KOMBINATORIKA GYAKORLAT

osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Alapelvek

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2020

1. Feladat. *Egy kirándulásra készülünk és a hátizsákunkba pakolunk. Otthon három szelet csokink van: egy Boci, egy Tibi és egy Balaton. Valamennyit beleteszünk a hátizsákunkba (esetleg egyet se, esetleg mindet). Soroljuk fel a lehetőségeinket.*

2. Feladat. *(folytatás) Hány lehetőségünk van az előző feladat helyzetében, ha öt fajta csokoládénk van otthon (mindegyikből egy-egy szelet)?*

Egy barátunkkal/barátnőnkkel megyünk kirándulni. Tudjuk, hogy ő nem pakol csokoládét. Hogy erre felkészüljünk páros sok csokoládészeletet szeretnénk elvinni. Hány lehetőség van az elvivendő csokoládészeletek összeállítására?

3. Feladat. *(folytatás) A kirándulásra egy gyümölcskosarat is viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van. Ebből kell összeállítanunk a kosarat. Az egyforma gyümölcsök teljesen egyformák. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár? (Ismét számoljuk azt a lehetőséget is, amikor nem viszünk semmit sem.)*

⋆ ⋆ ⋆

4. Feladat. *Az* $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ *halmaznak hány részhalmaza van? Ezek közül hány elemszáma páros? Ezek közül hány olyan van, amelynek elemeit összeadva páros számot kapunk?*

5. Feladat. *Az* $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ *halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot? Hány részhalmaz tartalmaz páros sok páratlan számot? Hány részhalmaz lesz olyan, hogy páros és páratlan értékű elemeinek száma ugyanolyan paritású?*

6. Feladat. *Ha* M *egy egész számokból álló véges halmaz, akkor jelöljük* $S(M)$*-mel azt az összeget, amelyet úgy kapunk, hogy* M *elemeit csökkenő sorrendbe rendezzük, és a tagokat felváltva pozitív és negatív előjellel látjuk el. Például*

$$S(\{1, 2, 5, 6, 9\}) = 9 - 6 + 5 - 2 + 1 = 7, \qquad S(\{3\}) = 3.$$

Mekkora az $S(M)$ *összegek összege, ha* M *befutja az* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *halmaz összes nemüres részhalmazát?*

7. Feladat. *Legyen* H *és* H' *két* n *elemű halmaz. Igazoljuk, hogy* H*-nak és* H'*-nek ugyanannyi részhalmaza van.*

8. Feladat. *Legyen* R_n *egy* n *elemű halmaz részhalmazainak száma. Így* R_{n+1} *egy* $n + 1$ *elemű halmaz részhalmazainak száma. Mi a kapcsolat* R_{n+1} *és* R_n *között? Válaszunkat indokoljuk.*

9. Feladat. *Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?*

10. Feladat. *n különböző csokoládészeletet két csoportba osztunk. Hányféle módon tehetjük ezt meg?*

⋆ ⋆ ⋆

11. Feladat. *Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. Hányféle módon vehetjük egy részét ennek?*

12. Feladat. *A fenti feladatban szereplő gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (egyik csoport lehet üres is). Hányféle módon tehetjük ezt meg?*

13. Feladat. *Egy vendéglő menű étlapján háromféle leves és hatféle második fogás található.*

(i) *Hányféle menű állítható össze?*

(ii) *Desszertként lehet választani kétféle gyümölcs és háromféle édességből egyet. Hányféle desszertes menű lehetséges?*

14. Feladat. *Legyen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ egy pozitív egész. Hány pozitív osztója van n-nek?*

⋆ ⋆ ⋆

15. Feladat. *Hány totó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztos legyen* $13 + 1$*-es találatunk?*

16. Feladat. *Van* 20 *szál különböző virágunk és* 5 *különböző vázánk. Hányféleképpen tehetjük a vázákba a virágszálainkat? (Váza maradhat üresen is.)*

17. Feladat. *Írjuk fel az első* 2018 *pozitív egész számot egy üres lapra. Hány számjegyet írtunk fel? Ezek közül hány* 1*-es van? Mi a helyzet a többi számjeggyel?*

18. Feladat. *Hány $n \times m$-es* 0-1 *mátrix van? Ezek közül hány olyan van, amelyben minden sor- és oszlopösszeg páros?*

Az összes $n \times n$-es 0-1 *mátrix között hány szimmetrikus van?*

19. Feladat. *Hány hétjegyű pozitív egész szám van? Ezek közül hány olyan amelyik nem változik, ha jobbról balra olvassuk el? Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelyik nem változik, ha jobbról balra olvassuk el?*

Hány legfeljebb hétjegyű pozitív egész szám van?

20. Feladat. *A Hanoi-tornyok játék három pöcökből (bal, közép, jobb) és n különböző átmérőjű lapos hengerből áll, amely hengerek közepén olyan lyuk van, amely megengedi a pöckökre való ráhelyezést. A játék egy konfigurációjában minden henger egy-egy pöckön van úgy, hogy a nagyobb átmérőjű henger lejebb legyen. Hány konfigurációja van a játéknak?*

21. Feladat. *n pózna áll az út mentén. k fajta színből van festékünk. Mindegyik póznát ki kell színeznünk valamelyik színnel. Hányféleképpen tehető ez meg?*

Hány lehetőségünk van, ha semelyik két szomszédos póznát nem akarjuk ugyanarra a színre színezni.

22. Feladat. *n pózna áll egy kör alakú út mentén. A póznák egy szabályos n-szög csúcsaiben helyezkednek el. k fajta színből van festékünk. Mindegyik póznát ki kell színeznünk valamelyik színnel. Hányféleképpen tehető ez meg?*

Tegyük fel, hogy n prímszám. Mi a helyzet, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg? Azaz ekkor hány különböző lehetőségünk van?

23. Feladat (Kis Fermat-tétel). *Igazoljuk, hogy p prímszámra, tetszőleges a pozitív egész esetén $p|a^p - a$.*

24. Feladat. *n ismerősünknek szeretnénk képeslapokat küldeni. A bolt, ahol megvesszük ezeket k-féle képeslapot tart (mindegyik fajtából elég van).*

a) Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik ismerősünknek egy lapot küldünk?

b) Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha ragaszkodunk ahhoz, hogy ismerőseink különböző lapokat kapjanak?

c) Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik ismerősünknek két-két lapot küldünk úgy, hogy mindegyiknek küldött két lap különböző legyen?

25. Feladat. *A standard magyar rendszám három betűt tartalmaz az angol ábécéből, amit három számjegy követ. Hány standard rendszám lehetséges Magyarországon?*

26. Feladat (Kalmár László verseny, 5. osztály, 2003 döntő). *Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből hány páros szám készíthetö, ha mindegyik számjegyet legfeljebb egyszer használhatjuk fel?*

27. Feladat (Varga Tamás verseny,7. osztály, 1992 3. forduló). *Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával ötjegyű számokat képezhetünk.*

a) Hány különböző ötjegyű szám van?

b) Ezeket a számokat nagyság szerint növekvő sorrendbe állítva, melyik szám áll a 82. helyen?

28. Feladat (Varga Tamás verseny, 7. osztály, 2001 1. forduló). *Hány olyan 4-gyel osztható ötjegyű természetes szám van, amelyek az $1, 2, 3, 4$ és 5 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza?*

29. Feladat (Varga Tamás verseny, 8. osztály, 1994 3. forduló). *Hány olyan különbözö számjegyekböl álló négyjegyű szám van, amelyben két számjegy páros, két számjegy páratlan?*

30. Feladat (Varga Tamás verseny, 7. osztály, 1997 2. forduló). *Dobókockával dobunk háromszor egymás után.*

a) Hányféle háromjegyű számot kaphatunk így?

b) Ezek közül hány osztható 5-tel, és hány 9-cel?

31. Feladat. *Tízsszer egymás után feldobunk egy érmét. Hány kimenetel lehetséges? Ebből hányszor lesz két azonos dobás közvetlen egymás után?*

Tízsszer egymás után feldobunk egy kockát. Hány kimenetel lehetséges? Ebből hányszor lesz olyan dobás-sorozat, amelyben van hatos?

32. Feladat. *Hány $n \times m$ méretű 0-1 mátrix van? Hány n hosszú számsorozat van, ha számainak a $\{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$ halmazból kerülnek ki?*

33. Feladat. *Legyen k és ℓ két természetes szám. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b pozitív egész esetén*

a) $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$,

b) $(a^k)^\ell = a^{k\ell}$,

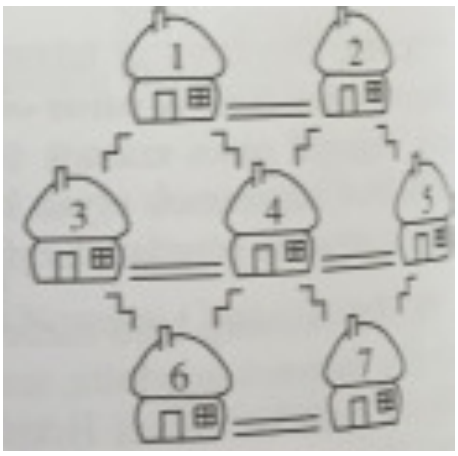
c) $a^k \cdot b^k = (ab)^k$.

Érvelésünk legyen kombinatorikus. Azaz tűzzünk ki egy összeszámlálási problémát, amelyre kétféle érveléssel tudunk válaszolni. Egyik érvelés a bal, a másik a jobb oldali kifejezést adja válaszként.

34. Feladat. *Egy húsz fős osztályban egyik órán párokban kell dolgozni (tíz párt kell kialakítani). Hányféleképpen lehet ezt megtenni?*

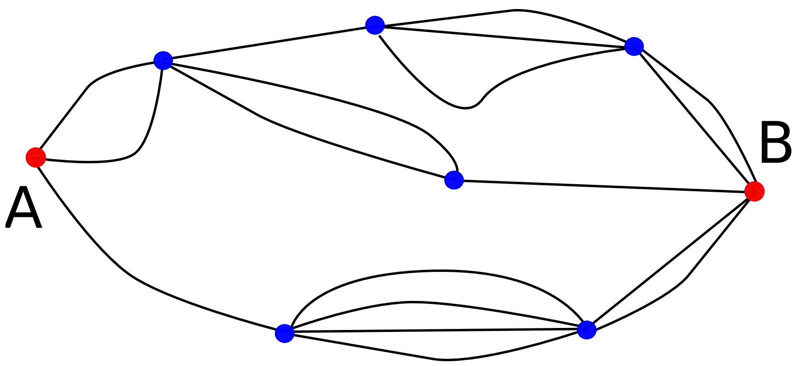
Óra után fényképekedik az osztály. Két tízes sorba kell állniuk úgy, hogy a hátsó sor mind a tíz gyereke előtt alacsonyabb gyerek álljon. Hányféle fénykép készülhet? (A gyerekek mind különböző magasságúak.)

35. Feladat (Abacus, A. 877). *A Törpdombon 7 új lakóház épült. A különböző szinteken lévő házakat lépcsők, az azonos szinteken lévőket pedig járdák kötik össze.*



Hányféle útvonalon juthat el az 1. számú ház lakója a 7. számúhoz, ha a lépcsőn csak lefelé mehet és egy járdán nem halad kétszer végig.

36. Feladat. *Az alábbi térképpel leírt területen a jelzett utakon haladva A-ból B-be kell eljutnunk.*



Hány lehetőségünk van, ha nem térhetünk vissza egy már elért csomópontba?