

Binomiális együtthatók

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2020

1. Polinomok, binomiális tétel

1. Feladat. Találjunk ki egy feladatot, amelyre a válasz $(m + 1)^n$.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy minden n pozitív egészre teljesül, hogy tetszőleges m számra

$$(m + 1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \dots + \binom{n}{n}m^n.$$

3. Feladat. Igazoljuk, hogy minden n pozitív egészre teljesül, hogy

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

4. Feladat. Bontsuk fel a zárójeleket az $(x + y)(z + t)$ betűs kifejezésben. A kapott monomok között lehet-e összevonni? Hány monomot kapunk a kifejtésben?

Válaszoljuk meg a fenti kérdéseket

$$(a + b)(b + c + d)(e + f + g + h)(i + j)$$

kifejezés esetén is.

5. Feladat. Bontsuk fel a zárójeleket az $(1 + x)(1 + x) \dots (1 + x) = (1 + x)^n$ betűs kifejezésben. A kapott monomok között lehet-e összevonni? Hány x^k monomot kapunk a kifejtésben?

6. Feladat. Bontsuk fel a zárójeleket az $(1 - x)(1 + x)(1 - x)(1 + x) \dots (1 - x)(1 + x)$ betűs kifejezésben ($2n$ tényező, felváltva $1 + x$ és $1 - x$ -ek). Összevonás után mi lesz x^k együtthatója a szorzatban? Tudunk-e ennek kombinatorikus értelmet adni?

7. Feladat. A és B a következő játékot játssza: az első száz pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként B. Milyen k -ra lesz egyenlő A és B nyerési esélye?

8. Feladat. Én és barátom a következő játékot játszunk: az elkövetkező lottóhúzásnál összeadjuk a kihúzott számokat és ha ezek összege páros, akkor én nyerek, egyébként barátom. Melyik lottót használjuk? A barátom rám bízta a döntést (ötös, hatos, skandináv). Melyiket válasszam?

9. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az*

$$(1 + x^5 + x^{10})(1 + x^{10})(1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80})$$

szorzatban.

Pénztárcánkban két 5 forintos, egy 10 forintos és négy 20 forintos van. Milyen összegeket tudunk kifizetni úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni? Az egyes kifizetéseknel hány lehetőségünk van? (Az azonos értékű érmék nem megkülönböztethetők.)

Mi köze a fenti két feladatnak egymáshoz?

2. k -elemű részhalmozok összeszámlálása, Pascal-háromszög

10. Feladat. *Egy lottóhúzás (normál lottó) története az öt szám és kihúzásuk sorrendje. Egy lottóhúzás eredménye a kihúzott öt szám halmaza. (Mi a különbség a két fogalom között?)*

Hányféle történet lehet egy lottóhúzásnak? Hányféle történet vezet ugyanahhoz az eredményhez? Hányféle eredménye lehet egy lottóhúzásnak?

11. Feladat. *Hányféleképpen lehet n darab különböző tárgy közül k darabot kiválasztani, és a kiválasztottakat sorba állítani?*

Hány k elemű részhalmoz van egy n elemű halmaznak?

12. Feladat. *Hét különböző nagyságú almából és három különböző nagyságú barackból két csomagot készítünk. Ezt hány különböző módon tehetjük meg úgy, hogy mindkét csomagban öt gyümölcs és közöttük legalább egy barack legyen?*

13. Feladat. *Egy raktárban 20 öltöny van, amelyek közt 9 szövési hibákat tartalmaz, a többi hibátlan. Egy kereskedő kiválaszt 15 öltönyt. Hány olyan választási lehetősége van, hogy legfeljebb 5 legyen hibás?*

14. Feladat. *Öt párhuzamos egyenest 11 párhuzamos, az előzőkre merőleges egyenesek metszenek. Hány téglalapot határoznak meg az így kapott rács vonalai?*

15. Feladat. *Igazoljuk kombinatorikus úton a következő összefüggéseket:*

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$

d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$

e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$

f) $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k} = (n-k+1) \binom{n}{k-1},$

g) $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + n \cdot m + \binom{m}{2},$

h) $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}.$

16. **Feladat.** *Igazoljuk kombinatorikusan, hogy*

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2.$$

Adjunk formulát az első n , nem-nulla négyzetszám összegére.

17. **Feladat.** *Hányféleképpen olvasható ki a fenti karakter táblázatból, hogy SZÁ-MOL, ha az összeolvasott betűknek folyamatosan (egymás után mindig szomszédosak következnek) kell elhelyezkedni?*

a)	$\begin{array}{cccccc} S & Z & \acute{A} & M & O & L \\ Z & \acute{A} & M & O & L & \\ \acute{A} & M & O & L & & \\ M & O & L & & & \\ O & L & & & & \\ L & & & & & \end{array}$	b)	$\begin{array}{cccc} S & Z & \acute{A} & M \\ Z & \acute{A} & M & O \\ \acute{A} & M & O & L \end{array}$	c)	$\begin{array}{cccc} & & O & L \\ & & \acute{A} & M & O \\ S & Z & \acute{A} & M \\ & & \acute{A} & M & O \\ & & O & L \end{array}$
----	--	----	---	----	---

18. **Feladat.** *Hányféleképpen juthatunk el egy sakktábla bal alsó mezőjéről a jobb felsőre, ha egyszerre csak felfelé vagy jobbra léphetünk egy mezőnyit?*

Mi a válasz ha táblánk mérete $n \times n$ -es? És ha $n \times m$ -es?

19. **Feladat.** a) *Milyen n és k természetes számok esetén lesz egy számtani sorozat három szomszédos tagja*

$$\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1} ?$$

b) *Lehetséges-e, hogy $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$ egy számtani sorozat egymást követő elemei ($0 \leq k < k+3 \leq n$)?*

20. **Feladat.** *Írjuk fel a Pascal-háromszög első 16 sorát és pirossal satírozzuk be azokat a pozíciókat, ahol páratlan szám áll.*

21. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy $(1+x)^{2n}$ kifejtésében 1 és x^{2n} monomokon kívül mindegyik páros együtthatóval szerepel.*

22. **Feladat.** *A Pascal-háromszög n -edik sora csak páratlan számokat tartalmaz. Mit mondhatunk n -ről?*

23. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy a lottóhúzásnak páros sokféle eredménye lehet.*

24. **Feladat.** *Egy n szintes panelház mindegyik szintjén két panel néz az utcára. Az utcára néző $2n$ darab panel részből k darabot pirosra színeznek. Hányféleképpen tehetik ezt meg?*

Hány lehetőség van, ha két színezést nem különböztetünk meg, ha egyiket megkaphatjuk a másiktól a ház függőleges szimmetriatengelyére való tükrözéssel?

25. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy*

a) *Igazoljuk, hogy $\binom{2n}{2k+1}$ páros.*

b) *Igazoljuk, hogy $\binom{2n+1}{2k+1}, \binom{2n+1}{2k}$ és $\binom{2n}{2k}$ ugyanolyan paritású mint $\binom{n}{k}$.*

c) Határozzuk meg $\binom{2014}{1000}$ paritását.

d) A fenti feladatok alapján adjunk egy hatékony algoritmust $\binom{n}{k}$ paritásának kiszámolására.

26. Feladat. Legyen p prímszám.

a) Bizonyítsuk be, hogy $p \mid \binom{p}{i}$, ha $1 \leq i \leq p-1$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$.

c) Bizonyítsuk be, hogy $b, d < p$ esetén $\binom{pa+b}{pc+d} \equiv \binom{a}{c} \binom{b}{d} \pmod{p}$.

27. Feladat. Egy 1001 lakosú városban megalakítják az összes 13 tagú klubot. Minden egyes klub elnököt választ a tagjai közül. Bizonyítsuk be, hogy vannak a városnak olyan lakói, akik különböző számú klubnak az elnökei.

* * *

28. Feladat. Hányféleképpen lehet n darab egyforma érmét k ember között szétosztani, ha mindenki legfeljebb egyet kaphat?

Hányféleképpen lehet n darab egyforma érmét k ember között szétosztani?

29. Feladat. Hány megoldása van a pozitív egész számok körében a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2014} = 2014$$

egyenletnek?

Mi lesz a válasz, ha a természetes számok között számoljuk a megoldásokat?

30. Feladat. Egy 150 cm hosszú centit (amit a boltban lehet kapni) a beosztásoknál elvágogatjuk úgy, hogy 20 részre essen szét. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (Csak a szétesett darabok érdekelnek, a vágás sorrendje nem számít.)