevétel bizonyítása



Indirekten indoklunk.

Indirekten indoklunk. Tegyük fel, hogy utunk nem vonal, azaz alkalmas  $i < j$  indexre  $e_i = e_j = e$ . (Indirekt bizonyítás)

Indirekten indoklunk. Tegyük fel, hogy utunk nem vonal, azaz alkalmas  $i < j$  indexre  $e_i = e_j = e$ . (Indirekt bizonyítás)

Az ismétlődő él két végpontja legyen  $u$  és  $v$ . Ekkor  $e_i$ -t és  $e_j$ -t is az  $u$  és  $v$  csúcsok veszik körül. Ez még nem teszi szükségessé, hogy például  $v$  ismétlődjön. Az  $u, e, v, e, u$  sétában ismétlődik az  $e$  él, de  $v$  végpontja nem.

# Az észrevétel bizonyítása

Indirekten indoklunk. Tegyük fel, hogy utunk nem vonal, azaz alkalmas  $i < j$  indexre  $e_i = e_j = e$ . (Indirekt bizonyítás)

Az ismétlődő él két végpontja legyen  $u$  és  $v$ . Ekkor  $e_i$ -t és  $e_j$ -t is az  $u$  és  $v$  csúcsok veszik körül. Ez még nem teszi szükségessé, hogy például  $v$  ismétlődjön. Az  $u, e, v, e, u$  sétában ismétlődik az  $e$  él, de  $v$  végpontja nem.

Legyen  $x \in \{u, v\}$  az  $e$  él azon végpontja, amely  $e_i$  előtt van. Ez a csúcs a későbbi  $e_j$  él körül is ott van. Ez már biztos csúcsismétlődés. Kiinduló sétánk út mivoltának ez ellentmond. A bizonyítás teljes.

## Séták záródása

Egy séta záródó/zárt, ha első és utolsó csúcsa megegyezik.

Egy vonal is lehet záródó. Egy útnál csak akkor lehet záródásról beszélni, ha 0 hosszú. A legalább 1 hosszú utak szükségszerűen NEM záródóak (szokásos a nyílt kifejezés).

## A kör definíciója

A kör egy gráfban olyan  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell}$  séta, amelyre

## Séták záródása

Egy séta záródó/zárt, ha első és utolsó csúcsa megegyezik.

Egy vonal is lehet záródó. Egy útnál csak akkor lehet záródásról beszélni, ha 0 hosszú. A legalább 1 hosszú utak szükségszerűen NEM záródóak (szokásos a nyílt kifejezés).

## A kör definíciója

A kör egy gráfban olyan  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell}$  séta, amelyre

## Séták záródása

Egy séta záródó/zárt, ha első és utolsó csúcsa megegyezik.

Egy vonal is lehet záródó. Egy útnál csak akkor lehet záródásról beszélni, ha 0 hosszú. A legalább 1 hosszú utak szükségszerűen NEM záródóak (szokásos a nyílt kifejezés).

## A kör definíciója

A kör egy gráfban olyan  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell}$  séta, amelyre

az első  $\ell - 1$  lépés ( $! \ell \geq 1$ ) sétája:  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}$  út,

## Séták záródása

Egy séta záródó/zárt, ha első és utolsó csúcsa megegyezik.

Egy vonal is lehet záródó. Egy útnál csak akkor lehet záródásról beszélni, ha 0 hosszú. A legalább 1 hosszú utak szükségszerűen NEM záródóak (szokásos a nyílt kifejezés).

## A kör definíciója

A kör egy gráfban olyan  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$  séta, amelyre

az első  $\ell - 1$  lépés ( $!\ell \geq 1$ ) sétája:  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}$  út,

továbbá az  $e_\ell$  egy eddig nem szereplő él, amely visszavezet  $v_0$ -ba (azaz  $v_\ell = v_0$ ).



## Séták záródása

Egy séta záródó/zárt, ha első és utolsó csúcsa megegyezik.

Egy vonal is lehet záródó. Egy útnál csak akkor lehet záródásról beszélni, ha 0 hosszú. A legalább 1 hosszú utak szükségszerűen NEM záródóak (szokásos a nyílt kifejezés).

## A kör definíciója

A kör egy gráfban olyan  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$  séta, amelyre

az első  $\ell - 1$  lépés ( $!\ell \geq 1$ ) sétája:  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}$  út,

továbbá az  $e_\ell$  egy eddig nem szereplő él, amely visszavezet  $v_0$ -ba (azaz  $v_\ell = v_0$ ).

Speciálisan egy kör hossza mindig pozitív egész (0 hosszú kör nincs). A körök záródó vonalak, nem utak.





## Elérhetőségi reláció

$\sim$  egy reláció egy gráf csúcshalmazán.  $u, v \in V$  esetén  $u \sim v$  ( $u$ -ból elérhető  $v$ ) akkor és csak akkor, ha gráfunkban van  $uv$  séta.

## Elérhetőségi reláció

$\sim$  egy reláció egy gráf csúcshalmazán.  $u, v \in V$  esetén  $u \sim v$  ( $u$ -ból elérhető  $v$ ) akkor és csak akkor, ha gráfunkban van  $uv$  séta.

## Alaplemma

Az elérhetőség reláció egy ekvivalenciareláció. Azaz

- (i)  $u \sim u$ ,
- (ii)  $u \sim v$  esetén  $v \sim u$ ,
- (iii)  $u \sim v, v \sim w$  esetén  $u \sim w$ .

## Alap példa

Egy gimnáziumban az osztálytárs reláció egy ekvivalenciareláció.

## Alap példa

Egy gimnáziumban az osztálytárs reláció egy ekvivalenciareláció.

Azzal a nyelvi megállapodással élünk, hogy mindenki osztálytársa önmagának.

## Alappélda

Egy gimnáziumban az osztálytárs reláció egy ekvivalenciareláció.

Azzal a nyelvi megállapodással élünk, hogy mindenki osztálytársa önmagának.

## Az ekvivalenciarelációk alaptétele

Ha  $\rho$  ekvivalenciareláció egy  $H$  halmazon, akkor a halmaz egyértelműen osztályozható nemüres halmaz(ok)ba úgy, hogy  $\rho$  pontosan az „ugyanabba az osztályba tartozni” reláció legyen.



## Alappélda

Egy gimnáziumban az osztálytárs reláció egy ekvivalenciareláció.

Azzal a nyelvi megállapodással élünk, hogy mindenki osztálytársa önmagának.

## Az ekvivalenciarelációk alaptétele

Ha  $\rho$  ekvivalenciareláció egy  $H$  halmazon, akkor a halmaz egyértelműen osztályozható nemüres halmaz(ok)ba úgy, hogy  $\rho$  pontosan az „ugyanabba az osztályba tartozni” reláció legyen.

Azaz az „osztálytárs” példa egy univerzális példa.

# A Lemma bizonyítása

# A Lemma bizonyítása

(i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.

# A Lemma bizonyítása

- (i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.
- (ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz.

(i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.

(ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz. Ennek belátására csak a definíciót kell végiggondolnunk. A 'csúccsal kezdődik és végződik', a 'csúcsok/élek alternálnak', és 'minden élt két végpontja fogja közre' olyan feltételek amik a jobb/bal felcserélésére szimmetrikusak.

- (i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.
- (ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz. Ennek belátására csak a definíciót kell végiggondolnunk. A 'csúccsal kezdődik és végződik', a 'csúcsok/élek alternálnak', és 'minden élt két végpontja fogja közre' olyan feltételek amik a jobb/bal felcserélésére szimmetrikusak.
- (iii) Ha  $u \sim v$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $u$ -val kezdődik és  $v$  -vel végződik.

- (i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.
- (ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz. Ennek belátására csak a definíciót kell végiggondolnunk. A 'csúccsal kezdődik és végződik', a 'csúcsok/élek alternálnak', és 'minden élt két végpontja fogja közre' olyan feltételek amik a jobb/bal felcserélésére szimmetrikusak.
- (iii) Ha  $u \sim v$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $u$ -val kezdődik és  $v$  -vel végződik. Ha  $v \sim w$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $v$ -val kezdődik és  $w$  -vel végződik.

- (i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.
- (ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz. Ennek belátására csak a definíciót kell végiggondolnunk. A 'csúccsal kezdődik és végződik', a 'csúcsok/élek alternálnak', és 'minden élt két végpontja fogja közre' olyan feltételek amik a jobb/bal felcserélésére szimmetrikusak.
- (iii) Ha  $u \sim v$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $u$ -val kezdődik és  $v$  -vel végződik. Ha  $v \sim w$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $v$ -val kezdődik és  $w$  -vel végződik. Ha leírjuk az első sétát, majd utolsó elemét a második séta kezdőelemének gondolva utána másoljuk a második sétát, akkor is egy sétát kapunk (miért?).



- (i) Minden  $u$  csúcsra ' $u$ ' egy 0 hosszú séta  $u$ -ból  $u$ -ba.
- (ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz. Ennek belátására csak a definíciót kell végiggondolnunk. A 'csúccsal kezdődik és végződik', a 'csúcsok/élek alternálnak', és 'minden élt két végpontja fogja közre' olyan feltételek amik a jobb/bal felcserélésére szimmetrikusak.
- (iii) Ha  $u \sim v$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $u$ -val kezdődik és  $v$  -vel végződik. Ha  $v \sim w$ , akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat  $v$ -val kezdődik és  $w$  -vel végződik. Ha leírjuk az első sétát, majd utolsó elemét a második séta kezdőelemének gondolva utána másoljuk a második sétát, akkor is egy sétát kapunk (miért?). Ez a séta igazolja, hogy  $u \sim w$ .

## Lemma

$u \sim v$  akkor és csak akkor teljesül, ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út.

## Lemma

$u \sim v$  akkor és csak akkor teljesül, ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út.

Azaz a sétával való elérhetőség és az úttal való elérhetőség ugyanaz.

# A lemma bizonyítása

# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

Az állítás lényege, ha  $u$ -ból elsétálhatunk  $v$ -be, akkor  $u$ -ból  $v$ -be vezető út is létezik.

# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

Az állítás lényege, ha  $u$ -ból elsétálhatunk  $v$ -be, akkor  $u$ -ból  $v$ -be vezető út is létezik.

Legyen  $\mathcal{S}$

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

séta és tegyük fel, hogy nem út. Azaz  $i < j$  esetén  $v_i = v_j$ .  
(Indirekt bizonyítás)

# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

Az állítás lényege, ha  $u$ -ból elsétálhatunk  $v$ -be, akkor  $u$ -ból  $v$ -be vezető út is létezik.

Legyen  $\mathcal{S}$

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

séta és tegyük fel, hogy nem út. Azaz  $i < j$  esetén  $v_i = v_j$ .  
(Indirekt bizonyítás)

Ekkor legyen  $\text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ :

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i (= v_j), e_{j+1}, \dots, e_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

szintén egy  $uv$  séta,



# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

Az állítás lényege, ha  $u$ -ból elsétálhatunk  $v$ -be, akkor  $u$ -ból  $v$ -be vezető út is létezik.

Legyen  $\mathcal{S}$

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

séta és tegyük fel, hogy nem út. Azaz  $i < j$  esetén  $v_i = v_j$ .  
(Indirekt bizonyítás)

Ekkor legyen  $\text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ :

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i (= v_j), e_{j+1}, \dots, e_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

szintén egy  $uv$  séta,

amely élsorozata az eredeti séta élsorozatának egy részsorozata. Az  $e_{i+1}$  él biztos hiányzik belőle, azaz hossza rövidebb mint az előzőé.

# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van  $u$ -ból  $v$ -be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

Az állítás lényege, ha  $u$ -ból elsétálhatunk  $v$ -be, akkor  $u$ -ból  $v$ -be vezető út is létezik.

Legyen  $\mathcal{S}$

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

séta és tegyük fel, hogy nem út. Azaz  $i < j$  esetén  $v_i = v_j$ .  
(Indirekt bizonyítás)

Ekkor legyen  $\text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ :

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i (= v_j), e_{j+1}, \dots, e_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

szintén egy  $uv$  séta,

amely élsorozata az eredeti séta élsorozatának egy részsorozata. Az  $e_{i+1}$  él biztos hiányzik belőle, azaz hossza rövidebb mint az előzőé.

Ez a nyilvánvaló észrevétel a Lemma igazolásának lényege.

# A matematikus befejezés

Legyen  $\mathcal{S}$  a legrövidebb  $uv$  séta (ilyen biztos létezik hiszen van ilyen séta az  $u \sim v$  feltevés alapján és a sétahossz egy természetes szám).

Legyen  $\mathcal{S}$  a legrövidebb  $uv$  séta (ilyen biztos létezik hiszen van ilyen séta az  $u \sim v$  feltevés alapján és a sétahossz egy természetes szám).

A fentiek alapján ebben nem lehet csúcsisméltés (hiszen az hossz csökkentéshez vezet, mint láttuk).

Legyen  $\mathcal{S}$  a legrövidebb  $uv$  séta (ilyen biztos létezik hiszen van ilyen séta az  $u \sim v$  feltevés alapján és a sétahossz egy természetes szám).

A fentiek alapján ebben nem lehet csúcsisméltés (hiszen az hossz csökkentéshez vezet, mint láttuk).

Azaz a legrövidebb séta egyben út és bizonyítja az állítást.

$u \sim v$  feltevés alapján van egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

$uv$  séta gráfunkban.

$u \sim v$  feltevés alapján van egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

$uv$  séta gráfunkban.

Legyen  $\mathcal{S}$  a következő algoritmus inputja:

**Kivágásos vonal egyszerűsítő algoritmus:** Adott egy  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta egy  $G$  gráfban.

**Amíg** van  $v_i = v_j$  csúcisméltés, **addig**  $\mathcal{S} \leftarrow \text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ .



$u \sim v$  feltevés alapján van egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

$uv$  séta gráfunkban.

Legyen  $\mathcal{S}$  a következő algoritmus inputja:

**Kivágásos vonal egyszerűsítő algoritmus:** Adott egy  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta egy  $G$  gráfban.

**Amíg** van  $v_i = v_j$  csúcsméltés, **addig**  $\mathcal{S} \leftarrow \text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ .

Az algoritmus során a hossz nem csökkenhet a végtelenségig (értékei természetes számok).

$u \sim v$  feltevés alapján van egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

$uv$  séta gráfunkban.

Legyen  $\mathcal{S}$  a következő algoritmus inputja:

**Kivágásos vonal egyszerűsítő algoritmus:** Adott egy  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta egy  $G$  gráfban.

**Amíg** van  $v_i = v_j$  csúcisméltés, **addig**  $\mathcal{S} \leftarrow \text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ .

Az algoritmus során a hossz nem csökkenhet a végtelenségig (értékei természetes számok). Így szükségeszerű az algoritmus leállása.

$u \sim v$  feltevés alapján van egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell} = v$$

$uv$  séta gráfunkban.

Legyen  $\mathcal{S}$  a következő algoritmus inputja:

**Kivágásos vonal egyszerűsítő algoritmus:** Adott egy  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta egy  $G$  gráfban.

**Amíg** van  $v_i = v_j$  csúcsismétlés, **addig**  $\mathcal{S} \leftarrow \text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$ .

Az algoritmus során a hossz nem csökkenhet a végtelenségig (értékei természetes számok). Így szükségeszerű az algoritmus leállása. Ekkor az aktuális sétában nincs csúcsismétlés. Azaz az output (séta a leálláskor) igazolja az állítást.

Köszönöm a figyelmet!

Az előadás során a wikipedia oldalairól származó képeket is használtam.