

# KOMBINATORIKA GYAKORLAT

osztatlan matematika tanár hallgatók számára

## Gráfelméleti alapfogalmak

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2018

**1. Feladat.** *Az alábbiakban egy-egy egyszerű gráfot definiálunk. Rajzoljuk le ezeket.*

- (i) A gráf pontjai egy tetraéder csúcsai. Két pont össze van kötve, ha van köztük él.*
- (ii) A gráf pontjai egy kocka csúcsai. Két pont össze van kötve, ha van köztük él.*
- (iii) Egy kör kerületén vegyünk fel 5 pontot. Gráfunk csúcsai a pontok által meghatározott  $\binom{5}{2}$  húr lesz. Két húr összekötünk, ha nincs közös végpontjuk.*
- (iv) Gráfunk  $4!$  csúcsa négy ember lehetséges sorba állításait reprezentálja. Két csúcs össze van kötve, ha az egyik sorba állításból két szomszédos ember felcserélésével a másik megkapható.*
- (v) A gráf csúcsai Magyarország megyéi. Két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő megyék szomszédosak.*

**2. Feladat.** *a) Rajzoljuk fel Szeged Tisza Lajos körúton belüli tereinek és köztük lévő közvetlen útszakaszok gráfját.*

*b) Rajzoljuk fel lakóhelyünk környékén lévő utcák gráfját.*

*c) Rajzoljuk fel szülővárosunk és szomszédos lakóhelyek, illetve az összekötő országutak/utak gráfját.*

**3. Feladat.** *Egy fejtörőben egy ember, egy farkas, egy kecske és egy káposzta egy folyó partjára érnek. Szeretnének átkelni a folyón, ahol van is egy csónak. Csak az ember és egy másik szereplő fér el a csónakban (csak az ember tud evezni). Ha valamelyik parton a kecske és a káposzta az ember nélkül marad, akkor a kecske megeszi a káposztát. Ha valamelyik parton a kecske és a farkas az ember nélkül marad, akkor a farkas megeszi a kecskét. Az ember meg akarja tartani a káposztát és a kecskét is. Milyen „konfigurációkat” enged meg a fejtörő?*

*A konfigurációk alkossák egy egyszerű gráf csúcshalmazát. Két konfiguráció legyen szomszédos, ha egy áttevezéssel egyikből a másikba juthatunk. Rajzoljuk fel az egyszerű gráfot.*

*Válaszoljuk meg, hogy át tudnak-e jutni a másik partra (a cél elérésével). Olvasunk le a gráfról egy átjutási módszert ha van ilyen.*

**4. Feladat.** *Az egyszerűsített Hanoi tornyai játékban van három pöcök és három alacsony, különböző átmérőjű henger, amelyek közepén lyuk van, így a pöckökre rátehető. A játék minden pillanatában úgy vannak a pöckökön a hengerek, hogy egy pöckön a nagyobb átmérőjű henger alacsonyabban van. Hány konfigurációja van a játéknak?*

A konfigurációk alkossák egy egyszerű gráf csúcshalmazát. Két konfiguráció legyen szomszédos, ha egy henger áthelyezésével az egyikből a másikba jutunk. Rajzoljuk fel az egyszerű gráfot.

Válaszoljuk meg, ha az összes henger az első pöckön van, akkor egyesével mozgatva őket elérhetjük-e, hogy a második pöckre kerüljön az összes. A gráfról olvassunk le egy átrakási módot is, ha van rá lehetőség.

**5. Feladat.** Interneten keressük meg a naftalin, fenantrén és bifenil szerkezetét leíró gráfokat. Keressünk meg minél több molekulát leíró gráfot.

**6. Feladat.** (i) A  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  halmazon hány egyszerű gráf adható meg?  
 (ii) Ezek között hány  $m$  élű gráf van?

\* \* \*

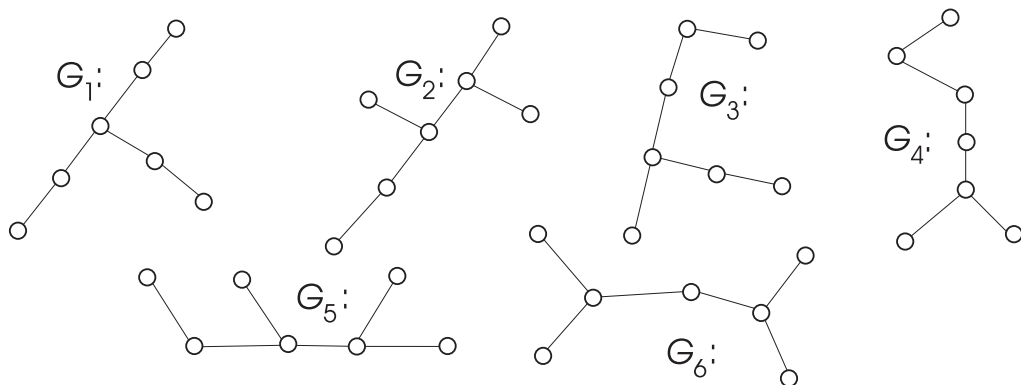
Egyszerű gráfok esetén két egyszerű gráf izomorf, ha pontjaik megfeleltethetők úgy, hogy az egyikben két pont pontosan akkor legyen összekötve, amikor a nekik megfelelő pontok a másikban.

A formális definíció mögött rejlő fogalom egyszerű és érdemes „megbarátkozunk” vele. Egy értelmezése lehet, hogy a  $G$  és  $H$  gráfok izomorfak, ha  $G$  pontjai és élei átnevezhetők úgy, hogy ezek után  $H$ -hoz jussunk. Ha  $G$  és  $H$  lerajzolásukkal adottak, akkor  $G$  és  $H$  izomorfája azt jelenti, hogy  $G$  lerajzolásában szereplő pontok és élek folytonosan deformálhatóak úgy, hogy a különböző csúcsok különböző pontokba kerüljenek, és  $H$  lerajzolásához jussunk.

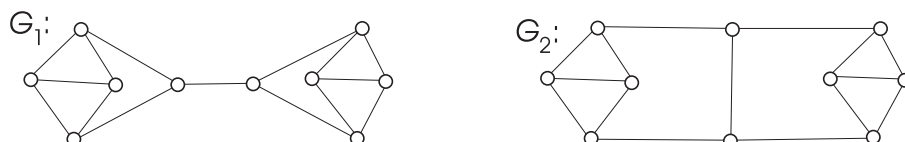
Érdeemes (habár nem szükséges számunkra) a fogalmat kiterjeszteni tetszőleges gráfokra.

Két gráfot izomorfának nevezünk, ha pontjaik és éleik megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy egy illeszkedő pont-él párnak megfeleltetett pont-él pár is illeszkedjen. Formálisan:  $G$  és  $G'$  két izomorf gráf, ha léteznek  $\varphi: V(G) \rightarrow V(G')$  és  $\psi: E(G) \rightarrow E(G')$  kölcsönösen egyértelmű ráképezések (bijekciók) úgy, hogy  $x \in V(G)$  akkor és csak akkor illeszkedik az  $e \in E(G)$  élre, ha  $\varphi(x)$  illeszkedik a  $\psi(e)$  élre. Ha  $G$  és  $H$  izomorf, akkor ezt  $G \simeq H$ -val jelöljük.

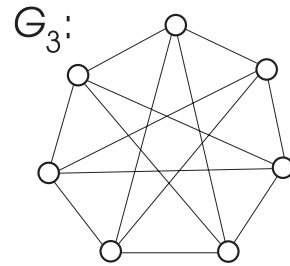
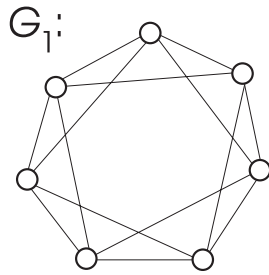
**7. Feladat.** A következő gráfok közül melyek izomorfak?



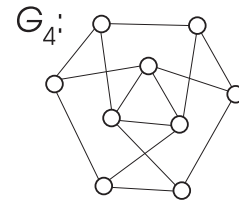
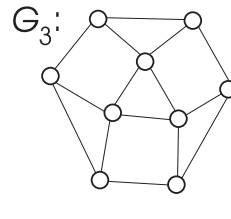
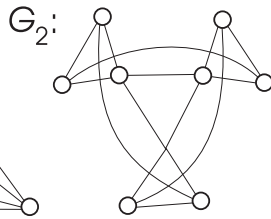
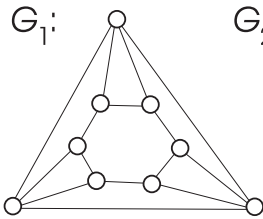
**8. Feladat.** Izomorf-e a következő két gráf?



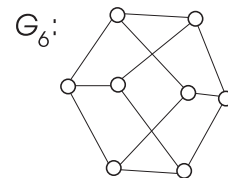
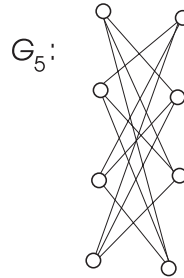
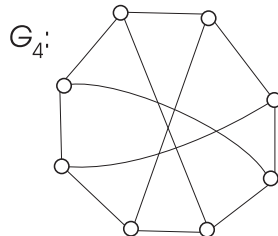
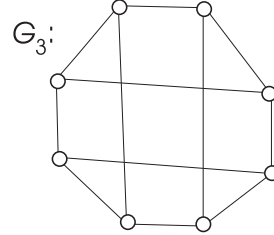
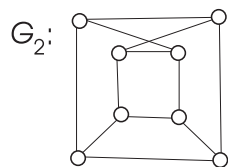
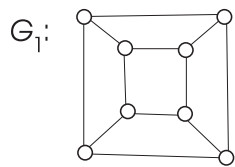
9. Feladat. A következő két gráf izomorf-e?



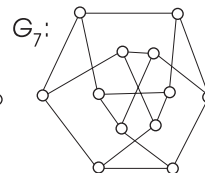
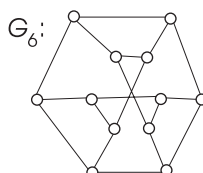
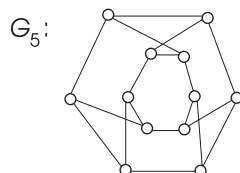
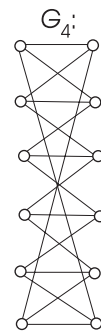
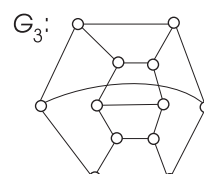
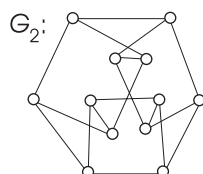
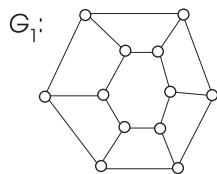
10. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



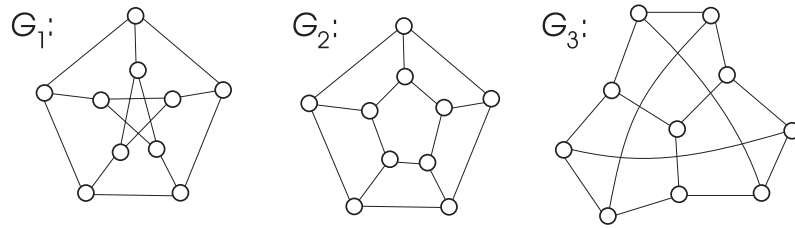
11. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



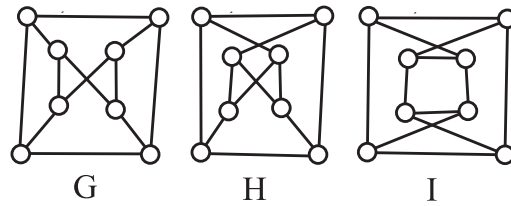
12. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



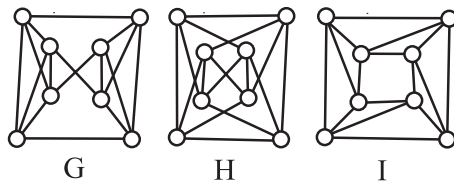
13. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



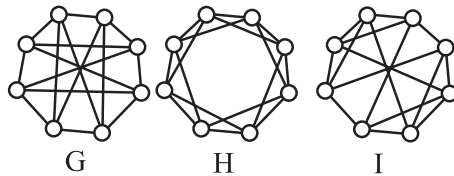
14. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



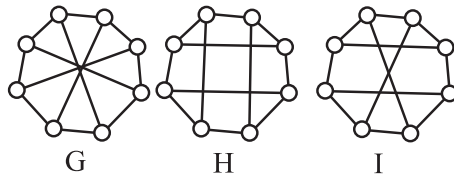
15. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



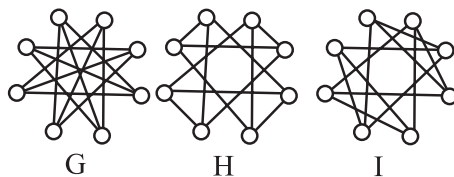
16. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



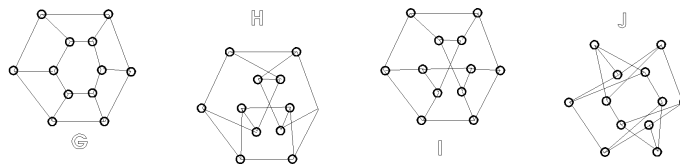
17. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



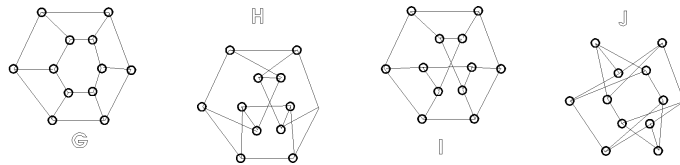
18. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



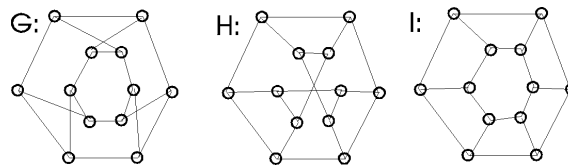
19. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



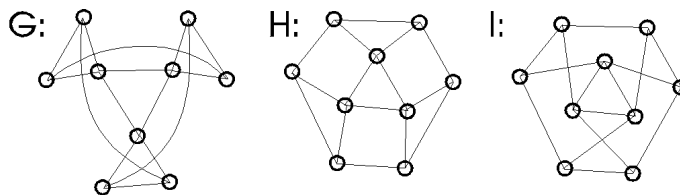
20. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



21. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



22. Feladat. A következő gráfok közül melyek izomorfak?



\*                      \*                      \*

Egy gráf élei az összekötött két csúc között valamilyen kapcsolatot írnak le (szomszédság, ismerettség, kémiai kötés, üzleti kapcsolat, vezetékes összekötöttség ...). Gyakran a kapcsolat nem szimmetrikus (például az „ismerni” reláció valójában ilyen, ahogy az autós közlekedés egyirányú utcái is). Ezen esetek leírására a gráf fogalmat módosítani kell/lehet.

Egy irányított gráf egy  $V$  csúc- és egy  $E$  élhalmaz két relációval. A  $K$  és  $B$  relációk pontok-élek közötti relációk ( $B, K \subset V \times E$ ).  $vKe$  esetén azt mondjuk, hogy a  $v$  csúcsból kifut az  $e$  él.  $vBe$  esetén azt mondjuk, hogy a  $v$  csúcsba befut az  $e$  él. Az irányított gráfsághoz az szükséges, hogy minden  $e$  élhez pontosan egy csúc legyen amiből kifut és pontosan egy csúc legyen, amibe befut.

Ha egy  $\vec{G}$  irányított gráf  $K$  és  $B$  relációját egy  $I$  illeszkedési relációba olvasszük össze ( $vIe$  akkor és csak akkor, ha  $vKe$  vagy  $vBe$ ) akkor egy  $G$  gráfot kapunk. Azt mondjuk  $\vec{G}$  irányított gráf irányítását elhagyjuk. Ha egy  $G$  gráf minden élére a ráilleszkedő két csúc közül az egyiket kezdő-, a másikat végső-csúcsnak nevezzük ki, akkor egy  $\vec{G}$  irányított gráfhoz jutunk. Azt mondjuk  $\vec{G}$  irányított gráf a  $G$  gráf egy irányítása.

Egy irányított gráf lerajzolása egy gráf lerajzolás, ahol minden él esetén a két végpontja között a kezdő és végső szerepet egy nyíllal szemléltetjük. Az irányítás elhagyása a lerajzolás szintjén a nyilak letörlése.

A gráfoknál bevezetett fogalmak természetes módon kiterjeszthetők vagy módosíthatók irányított gráfok esetére. Csak néhány példát adunk. Egy irányított gráf éle hurokél, ha ugyanabból a csúcsból fut ki, ahová befut. Két él párhuzamos, ha ugyanabból a csúcsból futnak ki és ugyanabba a csúcsba futnak be. Azaz két csúcs között futó két él, amelyek oda-vissza (ellentétesen) vannak irányítva NEM párhuzamosak. Irányított gráfokban a fokszám finomított a gráf esethez képest.  $d^{ki}(u)$  az  $u$  csúcs kifoka, azon élek száma, amelyek kifutnak belőle (amire  $K$  relációval illeszkedik).  $d^{be}(u)$  az  $u$  csúcs befoka, azon élek száma, amik belefutnak (amire  $B$  relációval illeszkedik).

**23. Feladat.** *Igaz-e, hogy egy egyszerű gráf tetszőleges irányításával egy egyszerű irányított gráfhoz jutunk? Igaz-e, hogy egy egyszerű irányított gráf irányításának elhagyásával egy egyszerű gráfhoz jutunk?*

**24. Feladat.** *Legyen  $G$  gráf egy  $n$  pontú egyszerű gráf, amelyben minden pontpár között halad él. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  irányítható úgy, hogy a kapott  $\vec{G}$  irányított gráfban tetszőleges  $k$  pozitív egész esetén ne legyenek olyan  $v_1, \dots, v_k$  pontok, hogy  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1 \in E(\vec{G})$  teljesüljön.*

**25. Feladat.** *Hányféle irányítása lehet egy  $G$  gráfnak?*

**26. Feladat.**  $\vec{G}$  a  $G$  gráf egy irányítása. Bizonyítsuk be, hogy  $d_G(x) = d_{\vec{G}}^{ki}(x) + d_{\vec{G}}^{be}(x)$ .

**27. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy  $\sum_{x \in V(\vec{G})} d^{ki}(x) = \sum_{x \in V(\vec{G})} d^{be}(x) = |E(\vec{G})|$ .*

**28. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy  $\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2|E(G)|$ .*

**29. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy minden társaságban azoknak a száma, akik páratlan sok embert ismernek, páros szám.*

**30. Feladat.** *Van-e olyan egyszerű gráf, illetve tetszőleges gráf, amely pontjainak foka:*

(i)  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

(ii)  $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$

(iii)  $3, 3, 3, 3, 3, 3, 5$ .

**31. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy egy legalább 2 pontú egyszerű gráfban mindig található két olyan pont, amelyek fokszáma ugyanannyi.*

*Igaz marad-e az állítás, ha nem egyszerű gráfokat is tekintünk?*

**32. Feladat.** *Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze.*

**33. Feladat.** Egy kocka éleit tetszőleges módon megszámozzuk az 1-től 12-ig terjedő egész számokkal. Ezek után a kocka minden csúcsába felírjuk az ebbe a csúcsba vezető élek számainak összegét.

- a) Bizonyítsuk be, hogy a csúcsokhoz írt számok nem lehetnek mind egyenlők.  
 b) Vajon egyenlők lehetnek-e ezek az összegek, ha az egyik élre írt számot 13-mal helyettesítjük?

**34. Feladat.** Egy  $20 \times 20$  darab pontból álló négyzetrács pontjai közül bizonyosakat pirosra, a többieket kékre színezzük. A pontok színezése a következő módon meghatározza a négyzetrács szomszédos pontjait összekötő szakaszok színezését: Ha két szomszédos rácspontot azonos színűre színeztünk, akkor az őket összekötő szakaszt is kiszínezzük a közös színre. Ha két szomszédos rácspont különböző színt kapott, akkor összekötő szakaszuk fekete marad.

A piros pontok száma 219, közülük 39 a határon van, de a négy sarok kék. A fekete szakaszok száma 237. Határozzuk meg a kék szakaszok számát.

**35. Feladat.** Tíz csapat körmérkőzést játszik. Mindegyik pár pontosan egyszer mérkőzik, és a mérkőzések nem végződhetnek döntetlenül. Győzelemért 1 pont jár, vereségért 0. Bizonyítsuk be, hogy a csapatok pontszámainak négyzetösszege nem lehet több 285-nél.

**36. Feladat.** Egy pingpongbajnokságon a tíz résztvevő közül mindenki egyszer játszott mindenkivel. Az egyes versenyzők győzelmeinek és vereségeinek száma legyen rendre  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , illetve  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + \dots + y_{10}^2.$$

**37. Feladat.** A  $K_n, \vec{K}_n, C_n, \vec{C}_n, P_n, \vec{P}_n, S_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gráfoknak hány éle és hány pontja van?

**38. Feladat.** Egy sakkversenyen  $n$  nő és  $2n$  férfi vett részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Nem volt döntetlen, és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint  $7 : 5$ . Mekkora az  $n$ ?

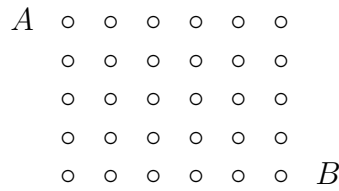
★

Egy gráf gyakran olyan helyzetbe ír le, ahol a csúcsok „résztvevőket” jelentenek és kétféle résztvevő van (szolgáltató/felhasználó, gyár/raktár, tanár/diák stb.) és az élek olyan kapcsolatokat írnak le, amely két résztvevője két különböző fajtájú csúcs. Az ilyen gráfokat **párosnak** vagy **kétrészesnek** nevezzük. Formálisan  $G$  páros gráf, ha  $V(G) = A \cup B$  és minden élenek egyik végpontja  $A$ -beli, másik végpontja  $B$ -beli. (Speciálisan egy párosgráfban nemlehet hurok).

Középiskolai feladatokban a kétféle csúcs gyakran a megfogalmazásban fiú/lány szereplőkkel van kódolva.

**39. Feladat.** A  $K_n, C_n, S_n, P_n$ , ( $n, m = 1, 2, \dots$ ) gráfok közül melyek párosak?

**40. Feladat.** Az alábbi ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az  $A$ -val jelölt fán egy cinke, a  $B$ -vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár tőle északi, déli, keleti vagy nyugati irányban álló legközelebbi fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

**41. Feladat.** Legyen  $G$  egy páros gráf  $A$  és  $B$  színosztályokkal. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{v \in A} d(v) = \sum_{v \in B} d(v) = |E(G)|.$$

**42. Feladat.** Egy klubesten hét lány és hét fiú vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az est folyamán hány különböző partnerrel táncolt. A cédulákon rendre a

$$3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,$$

számok szerepeltek. — Bizonyítsuk be, hogy valaki tévedett.

**43. Feladat.** Van-e olyan páros gráf, illetve egyszerű páros gráf, amelyek fokszám-sorozata az alábbi

(i)  $1, 2, 3, 4, 4$

(ii)  $2, 3, 3, 6, 9, 15?$

**44. Feladat.** Legyen  $d_k$  egy városban azon házak száma, amelyekben legalább  $k$  ember él ( $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots$ ). Legyen  $c_i$  az  $i$ -edik házban lakó emberek száma, ahol a házak a lakók száma szerint rendezettek ( $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots$ ). Bizonyítsuk be, hogy

a)  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$ ,

b)  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \dots + (2k - 1)d_k + \dots$ ,

c)  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots = c_1 + 3c_2 + 5c_3 + \dots + (2k - 1)c_k + \dots$ .

**45. Feladat.** Egy körmérkőzéses sakkbajnokságon két ország mindegyikéből  $n$  versenyző vett részt. A verseny befejeztével nem volt két azonos pontszámú versenyző. Bizonyítsuk be, hogy az indulók között volt olyan, aki saját honfitársai ellen legalább annyi pontot szerzett, mint a másik ország képviselői ellen.

**46. Feladat.** Adott néhány pont, amelyek közötti szakaszok két színnel (pirossal és kékkel) vannak kiszínezve. Tudjuk, hogy bárhogyan vesszük is a szakaszok által alkotott zárt töröttvonalak egyikét, az ebben előforduló piros szakaszok száma páros. Bizonyítsuk be, hogy a pontok két részre oszthatók úgy, hogy a piros szakaszok pontosan a különböző osztálybeli pontokat összekötő szakaszok legyenek.

★

Egy gráf **reguláris**, ha minden csúcsának ugyanannyi a foka. Ha a fokok közös  $k$  értékét hangsúlyozni szeretnénk, akkor azt mondjuk, hogy gráfunk  **$k$ -reguláris**.



**47. Feladat.** A  $K_n, C_n, S_n, P_n, K_{n,m}$  ( $n, m = 1, 2, \dots$ ) gráfok közül melyek regulárisak?

**48. Feladat.** A síkon adott 1991 pont, amelyeket kiszínezünk piros, fekete és zöld színekkel (mindegyik színt felhasználjuk). A különböző színű pontpárok némelyikét összekötjük egy szakasszal úgy, hogy minden pontból ugyanannyi szakasz induljon ki. Bizonyítsuk be, hogy van olyan piros pont, amely fekete és zöld ponttal is össze van kötve.

**49. Feladat.** Egy  $k$ -reguláris egyszerű gráfnak hány pontja lehet?

**50. Feladat.** Milyen  $k$ -ra létezik egy körvonalon

- a) 10,
- b) 100,
- c)  $n$

ív úgy, hogy mindegyik pontosan  $k$  másikat metsszen?

★

Egy gráfból egy  $e$  él elhagyása/törlése azt jelenti, hogy az élhalmazból kihagyjuk az  $e$  élt. A maradék élek két végpontja ugyanaz marad. Egy gráfból egy  $u$  csúcs elhagyása/törlése azt jelenti, hogy a csúcshalmazból kihagyjuk  $u$ -t és az élhalmazból kihagyjuk azokat az éleket, amelyek illeszkednek  $u$ -ra. A maradék élek két végpontja ugyanaz marad.

Egy  $G$  gráfnak az  $R$  gráf **részgráfja**, ha csúcsok és élek elhagyásával megkapható  $R$  a  $G$ -ből. Egy  $G$  gráfnak az  $S$  gráf **feszített részgráfja**, ha csúcsok elhagyásával megkapható  $S$  a  $G$ -ből. Egy  $G$  gráfnak az  $F$  gráf **feszítő részgráfja**, ha élek elhagyásával megkapható  $F$  a  $G$ -ből.

**51. Feladat.** Az eddigiekkel összhangban definiáljuk irányított gráfok részgráfjait.

**52. Feladat.** A  $K_n, C_n, S_n, P_n, K_{n,m}$  ( $n, m = 1, 2, \dots$ ) gráfok között határozzuk meg az összes párt úgy, hogy az egyik a másik részgráfja legyen (azaz az egyik tartalmazzon a másikkal izomorf részgráfot). Határozzuk meg az összes párt úgy, hogy az egyik a másik feszített részgráfja legyen.

**53. Feladat.** Egy  $5 \times 5$  méretű telket 25 darab  $1 \times 1$  méretű parcellára osztottunk. Van 25 manó, akik közül mindegyik legfeljebb három másikat utál (az utálat kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy a manók elhelyezhetők az egyes parcellákban úgy, hogy egyikük sem utálja a szomszédait. (Két parcella szomszédos, ha van közös határszakaszuk.)

★

Egy egyszerű  $G$  gráf  $\overline{G}$  **komplementere** az a gráf, amely csúcshalmaza ugyanaz mint  $G$ -é, de két csúcs akkor és csak akkor szomszédos, ha nem volt az  $G$ -ben.

**54. Feladat.** Tudjuk, hogy  $G$  izomorf a komplementerével. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  pontszáma  $4k$  vagy  $4k + 1$  alakú.

**55. Feladat.** *Adjuk meg az összes 4, illetve 5 pontú gráfot, amelyek izomorfak komplementerükkel.*

★

Egy  $G$  gráf  $L(G)$  **élgráfja** az a gráf, amely csúcsait  $G$  élei alkotják és  $e, f$  két élgráfbeli csúcs/két  $G$ -beli él akkor és csak akkor összekötött, ha van közös végpontjuk.

**56. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy egyetlen  $G$  gráf élgráfja sem tartalmaz  $S_3$  gráfot (három élű csillag) feszített részgráfként.*

**57. Feladat.** *Adjunk meg olyan gráfot, amely az  $S_3$  gráfot nem tartalmazza feszített részgráfként, és egyetlen gráfnak sem élgráfja.*