

Kombinatorikai fogalomtár

A \bullet jelzi egy definíció kezdetét. \bullet^* különösen fontos definíció kezdetét jelzi. A \circ magyarázat, elnevezés, olvasat, példa kezdete. Ezeket nem kell a megfelelő definícióhoz leírni. Leírása általában túlmagyarázást, félrebeszélést jelent. A leírtak nem egy „szentírás”. Sokféle megfogalmazás lehet. Vigyázzunk azonban arra, hogy szavaink súllyal bírnak. Én csak a leírtakat tudom figyelembe venni. Kihagyott, elírt jelzők a definíciókat értelmetlenné, hamissá tehetik. Ha valaki több módon ki tudja fejezni magát, akkor azt írja le, amelyik számára a legtermészetesebb, kézenfekvő. Több helyes definíció megadása nem jelent több pontot. Két helyes és egy helytelen definíció megadása egyértelművé teszi, hogy a hallgató nem érti a fogalmat.

Összeszámlálási alapfogalmak

- * Egy $f : A \rightarrow B$ leképezés **bijekció**, illetve **párbaállító leképezés**, ha f az A halmaz különböző elemeihez különböző elemeket rendel és B minden eleme előáll képként.
 - $\circ f(a) = b \in B$ elemet $a \in A$ párjának nevezzük. a a b elem párja.
- * **I. kombinatorikus alapelv:** Két halmaz akkor és csak akkor azonos elemszámú ha van köztük párbaállító leképezés.
 - $[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{1, 2\}$, ..., $[n] = \{1, 2, \dots, n\} = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$, ... **standard véges** halmazok.
 - H halmaz **véges**, ha valamelyik standard véges halmazzal párbaállítható.
 - Az A_1, A_2, \dots, A_n **halmazok páronként diszjunktak**, ha mindegyik elem legfeljebb egyiknek eleme.
 - \circ Alternatív módon: semelyik kettőnek sincs közös eleme.
- * **II. kombinatorikus alapelv:** A_1, A_2, \dots, A_n páronként diszjunkt halmazok esetén

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

- Az A_1, A_2, \dots, A_n **halmazok Descartes-szorzata** az a halmaz, amely pontosan azokat az (a_1, a_2, \dots, a_n) elem n -eseket tartalmazza, amelyekre $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$. A Descartes-szorzat jelölése $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.
- * **III. kombinatorikus alapelv:** A_1, A_2, \dots, A_n halmazok esetén

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

- Egy H halmaz esetén $\binom{H}{k}$ azt a halmazt jelöli, amely elemei pontosan H -nak k -elemű részhalmazai.
- * $\binom{n}{k}$ egy n -elemű halmaz k -elemű részhalmazainak száma.
- * M egy **multihalmaz** a H halmaz felett, ha M egy H elemeihez természetes számokat rendelő leképezés.
 - $\circ M(h)$ a h elem multiplicitása az M multihalmazban. Például egy molekula egy multihalmaz a periódusos rendszer elemei felett. H_2O multihalmazban/molekulában H /hidrogén 2 multiplicitással szerepel, O /oxigén 1 multiplicitással szerepel. Fe /vas multiplicitása 0. Például egy szó betűkészlete multihalmaz az ábécé elemei felett. A *Mississippi* szóbetűkészletében M multiplicitása 1, w multiplicitása 0, i multiplicitása 4. Egy pozitív egész prímtényező felbontása egy multihalmaz a prímszámok \mathbb{P} halmaza felett. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ felbontásban 2 multiplicitása 3, 7-é 1, 17-é 0.
- Legyen M egy multihalmaz a H halmaz felett. Az M **multihalmaz elemszáma**

$$\sum_{h: h \in H} M(h).$$

- M és N multihalmaz (a H halmaz felett). M **rész-multihalmaz** N -nek, ha $M \leq N$, azaz minden $h \in H$ elemre $M(h) \leq N(h)$.
- * $\binom{n}{k}$ a k elemű multihalmazok száma egy n elemű halmaz felett.
- * Egy H n -elemű **halmaz sorbaállítása** egy $\pi : [n] = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow H$ bijekció.

- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ a sor pozíciói, H elemei a sorbaállított objektumok. $\pi(i) = h$ jelentése: „az i -edik pozícióba a h elem került”.
- * Egy H feletti n -elemű M **multihalmaz sorbaállítása** egy $\pi : [n] = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow H$ függvény, amelyre teljesül, hogy

$$|\{i \in [n] : \pi(i) = h\}| = M(h).$$

- A formula jelentése: „azon pozíciók száma, ahova egy h elem kerül éppen annyi mint a h elem multiplicitása M -ben (ahányszor előfordul h az M -ben)”. π egy függvény, a korábbi függvényeinkről sokszor feltettük, hogy bijekció. Itt NEM, π bijekciónak titulálása sértés. A fogalom meg nem értését jelenti (mint máskor a bijektív tulajdonság fel nem tüntetése). Egy tanárnak ezen kis különbségeket éreznie kell, hogy meggyőzően taníthasson.
- * Egy H **halmaz permutációja** egy $\pi : H \rightarrow H$ bijekció.
- * Egy H **halmaz körökbe állítása** H elemeinek diszjunkt nem üres osztályokba sorolása és minden osztályon belül az elemek egy körszerű elrendezése (jobb oldali és baloldali szomszédok kijelölése, hogy egy kör alakú asztal melletti ülésrend alakuljon ki).
 - Egy H halmaz körökbe állítása esetén $h \mapsto$ „ h jobb szomszédja” egy permutációja a H halmaznak. Megfodítva egy permutáció esetén $h \in H$ jobb oldalára állítva $\pi(h)$ -t, majd annak jobbára állítva $\pi(\pi(h))$ -t, és így tovább, kialakul egy kör. Ezt minden elemre megtéve H egy körökbe állítását kapjuk. Azaz a permutációk és a körökbe állítások ugyanazok. Ha egy permutációra mint körökbe állításra tekintünk, akkor a köröket úgy hívjuk, hogy a **permutáció ciklusai**.
- Egy **rekurzív szabály/rekurzió** véges sok szám sorozatához rendel egy új értéket. Speciálisan az üres sorozathoz is rendel egy számot.

Egy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat eleget tesz egy **rekurzív szabálynak/rekurzióknak**, ha minden elemének értéke az, amit a szabály hozzárendel/előír a korábbi értékek sorozatához.
- A **lineáris rekurzió** egy olyan rekurzió, amelyhez létezik egy k természetes szám és k darab szám/együttható úgy, hogy a rekurzív szabály „ha az aktuális pozíció előtt van legalább k tag, akkor az előző k tagot rendre súlyozd az adott együtthatókkal és a súlyozott elemeket add össze”.
 - Például $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Ekkor $k = 2$, azaz a sorozat minden tagja (a harmadiktól kezdve) az előző kettőből kiszámolható úgy, hogy az előző háromszorosát és a másod előző -2 -szeresét összeadjuk. Például $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$. Ekkor $k = 3$, azaz a sorozat minden tagja (a negyediktől kezdve) az előző háromból kiszámolható úgy, hogy az előző háromszorosát, a másod előző 0 -szorosát és a harmad előző -2 -szeresét összeadjuk.
 - Ha adott egy lineáris rekurzió (egy konkrét k értékkel) és adott a sorozat első k tagja, akkor ezen információ elég a sorozat leírására. A fenti információ definiál egy sorozatot: **lineáris rekurzióval definiált sorozat**. Az első k tag felírása, majd a szabály ismételt alkalmazása tetszőleges elem egyértelmű meghatározását lehetővé teszi.
- Az $F_0 = 0, F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ha $n \geq 2$) lineáris rekurzió által definiált sorozat a **Finonacci-sorozat**.

Gráfelmélet

- * Egy **egyszerű gráf** egy $G = (V, E)$ pár, ahol V egy véges csúcshalmaz, amely elemeit csúcsoknak/pontoknak nevezzük, E pedig G élhalmaza: bizonyos csúcspárok, amelyeket éleknek nevezünk.
 - Jelöléssel $E \subseteq \binom{V}{2}$.
- * Egy **gráf** egy $G = (V, E, I)$ hármas, ahol V egy véges csúcshalmaz, E egy véges élhalmaz, I pedig egy illeszkedési reláció V és E között (egy $e \in E$ élre illeszkedő $v \in V$ csúcsok az e él végpontjai), amelyre teljesül, hogy minden élnek kettő (esetleg egybeeső) végpontja van.
 - Egy e él **összeköti** két végpontját. Egy e él két végpontja **szomszédos**. Egy v csúcsnak egy u csúcs **szomszédja**, ha van olyan él, amely két végpontja u és v .
- Egy e él **hurokél**, ha két végpontja egybeesik.
- e és f élek **párhuzamos élek**, ha e két végpontja megegyezik f két végpontjával.

- Az egyszerű gráfok és a hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfok azonosíthatók (ennek megfelelően egyként kezeljük őket).
- G és H két egyszerű gráf **izomorf**, ha van olyan $\alpha : V(G) \rightarrow V(H)$ bijekció, hogy $x, y \in V(G)$ akkor és csak akkor szomszédos, ha $\alpha(x), \alpha(y) \in V(H)$ szomszédos.
 - Az izomorfizmus jelölése: $G \simeq H$.
- * Egy G gráf v csúcsának **foka**

$$|\{e \in E : e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő NEM-hurokél}\}| + 2|\{e \in E : e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő hurokél}\}|.$$

- Egy G gráfbeli v csúcs fokát $d(v)$ vagy $d_G(v)$ -vel (annak megfelelően, hogy az alapgráfot szeretnénk-e hangsúlyozni).
- Ha G egy hurokélmentes gráf, akkor egy csúcsának foka a v -re illeszkedő élek száma.
- Ha G egy egyszerű gráf, akkor egy csúcsának foka a szomszédai száma.
- * Egy **séta** a G gráfban egy

$$\mathcal{S} : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$$

sorozat, ahol (1): v_0, v_1, \dots, v_ℓ csúcsok, e_1, \dots, e_ℓ élek, továbbá (2): e_i két végpontja v_{i-1} és v_i minden $i = 1, 2, \dots, \ell$ esetén.

- A fenti \mathcal{S} **séta hossza** ℓ , azaz a séta élsorozatának hossza.
 - A fenti \mathcal{S} séta hossza megkapható úgy is, hogy a séta csúcssorozatának hosszából levonunk egyet. Egy séta hossza lehet 0 is.
 - A fenti \mathcal{S} séta kiinduló csúcsa v_0 , végső csúcsa v_ℓ . Azt mondjuk \mathcal{S} egy $v_0 v_\ell$ séta. Azt mondjuk \mathcal{S} v_0 -ból v_ℓ -be vezet. Azt mondjuk \mathcal{S} séta összeköti v_0 -t és v_ℓ -t
- * Egy **sétálás** esetén van egy $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$ idő paraméter. $t = 0$ időpillanatban egy v_0 csúcsban állunk, az i -edik időpillanatban ($i = 0, 1, \dots, \ell - 1$) a v_i csúcsban állunk és választunk egy v_i -re illeszkedő e_{i+1} élt. Az $i + 1$ idő pillanatra áthaladunk az e_{i+1} élen (a sétálás egy lépése). Ekkor az e_{i+1} él v_i melletti, másik végpontjába kerülünk; ez lesz v_{i+1} .
 - Nyilván minden séta felfogható egy sétálásnak és egy sétálás meghatároz egy sétát. Ugyanarról szól a két fogalom két szemlélet szerint: a statikus és a dinamikus szerint.
- * Egy G gráfban az **elérhetőségi reláció** egy reláció a csúcsok között. u és v csúcsok elérhetőségi relációban állnak (jelölésben $u \sim v$) ha u -ból elsétálhatunk v -be.
- * Egy gráf akkor és csak akkor gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el tudunk sétálni.
- * Egy **gráf komponenseit** úgy kapjuk meg, hogy vesszük az elérhetőségi reláció egy ekvivalenciaosztályát és a köztük lévő éleket.
 - Egy gráf akkor összefüggő, ha egy komponense van.
- * Egy séta **vonallal**, ha élsorozatában nincs ismétlődés.
 - Egy **mohó vonal növelés** olyan sétálás, ahol minden lépésnél olyan élt választunk, amelyen korábban nem haladtunk át.
- * Egy séta **úttal**, ha csúcssorozatában nincs ismétlődés.
 - Egy **mohó út növelés** olyan sétálás, ahol minden lépésnél olyan élt választunk ami eddig nem látogatott csúcsba vezet.
 - Egy séta **záródó**, ha kezdő és végső csúcsa megegyezik.
- * Egy $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ séta **kör**, ha $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell$ egy út ($\ell \geq 1$), e_ℓ egy új (eddig nem szereplő) él, és $v_\ell = v_0$.
 - A definíció szerint minden körben lennie kell élnek (séta, vonal, út esetén ez nem szükségszerű). $v_\ell = v_0$ miatt egy kör NEM út. A záródó út egy önellentmondás, ha hossza legalább 1. A 0 hosszú út záródó, de nem kör, mert nincs éle. Ha egy élen oda-vissza lépünk, akkor egy kettő hosszú záródó sétát kapunk. Ez nem kör, mert a záródást okozó él nem új él, hanem egy eddig szereplő él.
- Egy gráf **fa**, ha összefüggő és körmentes gráf.
 - A fák alternatív módokon is definiálhatók. Ezek ismerete szükséges is. A fa definiálásánál azonban csak egyet írjunk csak le. Néhány alternatív definíció: (i) T fa, ha összefüggő, de bármely élt elhagyva összefüggősége megszűnik. (ii) T fa, ha nincs benne kör, de bármely két meglévő csúcsát egy új éllel összekötve keletkezik benne kör. (iii) T fa, ha bármely két csúcsa között pontosan egy út van.

- * Ha G -ből \tilde{G} -t úgy kapjuk, hogy G csúcsait, éleit (a köztük lévő illeszkedéssel) megtartjuk és egy u új csúcsot és egy e új élt hozzáadunk, amely e él egyik végpontja u a másik G egy csúcsa, akkor azt mondjuk, hogy \tilde{G} -t G -ből **ághajtás operációval** kaptuk.
 - Egy fa egy csúcsa **levél**, ha foka 1.
- * Egy **gyökeres fa** egy (T, r) pár, ahol T fa és r egy gyökérnek nevezett kitüntetett csúcs.
- * Egy gyökeres fában x **csúcs fia** egy olyan y csúcs, ami szomszédja neki és a gyökértől messzebb van mint x (a gyökérbe vezető egyetlen út y -ből hosszabb mint x -ből). Ekkor azt is mondjuk, hogy x az y **csúcs apja**.
 - Minden nem-gyökér csúcsnak van apja és ez egyértelmű. Legalább egy csúcs van, amelynek nincs fia (persze sok is lehet). Olyan csúcsok is lehetnek, amelyeknek sok fiúk van.
- Egy **gyökeres fában egy levél** olyan csúcs, amelynek nincs fia.
- Egy G gráfban egy e **él elhagyásával/törlésével nyert $G - e$ gráf**, az a gráf amely csúcsai G csúcsai, élei $E(G) - \{e\}$ és minden élének ugyanaz a két végpontja mint G -ben.
- Egy G gráfban egy v **csúcs elhagyásával/törlésével nyert $G - v$ gráf**, az a gráf amely csúcsai $V(G) - \{v\}$ elemei, élei $E(G)$ v -re nem illeszkedő elemei és minden élének ugyanaz a két végpontja mint G -ben.
 - Az R gráf a G **gráf részgráfja**, ha csúcsok és élek elhagyásával megkapható G -ből.
 - Az R gráf a G **gráf feszített részgráfja**, ha csúcsok elhagyásával megkapható G -ből.
 - Az R gráf a G **gráf feszítő részgráfja**, ha élek elhagyásával megkapható G -ből.
- * Egy G **gráf feszítőfája** egy olyan fa részgráf, amely G összes csúcsát tartalmazza.
- * Egy **Euler-vonal** olyan vonal, amely minden csúcsot és élt meglátogat.
 - Azaz egy séta Euler-vonal, ha minden élen pontosan egyszer halad át és minden csúcsot meglátogat.
- * Egy út **Hamilton-út**, ha csúcissorozata az összes csúcsot tartalmazza.
- * Egy kör **Hamilton-kör**, ha csúcissorozata az összes csúcsot tartalmazza.
- * A G **gráf egy (csúcs)színezése** egy $c : V(G) \rightarrow P$ függvény, ahol P -re mint paletta, elemeire mint színekre hivatkozunk.
- * Egy G gráf egy c színezése **jó színezés**, ha minden élre a két végpontjához c különböző színeket rendel.
- * G **gráf kromatikus száma** az a minimális szám, amekkora méretű palettával jól kiszínezhető.
- * Egy $K \subset V$ csúcshalmaz **klikk egy gráfban**, ha K bármely két különböző eleme szomszédos.
 - Egy $F \subset V$ egy **független csúcshalmaz egy gráfban**, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F -beli.
- * Egy $M \subset E$ élhalmaz **párosítás**, ha azon pontok száma, amelyek valamelyik M -beli élre illeszkednek $2|M|$.
- * Egy $L \subset V$ csúcshalmaz **lefogó (csúcs)halmaz**, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L -beli.
- * Egy G gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba vannak sorolva (esetleg két osztályba vannak sorolhatók) úgy, hogy minden élnek egyik végpontja az egyik, a másik végpontja a másik osztályba essen.
- K_n az n pontú **teljes gráfot** jelöli, azaz azt az egyszerű gráfot, amelyben bármely két különböző pont összekötött.