KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Séta, út, vonal, kör

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2020.

1. Feladat. *Legyen G egy gráf. Az a, b pontokra azt mondjuk, hogy a-ból* **elérhető** *b, ha a-ból vezet séta b-be. Jelöljük ezt a relációt $a \sim b$-vel. Ekkor*

(i) $a \sim a$,

(ii) $a \sim b$ *esetén* $b \sim a$,

(iii) $a \sim b, b \sim c$ *esetén* $a \sim c$.

2. Feladat. *Határozzuk meg a következő gráfokban a $\sim$ elérhetőségi relációt:*

(i) A G egyszerű gráf csúcsai $\{1, 2, \ldots, n\}$. i és j összekötött, ha $i = j+2 \pmod n$ vagy $j = i + 2 \pmod n$.

(ii) A G egyszerű gráf csúcsai $\{1, 2, \ldots, n\}$. i és j összekötött, ha $i = j+3 \pmod n$ vagy $j = i + 3 \pmod n$.

(iii) A G egyszerű gráf csúcsai egy sakktábla 64 mezője. Két mező összekötött, ha egy futó az egyikről a másikra léphet.

(iv) A G egyszerű gráf csúcsai egy sakktábla 64 mezője. Két mező összekötött, ha egy huszár az egyikről a másikra léphet.

(v) Oldjuk meg az előző feladatot $n \times k$ méretű tábla esetére is.

3. Feladat. *(i) Bizonyítsuk be, hogy egy G gráf pontjait $V_1, \ldots, V_k$ osztályokba sorolhatjuk (azaz minden pont beletartozik valamelyik osztályba, és mindegyik csak egy osztályba tartozik) oly módon, hogy V_i-n belül bármely két pont összeköthető legyen úttal, és különböző osztálybeli pontok között ne vezessen út.*

(ii) A fenti tulajdonságú osztályozás egyértelmű.

4. Feladat. *Legyen x egy tetszőleges pontja a G gráfnak. G pontjait szintekre osztjuk: $S_0 = \{x\}$; S_1 az x szomszédainak halmaza; ha az i-edik szintet, S_i-t már definiáltuk, akkor S_{i+1} tartalmazza $V(G) \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_i)$-ből — azaz az eddig be nem sorolt pontok közül — azokat, amelyek S_i valamely pontjával szomszédosak. Bizonyítsuk be, hogy*

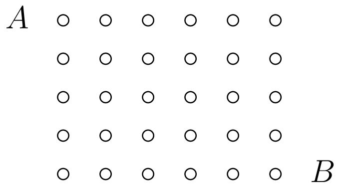
(i) a G gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha az összes pontot besoroltuk valamely szintre,

(ii) a szintekre besorolt csúcsok pontosan az x csúcs komponensének csúcsai,

(iii) y akkor és csak akkor van az i-edik szinten, ha létezik i hosszú xy út, de i-nél rövidebb már nem létezik.

5. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.*

6. Feladat. *Az alábbi ábrán látható karikák egy telken levő gyümölcsfákat jelölik.*



Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

7. Feladat. *Lehet-e egy összefüggő gráf fokszámsorozata a következő:*

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3?$$

8. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfban minden pont foka legfeljebb 2, akkor ez út vagy kör.*

9. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy G vagy $\overline{G}$ összefüggő.*

10. Feladat. *Egy országban N város van.*

a) Bármely két város hajó- vagy repülőúttal van összekötve. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható az egyik közlekedési eszköz úgy, hogy csak ezeket felhasználva bármely két város között lehessen közlekedni (természetesen átszállás megengedett).

b) Bármely két város egy hajó-, repülő- vagy vasúttal van összekötve. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható egy közlekedési eszköz és $N/2$ város úgy, hogy az $N/2$ város között a választott eszközzel közlekedni lehessen.

c) Adjunk egy példát, ami azt mutatja, hogy a b) rész állítása „éles" (azaz az állításban szereplő $N/2$ szám nagyobbal nem helyettesíthető).

11. Feladat. *Egy országban több, mint száz város van a fővárost nem számolva. A főváros száz másik várossal van összekötve, és a többi város mindegyikéből tíz másikba lehet utazni. Tudjuk, hogy bármely két város közt lehet utazni. Bizonyítsuk be, hogy a fővárosból kiinduló utak fele lezárható úgy, hogy még mindig lehessen bármely két város között utazni.*

12. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy G összefüggő gráf egy köréből elhagyunk egy élt, akkor a maradék gráf is összefüggő lesz.*

13. Feladat. *Ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf összefüggő.*

14. Feladat. *(i) Bizonyítsuk be, ha egy egyszerű gráfnak*

$$\frac{(|V(G)|-1)(|V(G)|-2)}{2}+1$$

éle van, akkor az összefüggő.

(ii) Igaz-e (i) állítása, ha az egyszerű gráfnak csak

$$\frac{(|V(G)|-1)(|V(G)|-2)}{2}$$

éle van?

15. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor nem erősen összefüggő, ha a G irányított gráf pontjai két nemüres A, B részre oszthatók úgy, hogy az A és B közti élek kezdőpontjai A-ban legyenek.*

16. Feladat. *Egy városban terek és tereket összekötő, már nem kereszteződő utcák vannak. Minden térre legalább három utca fut be, és minden utca „egyirányúsítva" van. Tudjuk, hogy bármely térről bármely másikra eljuthatunk. Bizonyítsuk be, lezárható egy utca úgy, hogy továbbra is bármely térről bármely térre eljuthassunk.*

17. Feladat. *Irányítható-e minden összefüggő gráf úgy, hogy a kapott irányított gráf erősen összefüggő legyen?*

18. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy összefüggő G gráfban nincs olyan él, amelynek elhagyása után megszűnne az összefüggősége, akkor irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen.*

19. Feladat. *Legyen $\overrightarrow{G}$ a K_n teljes gráf ($n \geq 7$) egy irányítása. Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{G}$ nem erősen összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{G}$-nek van olyan pontja, hogy az erre illeszkedő élek irányítását megfordítva egy erősen összefüggő gráfot kapunk.*

Igaz marad-e az állítás, ha $n = 6$?

20. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek, azaz az egyik akkor és csak akkor teljesül egy gráfra, ha a másik is.*

(i) G fa,

(ii) G összefüggő és nincs benne kör,

(iii) G-ben nincs kör, de bármely élt hozzáadva lesz benne.

(iv) Bármely két pontot pontosan egy út köt össze.

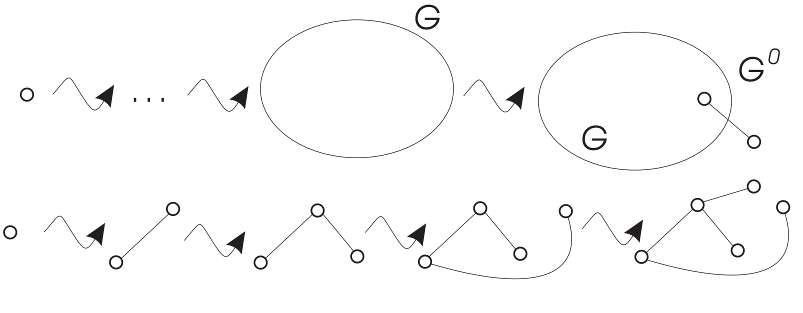
21. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy legalább 2 pontú fában van legalább két elsőfokú csúcs.*

22. Feladat. *a) Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú fának $n-1$ éle van.*

b) Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú G gráf akkor és csak akkor fa, ha összefüggő és $n-1$ éle van.

c) Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú G gráf akkor és csak akkor fa, ha $n-1$ éle van, és nincs benne kör.

23. Feladat. *Egy „gráfépítési módszert" definiálunk. Kiindulunk egy pontból. Felveszünk egy új pontot, és összekötjük az előzővel. Ha már van egy G gráfunk, akkor erre úgy építkezünk, hogy egy új pontot felveszünk, és a régi gráf pontosan egy pontjával kötjük össze. Az általános séma és egy konkrét példa az alábbi ábrán látható.*



Bizonyítsuk be, hogy ezzel az építkezési módszerrel csak fákat kaphatunk, és az összes fa megkapható alkalmas sorozattal.

24. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy fa automorfizmusának van fixpontja vagy fixéle.*

25. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ élű fa élhalmaza felbontható n darab diszjunkt párra, ahol egy párban szomszédos élek szerepelnek.*

26. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy n pontú fában ($n \geq 4$) nincs másodfokú pont, akkor a fának legalább $2^{n/2}$ darab részfája van.*

27. Feladat. *(i) Bizonyítsuk be, hogy egy fa összefüggő részgráfja is fa.*

(ii) Legyenek $T_1, \ldots, T_k$ egy T fa összefüggő részgráfjai. Bizonyítsuk be, ha bármelyik két T_i és T_j fának van közös pontja, akkor van olyan pont, amely az összes T_i-n rajta van.

28. Feladat. *(i) Egy n-szöget ($n \geq 4$) egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk. Definiálunk egy gráfot, ennek csúcsai a felbontás háromszögei. Két háromszöget összekötünk, ha van közös oldaluk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf fa.*

(ii) Bizonyítsuk be, hogy a fenti felosztásban legalább két olyan háromszög is van, amelynek két oldala is az eredeti sokszög oldalai közül kerül ki.

29. Feladat. *Egy G gráfban nincs kör, G komponenseinek száma c. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek száma $n - c$.*

30. Feladat. *k skatulya közül bizonyosokba (egy-egy) kisebb méretű skatulyát tettünk, ezek közül bizonyosokba ismét (egy-egy) kisebb méretű skatulyákat raktunk és így tovább. Ezek után megszámláltuk, hány olyan skatulyánk van, amelyben legalább egy további skatulya van. Azt találtuk, hogy m ilyen van. Hány skatulyánk van összesen?*

31. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú összefüggő gráfnak van n pontú farészgráfja.*

32. Feladat. *(i) Bizonyítsuk be, hogy egy G összefüggő gráfnak legalább $|V(G)|-1$ éle van.*

(ii) Határozzuk meg, legalább hány éle van egy n csúcsú összefüggő gráfnak, ha tudjuk, hogy a gráf minden éléhez van ezt tartalmazó 3 hosszú kör.

33. Feladat. *Egy n pontú teljes gráf éleit — felváltva egy-egy élt — A és B kiszínezi pirosra. Az veszít, aki elsőként hoz létre piros színű kört. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha A kezdi a játékot?*

34. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább kétpontú összefüggő gráfból elhagyható egy pont (természetesen az ebből kiinduló élekkel) úgy, hogy a maradék gráf is összefüggő legyen.*

35. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha G összefüggő, akkor tetszőleges $x, y, z \in V(G)$-re:*

(i) $d(x, y) \geq 0$, és egyenlőség csak $x = y$ esetben áll fenn,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

36. Feladat. *Legyen G egy összefüggő gráf. Legyen $D(x, y)$ az x, y pontok között vezető legtöbb élű út hossza. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:*

(i) $D(x, y) \geq 0$, *és egyenlőség csak $x = y$ esetben teljesül,*

(ii) $D(x, y) = D(y, x)$,

(iii) $D(x, y) + D(y, z) \geq D(x, z)$.

37. Feladat. *Egy kör alakú tó partján városok vannak. A városok között hajójáratok vezetnek úgy, hogy az A és B városok között akkor és csak akkor van hajó összeköttetés, ha a tőlük jobbra lévő A' és B' szomszédjaik között nincs hajójárat. Bizonyítsuk be, hogy bármely két város között utazhatunk hajóval, legfeljebb két átszállással.*

38. Feladat. *Egy város alakja konvex sokszög, utcái az átlók, és kereszteződéseik az átlók metszéspontjai. (Nincs három átló, amelyek egy pontban metszik egymást.) A városban bevezetik a villamosközlekedést úgy, hogy egy villamosvonal egy utca, és minden kereszteződésben megállója van az ott áthaladó vonal(ak)nak. Minden kereszteződésben legalább egy utcán megy villamos. Bizonyítsuk be, hogy bármely kereszteződésből eljuthatunk bármely másikba legfeljebb két átszállással.*

39. Feladat. *Egy bolha a derékszögű koordináta-rendszer egész koordinátájú pontjain ugrál. Mindig egy szomszédos rácspontra ugrik a tengelyekkel párhuzamosan. Hány különböző helyen lehet száz ugrás megtétele után, ha tudjuk, hogy most az origóban van?*

40. Feladat. *Egy országban n város van, bármely két város között vezet egy egyirányúsított közvetlen út. Bizonyítsuk be, hogy kijelölhető egy város úgy, hogy minden más város elérhető ebből legfeljebb egyetlen másik város érintésével.*

41. Feladat. *Legyen G egy irányított gráf. Bizonyítsuk be, hogy kijelölhető egy A ponthalmaz úgy, hogy ezen belül ne haladjon él, de minden A-n kívüli pont elérhető legyen egy A-beli pontból legfeljebb 2 hosszú irányított úttal.*

42. Feladat. *Definiáljuk az irányított séta, vonal, út, körséta, körvonal, kör fogalmát.*

43. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek, azaz az egyik akkor és csak akkor teljesül egy G gráfra és két pontjára (u és v), ha a másik kettő is:*

(i) G-ben létezik uv séta,

(ii) G-ben létezik uv vonal,

(iii) G-ben létezik uv út.

44. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G gráfra a következők ekvivalensek:*

(i) G-ben létezik körvonal,

(ii) G-ben létezik kör.

45. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G gráfra és egy v csúcsra a következők ekvivalensek:*

(i) G-ben létezik v-n átmenő körvonal,

(ii) G-ben létezik v-n átmenő kör.

46. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G gráfra és egy e élre a következők ekvivalensek:*

(i) G-ben létezik e-n átmenő körvonal,

(ii) G-ben létezik e-n átmenő kör.

47. Feladat. *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a fenti négy feladat irányított változatát.*

$\star$

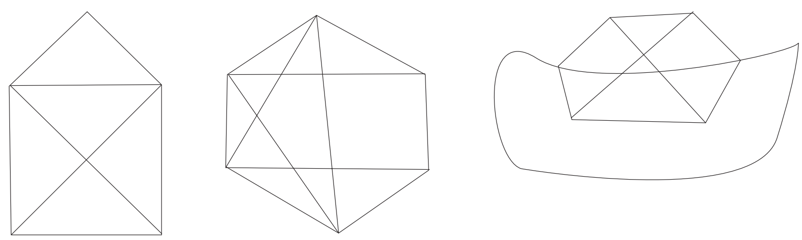
48. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha G bármely két pontja közt van út, és maximum két pontja páratlan fokú.*

49. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler körvonal, ha G bármely két pontja közt van út, és minden pontja páros fokú.*

50. Feladat. *A következő gráfok közül melyekben van Euler-vonal, és melyekben van Euler-körvonal?*

$$K_n, \quad K_{n,m}, \quad S_n, \quad P_n, \quad C_n.$$

51. Feladat. *Lerajzolhatók-e az alábbi ábrán látható alakzatok ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalat egyszer és csak egyszer húzunk meg?*



52. Feladat. *Legyen V egy olyan vonal, amely lerajzolható ceruzánk felemelése nélkül is a kezdőpontba való visszatéréssel (egy szakaszon csak egyszer haladhatunk végig). Bizonyítsuk be, hogy ez a lerajzolás úgy is elvégezhető, hogy nemcsak nem emeljük fel ceruzánkat, de a rajzolás során nem is metsszük át a már megrajzolt részt (azaz másképpen kifejezve: amikor egy kereszteződésen halad át ceruzánk, akkor az áthaladás „lekerekíthető" úgy, hogy az így módosított vonal egyáltalában ne metssze önmagát).*

53. Feladat. *Egy G gráfban $2k$ $(k \geq 1)$ pontnak van páratlan foka, és bármely két pont között van út. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab diszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is?*

54. Feladat. *Legyen G egy olyan gráf, amelynek bármely két pontja között vezet út. Legyen S egy olyan séta, amely az összes élt tartalmazza, és minimális hosszú. Bizonyítsuk be, hogy S egyetlen élen sem halad át kettőnél többször.*

55. Feladat. *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az irányított Euler-vonalak és irányított Euler-körvonalak létezésére vonatkozó szükséges és elegendő feltételeket.*

56. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy gráf minden pontjának foka páros, akkor irányítható úgy, hogy minden csúcs esetén a befutó élek száma megegyezzen a kifutó élek számával, azaz $d^+(x) = d^-(x)$ legyen minden x csúcsra.*

$\star$

57. Feladat. *Ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább d, akkor létezik benne d hosszú út.*

58. Feladat. *q darab kétszemélyes csapatot állítunk össze n játékosból (egy játékos több csapatban is lehet). A csapatokat megszámozzuk 1-től q-ig. Legyen $m = \lceil 2q/n \rceil$. Bizonyítsuk be, hogy kiválaszthatunk m csapatot úgy, hogy számaik szerint növekvő sorrendbe rakva őket mindegyik csapat esetén az egyik tag az előző, a másik tag a következő csapatban is szerepel (az első és az utolsó csapat esetén persze csak az egyik feltételt tesszük fel).*

59. Feladat. *Ha egy G gráf minden foka legalább 2, akkor van benne kör.*

60. Feladat. *Ha egy n pontú G gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.*

61. Feladat. *Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van egy olyan oszlopa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak nincs két egyező sora.*

62. Feladat. *Egy bajnokságon 16 teniszező indult, mindenki mindenkivel egyszer játszott. Tegyük fel, hogy bármely tíz versenyzőt kiválasztva ezek körbe állíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a jobb oldali szomszédját.*

a) Lehetséges-e a játszmák ilyen kimenetele?

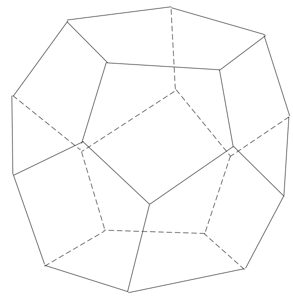
b) Mutassuk meg, hogy ha a fenti feltétel teljesül bármely tíz versenyzőre, akkor teljesül bármely 11-re is.

$\star$

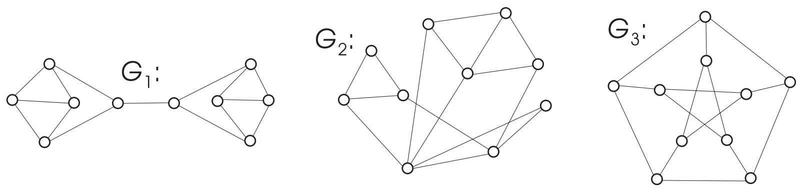
63. Feladat. *Bejárható-e a sakktábla lóugrással úgy, hogy minden mezőre egyszer és csak egyszer lépjünk, és visszatérjünk a kiinduló mezőre?*

64. Feladat. *Bástyával bejárható-e az $n \times m$-es sakktábla úgy, hogy minden mezőre egyszer és csak egyszer lépjünk, és visszatérjünk a kiinduló mezőre?*

65. Feladat. *Húsz város között az alábbi ábrán látható módon vannak utak (ezek egy dodekaéder élei). Bejárható-e a húsz város úgy, hogy a kiindulópontba érjünk vissza, mindegyik városon csak egyszer haladjunk át, és a városok között az utakon haladjunk?*



66. Feladat. *Van-e az alábbi ábrán látható gráfoknak Hamilton-köre?*



67. Feladat. *Elhelyezhetők-e egy kör kerületén az* $1, 2, \ldots, 12, 13$ *számok úgy, hogy bármely két szomszédos szám különbsége abszolút értékben legalább 3 és legfeljebb 5 legyen?*

68. Feladat. *Egy* 6×6*-os sakktábla minden mezőjén áll egy törpe. A törpék egy adott mezőről csak a vele élben szomszédos mezők valamelyikére léphetnek. Mely törpék juthatnak el a jobb alsó sarokba úgy, hogy útközben a* 36 *mező mindegyikén egyszer és csak egyszer haladhatnak át?*

69. Feladat. *Egy szabályos háromszög oldalait* n *részre osztjuk. Az osztáspontokon keresztül párhuzamosokat rajzolunk az oldalakkal. Így az eredetit* n^2 *kisebb háromszögre osztottuk. A kis háromszögek sorozatát láncnak nevezzük, ha az egymás utáni háromszögeknek van közös oldala, és nincsenek közöttük ismétlődőek. Határozzuk meg azt a legnagyobb számot, amennyi háromszögből álló lánc létezik.*

70. Feladat. *(a) Bizonyítsuk be, hogy* K_n *minden irányításának van irányított Hamilton-útja.*

(b) Adjunk K_n*-nek irányítást úgy, hogy a kapott irányított gráfban ne legyen irányított Hamilton-kör.*

71. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha* K_n*-t úgy irányítjuk, hogy minden pontjából minden pontjába eljuthatunk irányított úton, akkor* K_n *ezen irányításának van irányított Hamilton-köre.*

72. Feladat. *Legyen* P *egy út egy egyszerű gráfban, amely utolsó* e *éle a* z *csúcsba vezet.* z*-ből egy* e*-től eltérő* f *él* P *egy csúcsába vezet. Igazoljuk, hogy gráfunkban van egy másik út is, amely ugyanabból a pontból indul ki mint* P *és ugyanazokat a csúcsokat járja be. Igazoljuk, hogy ezen út választható úgy, hogy végpontja* z*-től eltérő legyen. Egy ilyen utat* P **csavarásának** *nevezünk.*

73. Feladat. *Legyen G egy egyszerű gráf, amely minden csúcsa legalább a csúcsok felével szomszédos. Legyen P egy út, amley nem járja be azösszes csúcsot. Igazoljuk, hogy P vagy egy csavart változata olyan, hogy utolsó csúcsának van P-n kívüli pontja.*

74. Feladat. *Legyen G egy egyszerű gráf, amely minden csúcsa legalább a csúcsok felével szomszédos. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.*

Igazoljuk azt is, hogy van olyan Hamilton-út, amely két végpontja összekötött.