Rekurzió

Hajnal Péter

2021. tavasz

Rekurzió: Példák

- Rekurzióval már többször találkoztunk. Idézzünk fel néhány példát.

Példa

Hány részhalmaza egy n elemű halmaznak? Legyen r_n a kérdésre a válasz. Ekkor

$$r_0 = 1, \qquad r_n = 2r_{n-1} \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Példa

Hányféleképpen állíthatók sorba egy n elemű halmaz elemei? Legyen s_n a kérdésre a válasz. Ekor

$$s_0 = 1, \quad s_n = n \cdot s_{n-1} \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Rekurzió: Példák (folytatás)

Példa

Hányféleképpen játszhat körjátékokat n gyerek? Legyen p_n a kérdésre a válasz. Ekkor

$$p_0 = 1, \quad p_n = n \cdot p_{n-1} \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Példa

Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Tegyük fel (feltehetjük) hogy $0 \leq k \leq n$. Legyen $\binom{n}{k}$ a válasz. Ekkor

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } 0 < k < n.$$

- A fenti példák mindegyikében egy számsorozat illetve egy számtáblázat adta meg a választ. Egy szabályt adtunk meg, amely kérdéses számok elhelyezésében minden pozícióra megmondta, hogy az ott álló érték hogyan számolható ki a korábbi elemekből.

Rekurzió: Szöveges példák

Példa

Az $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ elemeit egy sorba felírva képzeljük el. A sorozat kielégíti az alábbi szabályt: „ Ha a bal oldali pozícióban állunk, amitől balra egyetlen elem sincs írva, akkor ott egy 1-esnek kell állni. Ha tőle balra áll egy szám, akkor jelen helyen a balszomszéd duplája áll.”

• A szabály ismételt alkalmazásaival balról jobbra sorrendben számainkat kiszámolhatjuk. A sorozat tetszőleges pozíciójához eljuthatunk és az ott álló elemet megkaphatjuk:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots$$

Rekurzió: Szöveges példák (folytatás)

Példa

Az$\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ elemeit egy sorba felírva képzeljük el. A sorozat kielégíti az alábbi szabályt: „ Ha a bal oldali pozícióban állunk, amitől balra egyetlen elem sincs írva, akkor ott egy 1-esnek kell állni. Ha tőle balra áll egy szám, akkor ott lévő számot úgy kapjuk meg hogy az előtte álló számok számával (a pozíció indexével) megszorozzuk a közvetlen előtte álló számot."

• Például s_3 esetén előtte áll három elem: s_0, s_1, s_2 és így 3-szorozzuk s_2-t.

• A szabály ismételt alkalmazásaival balról jobbra sorrendben számainkat kiszámolhatjuk. A sorozat tetszőleges pozíciójához eljuthatunk és az ott álló elemet megkaphatjuk:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \ldots$$

Rekurzió: Szöveges példák (folytatás)

Példa: Pascal-háromszög

Az $\{\binom{n}{k}\}_{k\leq n=0}^{\infty}$ elemeket egy háromszög alakú táblázatba írjuk. Az $\{\binom{n}{k}\}_{k=0}^{n}$ elemek kerülnek egy sorba. (Ahogy n nő a sorok egyre szélesebbek lesznek.) Ahogy n nő a sorokat úgy írjuk egymás alá, hogy a minden sorban a középső szám, illetve a két középső szám „felező pontja” egy függőleges egyenesre kerüljenek.

„Ha valamelyik sor szélső (első vagy utolsó) pozíciójában állunk akkor ott egy 1-es áll. (Ezen pozíciókra mint a táblázat széle/pereme hivatkozhatunk.) Ha nem ilyen helyen állunk, akkor pozíciónkhoz viszonyítva van egy ÉNy-i és egy ÉK-i szomszéd. Az ott látható számok összege áll az aktuális helyen.”

Rekurzió: Szöveges példák (folytatás)

• A szabály ismételt alkalmazásával soronként balról jobbra, sorok közt fentről lefelé sorba adódnak az értékek. Tetszőleges pozícióhoz eljutunk és az ott álló szám értékét megkapjuk.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Rekurzió: A definíció

Definíció

Egy rekurzió egy szabály, amely véges sok szám sorozatából kiszámol egy értéket.

Egy sorozat kielégít egy rekurziót, ha a sorozat mind pozíciójában az a szám áll, amit a szabály szerint kiszámolunk az előtte álló értékekből.

• Fontos tudni,hogy az üres/0 hosszú számsorozat is véges szám (0 darab) egy sorozata. Szabályunknak/rekurziónknak ekkor is meg kell adni egy értéket.

• Több paraméteres számseregek/számtáblázatoknál is megfogalmazható a rekurzió. Csupán azt kell tisztáznunk, hogy mit értünk előző/korábbi értékeken.

Rekurzió: A tétel

Tétel

Legyen $\mathcal{R}$ egy rekurzió, azaz egy szabály amely véges hosszú számsorozatokhoz rendel egy számot.

Ekkor létezik, pontosan egy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ számsorozat, amely kielégítis $\mathcal{R}$-et.

• **Egzisztencia:** Teljes indukcióval definiálunk egy sorozatot: $a_0 = \mathcal{R}(\varepsilon)$, ahol ε az üres sorozat. Ha $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}$ már definiált, akkor legyen $a_\ell = \mathcal{R}((a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}))$. Az így definiált sorozat megfelelő.

• Megjegyezzük, hogy a bizonyítás értelmezhető egy algoritmusnak is, amely kiszámol egy sorozatot. Nyilvánvaló, de bizonyítani kell, hogy más sorozat nem is lehet jó.

- **Unicitás:** Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ és $(a_i')_{i=0}^{\infty}$ két különböző sorozat, amely kielégíti $\mathcal{R}$ szabályt. Különbözőségük miatt lesz olyan index, ahol értékük eltérő.
- Lesz egy legkisebb ilyen index: j. Tehát $a_0 = a_0', \ldots, a_{j-1} = a_{j-1}'$ és $a_j \neq a_j'$.
- Tudjuk, hogy

$$a_j = \mathcal{R}((a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1})) = \mathcal{R}((a_0', a_1', a_2', \ldots, a_{\ell-1}')) = a_j'.$$

Ellentmondás.

Fibonacci fejtörője

- Fibonacci Liber Abaci (1202) munkájában jelent meg a következő fejtörő.

Fejtörő

Tegyük fel, hogy a nyúlpárok a következő biológiai „törvényeknek” tesznek eleget:

(1) Születésük után egy hónappal válnak ivaréretté.

(2) Ezek után egy hónappal (azaz születésük után két hónappal) egy újszülött nyúlpárnak adnak életet és ezek után havonta ismétlik ezt.

Természetesen az megszült nyúlpárok ugyanezen törvény szerint élnek. Tegyük fel, hogy egy újszülött nyúlpárat kapunk. Nyúltenyészetünk a továbbiakban kívülről nem szaporodik és nem is hullanak el állataink.

Hány nyúlpárunk lesz egy év múlva? És n hónap múlva?

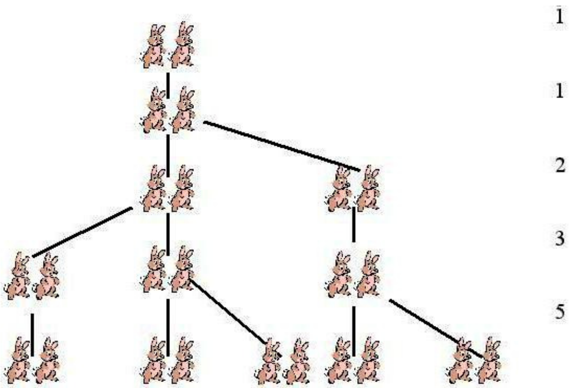
A Fibonacci-sorozat, kezdő tagok

- A fejtörő általános kérdésére a válasz egy sorozat. Ezt a sorozatot nevezik Fibonacci-sorozatnak.

- F_n jelölje a nyúlpáraink számát n hónappal az első pár megkapása után. Azaz $F_0 = F_1 = 1$.

- Az ajándék átvétele után két hónappal azonban a (2) szabály alapján már két nyúlpárunk lesz: $F_2 = 2$.

A nyulak szaporodása ábrán



A sorozat első néhány eleme könnyen leolvasható a rajzról és további elemek is kiszámolhatók.

Az általános egyszerű, csupán összeadásra épülő rekurzív számolási módot az alábbi lemma írja le.

Lemma ? Definíció

Lemma

A sorozat elemei a következő módon írhatók le rekurzíóval:

$$F_0 = F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ ha } n \geq 2.$$

Bizonyítás: n hónap múlva az F_n darab nyúlpárunkat két (diszjunkt) osztályba oszthatjuk: Lesznek újszülöttek és nem újszülöttek.

• A nem újszülöttek száma ugyanannyi mint egy hónappal korábban a nyúlpárok száma (F_{n-1}). Az újszülöttek száma ugyanannyi mint egy hónappal korábban az ivarérett nyúlpárok száma, ami ugyanannyi, mint két hónappal korábban a nyúlpárok száma (F_{n-2}).

• Az összeadási alapelv adja a bizonyítandót.

Szünet

Az $\mathcal{F}_0$ szabály

• Felmerül, hogy keressünk hagyományos formulával történő leírását a Fibonacci-sorozatnak.

• Ez nem olyan egyszerű. Sokkal könnyebb helyzetünk van, ha csak olyan sorozatokat nézünk, amely
$\mathcal{F}_0$: „*HA egy pozícióban van legalább két korábbi eleme a sorozatnak, AKKOR ott az előző két elem összege áll*"
összefüggésnek eleget tesz.

Ez nem egy teljes rekurzió. Ez semmit sem mond a sorozat első két eleméről (így nem is definiál egy egyértelmű sorozatot).

• Bármely két számmal is indítunk egy sorozatot a fenti összefüggést ki tudjuk elégíteni alkalmas folytatással.

• Ez a rugalmasság a következő feladatot egyszerűvé teszi.

$\mathcal{F}_0$ és a mértani sorozatok

Feladat

Keressük meg az összes $\{q^n\}_{n=0}^{\infty} = (1, q, q^2, q^3, \ldots)$ mértani sorozatot, amely kielégíti a $\mathcal{F}_0$ szabályt.

Megoldás: A feladat ilyesztőnek tűnhet, hiszen a szabály a sorozat harmadiktól kezdődő összes pozíciójára az ott álló számra mond egy feltételt: az előző két elem összege.

• Ha ezt felírjuk akkor egy végtelen sok egyenlőséget tartalmazó egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} q^2 = q + 1, \\ q^3 = q^2 + q, \\ q^4 = q^3 + q^2, \\ q^5 = q^4 + q^3, \\ \vdots \end{cases}$$

$\mathcal{F}_0$ és a mértani sorozatok (folytatás)

• Megoldásait pontosan az első egyenlet megoldásai alkotják. Ez pedig egy egyszerű másodfokú egyenlet. Azaz a megoldás $q_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

• Két mértani sorozat létezik:

$$\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4, \ldots\right)$$

és

$$\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4, \ldots\right).$$

$\mathcal{F}_0$ és további sorozatok

- Mit érünk ezzel a Fibonacci-számokra vonatkozó formula keresésénél? Nekünk egy $(1, 1, \ldots)$ kezdetű sorozat a célunk.

Észrevétel

(A) Vegyünk egy a $\mathcal{F}_0$ szabálynak eleget tevő sorozatot és minden elemét szorozzuk be egy α számmal. Így is egy $\mathcal{F}_0$ szabálynak megfelelő sorozatot kapunk.

(B) Vegyünk két $\mathcal{F}_0$ szabálynak eleget tevő sorozatot és megfelelő elemeiket adjuk össze. Így is egy $\mathcal{F}_0$ szabálynak megfelelő sorozatot kapunk.

Fibonacci-számok: A formula

• A két szabály alkalmazásával kapjuk (a fenti feladat megoldása után), hogy

$$\left(\alpha+\beta, \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\beta\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \dots\right)$$

sorozat is eleget tesz szabályunknak, ahol α és β tetszőleges számok.

• α és β választása megtehető úgy, hogy ezen sorozat indítása $(1, 1, \dots)$ legyen:

$$\begin{cases} \alpha+\beta & = 1, \\ \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} & = 1. \end{cases}$$

Fibonacci-számok: A formula (folytatás)

• Némi (kis technikát követelő) számolás után (amely részletezését mellőzzük) kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

• Összefoglalva a

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

sorozat két 1 elemmel kezdődik és eleget tesz szabályunknak.

• Azaz a Fibonacci-számokat definiáló rekurziót teljesíti.

Fibonacci számok: A tétel

Tétel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

• A sorozatot leíró formula összetett, nehezen megjegyezhető.

• Motiváció nélkül vezet be egy más nézőpontból természetes és hasznos fogalmat.

• Nem véletlen, hogy a rekurzió tárgyalásánál szinte mindig az első példák egyike a Fibonacci-sorozat.

Szünet

Újabb példa

Feladat

Adottak a $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ felső félsík egész koordinátájú rácspontjainak halmaza. Ezen sétálunk az origóból indulva a következő szabályok szerint:

(1) Minden lépésünk Ny-i, É-i, K-i szomszéd rácspontba történik.

(2) Sose lépünk oda, ahol már jártunk.

Hány n lépéses sétát tehetünk meg a szabályok betartásával?

- Első lépés, hogy a keresett sorozatot nevezzük el. Legyen a_n az n lépéses séták száma.
- Könnyen látható, hogy $a_0 = 1$, $a_1 = 3$. Kis gondolkodás adja, hogy $a_2 = 7$.

Újabb példa: A rekurzív leírás

Lemma

$a_0 = 1$, $a_1 = 3$, továbbá

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 2.$$

• Minden $n-1$ hosszó séta legalább kétféleképpen folytatható a szabályoknak megfelelően. Tehát $a_n \geq 2a_{n-1}$.

• Pontosabban minden nem É-i lépéssel végződő séta kétféleképpen folytatható. Minden É-i lépéssel végződő séta háromféleképpen folytatható.

• Az É-i lépéssel végződő $n-1$ hosszó séták pontosan annyian vannak mint az $n-2$ hosszó séták. Tehát a_n többlete $2a_{n-1}$-hez képest a_{n-2}.

$\mathcal{R}_0$ és a geometriai sorozatok

$\mathcal{R}_0$: *„HA egy pozícióban van legalább két korábbi eleme a sorozatnak, AKKOR ott az előző elem duplája plusz a másodelőző elem összege áll."*

Feladat

Keressük meg az összes $(1, q, q^2, \ldots)$ mértani sorozatot, amely teljesíti $\mathcal{R}_0$-t.

- A feladat megoldása egyszerű, a $q^2 = 2q + 1$ egyenletet kell megoldani.
- Két mértani sorozat adódik:

$$(1, 1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})^2, (1+\sqrt{2})^3, \ldots)$$
$$(1, 1-\sqrt{2}, (1-\sqrt{2})^2, (1-\sqrt{2})^3, \ldots)$$

Újabb példa: A megoldás

• Ismét igaz, hogy két $\mathcal{R}_0$ tulajdonságú sorozat lineáris kombinációja $\mathcal{R}_0$ tulajdonságú.

• α, β szorzó tényezőket keresünk, amelyekkel kombinálva $1, 3$ kezdetet kapunk. Ha ezt a kezdetet elérjük, az $\mathcal{R}_0$ tulajdonság megvan, akkor éppen a feladat sorozatát kapjuk meg.

Állítás

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

Lineáris rekurzióval definiált sorozatok

Definíció: Lineáris rekurzióval definiált sorozatok

Egy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ sorozat lineáris egy d-ed rendű rekurzióval definiált, ha adottak α_0, α_1, …, α_{d-1}, β_1, β_2, …, β_d számok, hogy $\beta_d \neq 0$, továbbá

(1) $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1$, …, $a_{d-1} = \alpha_{d-1}$,

(2) $i \geq d$ esetén
$$a_i = \beta_1 a_{i-1} + \beta_2 a_{i-2} + \ldots + \beta_d a_{i-d}.$$

- Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy α_0, α_1, …, α_{d-1}, β_1, β_2, …, β_d esetén az $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ sorozat egyértelműen meghatározott.

Példa

A Fibonacci-számok másodrendű lineáris rekurzióval definiáltak. $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, azaz a sorozat első két eleme $1, 1$. $\beta_1 = \beta_2 = 1$, azaz a sorozat harmadiktól kezdődően minden eleme az előző kettő összege.

Lineáris rekurzióval definiált sorozatok: Az általános séma

• Vegyünk egy d-ed rendű lineáris rekurzióval definiált sorozatot. Hogyan találhatunk a sorozat elemeit leíró formulát? Próbáljuk meg az eddigi ötleteinket alkalmazni:

• Keressünk (2)-nek eleget tevő sorozatokat a $(1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots)$ mértani sorozatok között. Könnyű látni, hogy egy d-ed fokú polinom gyökei adják a lehetséges q-kat.

$$x^d - \beta_1 x^{d-1} - \beta_2 x^{d-2} - \ldots - \beta_{d-1} x - \beta_d = 0$$

az egyenlet. Ha szerencsénk van, akkor d különböző valós lehetséges q-t kapunk.

• A kapott mértani sorozatokból próbáljuk kikombinálni az

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}$$

kezdést.

Lineáris rekurzióval definiált sorozatok: Problémák

- Csak másodrendű rekurziókat vizsgálunk.

- A lineáris rekurzió általános formulájának elegettevő sorozatok között keresünk mértani soroazatokat. Ekkor egy másodfokú egyenletet kapunk a keresett mértani sorozat kvóciensére.

- Az eddig vizsgált esetekben mindig két valós megoldás volt. Ilyen esetben (a diszkrimináns pozitív) a tervünk működik.

- Ha a diszkrimináns negatív, akkor két különböző kvócienst találunk a KOMPLEX SZÁMOK KÖZÖTT. Ilyen esetben (a diszkrimináns negatív) a tervünk működik azok számára, akik ismerik a komplex számtant.

- Ha a diszkrimináns 0, akkor egyetlen kvócienst találunk (jelöljük ezt q_0). Észrevételeink alapján egyetlen $(1, q_0, q_0^2, q_0^3, \dots)$ sorozatot kapunk. Kellene egy másik is, hogy sikeresen kombináljunk.
$$(1, 2q_0, 3q_0^2, 4q_0^3, \dots, (i+1)q_0^i, \dots)$$
egy megfelelő másik megoldás.

Szünet

A kiinduló kérdés

• Adott egy konvex sokszög. Hányféleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre osztani?

• Az ilyen felosztást a sokszög *háromszögeléseinek* nevezzük. Sokszögünk csúcsai megkülönböztethetők. Azaz az egyetlen csúcsból kiinduló átlók behúzása annyi lehetőség ahány csúcsa van sokszögünknek. (Szabályos sokszögnél ezek forgással egymásba vihető háromszögelések, most ezek mind különbözőnek számítanak.)

• A válasz természetesen függ a sokszög oldalszámától. A természetes paraméterésnél a háromszögek számát jelöljük n-nel. Ekkor sokszögünk oldalszáma $n + 2$.

• A kérdést először Euler vizsgálta meg jobban, a fogalmat mégis — a nála jóval későbbi munkássága miatt — Catalan matematikushoz kötik.

Catalan-számok definíciója

Catalan-számok

Legyen C_n egy $P_1P_2\ldots P_{n+2}$ konvex sokszög háromszögeléseinek száma.

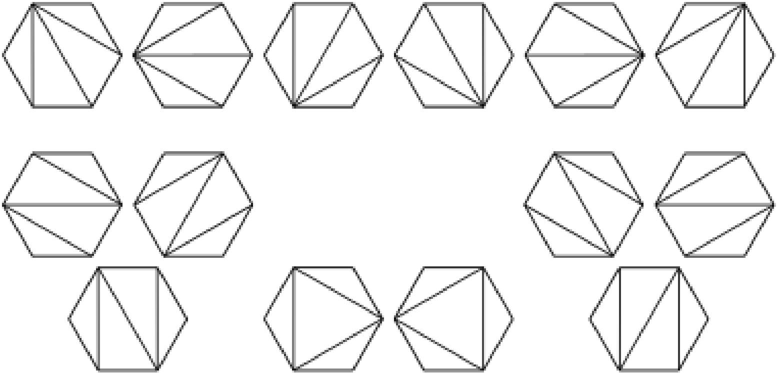
• Megengedjük az $n = 0$ esetet. Ekkor „sokszögünk” egyetlen szakasz, egy 2-szög. Egyetlen átlója sincs, de nem is kell: fel van osztva 0 darab háromszögre.

• Az $n = 1$ esetben sokszögünk egy háromszög. Ismét nincs átlója, de nem is kell: fel van osztva 1 darab háromszögre. $C_0 = C_1 = 1$.

• Négyszögnek két átlója van. Bármelyiket húzzuk be egy-egy háromszögeléshez jutunk. $C_2 = 2$.

• Ötszög esetén két átló behúzásával, három háromszögre osztjuk sokszögünket. Minden háromszögelés úgy néz ki, hogy egy csúcsból induló két átlót húzunk be. $C_3 = 5$.

Hatszög esete: 14 darab háromszögelés



$$C_4 = 14$$

Segner rekurziója

Segner tétele, 1758

$C_0 = 1$, ha $n > 0$, akkor

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 = \sum_{i,j \in N : i+j=n-1} C_i C_j.$$

Segner rekurziója: Bizonyítás

• Vegyünk egy $n+2$ szöget. Egy oldalát a sokszögünknek alapoldalnak nevezzük (mondjuk P_1P_{n+2}-t). Erre úgy gondolunk, hogy vízszintes és a sokszög „felette van”.

• A sokszög háromszögelései (n darab háromszögre) egy C_n elemű halmazt alkotnak.

• Egy tetszőleges háromszögelésben az alapoldalt pontosan egy háromszög tartalmazza. Ezt alapháromszögnek nevezzük.

• Az alapháromszög a többi háromszöget bal, illetve jobb oldali háromszögekre osztja. Legyen i a jobb oldali, j pedig a bal oldali háromszögek száma. Nyilván $i+1+j=n$, azaz $i+j=n-1$.

Segner rekurziója: Bizonyítás (folytatás)

- A szétbontás megfordítható: Ha veszünk i háromszög által alkotott háromszögelést (erre C_i lehetőségünk van), Függetlenül veszünk j háromszög által alkotott háromszögelést (erre C_j lehetőségünk van) és ezeket alapéleik mentén egy háromszög jobb illetve bal oldalára ragasztjuk, akkor egy tetszőleges n háromszögből álló háromszögelést összerakhatunk.
- Különböző (i, j) párok esetén a kapott háromszögelés-halmazok páronként diszjunktak. Így a megfelelő lehetőségek számainak összege adja a végső választ (összegzési elv).
- Egy adott (i, j) pár „mögött” lévő lehetőségek száma viszont a szorzási alapelv alapján két Catalan-szám szorzata.
- A Segner-formulát igazoltuk.

Segner rekurziójának működése

- Gyakorlásként számoljuk ki a következő két Catalan-számot

$$C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0$$
$$= 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42,$$

$$C_6 = C_0C_5 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_3C_2 + C_4C_1 + C_5C_0$$
$$= 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132.$$

- A 8-szög 132 darab háromszögelésének felsorlása már komoly feladat lenne. Jól rendszerezett munka kell, hogy ne hagyjuk ki egyet sem, ne soroljuk fel semelyiket sem többször.

Euler—Goldbach-tétel

Euler—Goldbach-tétel

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

• Azt is megjegyezzük, hogy a Catalan-számok nagyon sok más kombinatorikus és nem kombinatorikus összeszámlálási problémában feltűnnek. Ennek megfelelően sok alternatív leírásuk is adható.

Catalan-számok: Alternatív definíció

C_n az $x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ szorzat két tényezős szorzatokra történő zárójelezéseinek száma.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!