Részhalmazok összeszámolása, polinomok, binomiális tétel

Hajnal Péter

2021. tavasz

Az alapkérdés

Alapkérdés

Egy n elemű halmaznak hány k elemű részhalmaza van?

- Középiskolás nyelvezettel: Adott n különböző tárgy, amelyből egy k tárgyat tartalmazó csomagot állítunk össze. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

- A csomag szóhasználat szerepe az, hogy megpróbáljuk leírni hogy a kiválasztás sorrendje lényegtelen. Az absztrakt nyelvezet ezt a fontos feltételt magában foglalja ($\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{c, b, a\}$).

Jelölés

Egy H halmaz k elemű részhalmazait összegyűjtő halmazt $\binom{H}{k}$-val jelöljük. Azaz

$$\binom{H}{k} = \{R \subset H : |R| = k\}.$$

Egy technikai nehézség

- Mint az összes részhalmaz megszámolásánál most is meg kell győződnünk, hogy kérdésünk korrekt-e, azaz egy halmaz adott méretű részhalmazainak száma „csupán” elemszámoktól függ-e.

- Két A és B azonos elemszámú halmaz elemei között létesítsünk egy $\phi : A \to B$ párbaállító leképezést. Mint láttuk ez a leképezés természetes módon hozzárendel minden A-beli részhalmazhoz egy B-beli részhalmazt mint párt.

- Azt kell észrevennünk, hogy minden részhalmaz azonos elemszámú párjával. Így a fenti leképezést megszorítva A adott (k) elemű részhalmazaira egy párbaállító leképezést kapunk A k elemű részhalmazai és B k elemű részhalmazai között.

Definíció

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát $\binom{n}{k}$-val jelöljük.

Példák

- Megjegyezzük, hogy $\binom{n}{k}$ számok minden n, k természetes számra értelmezettek.

Példa

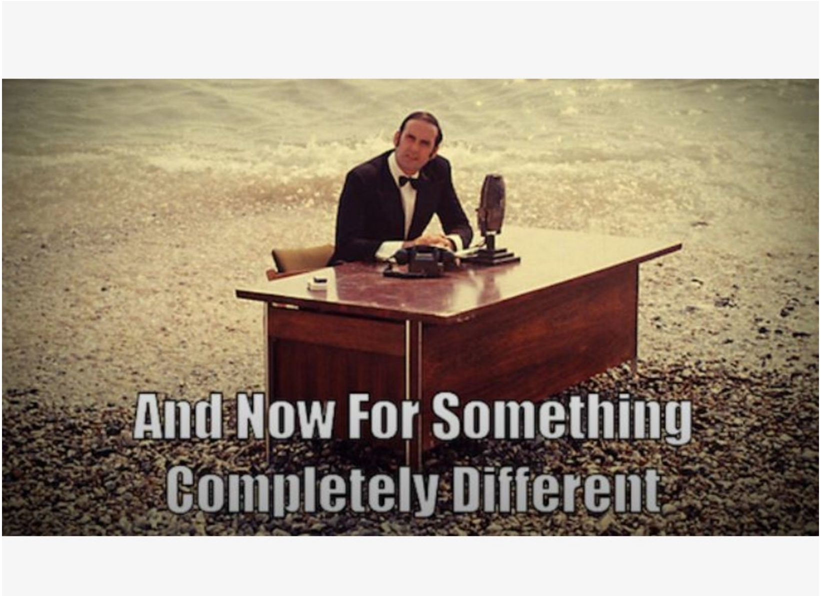
$\binom{5}{2} = 10$. Legyen $H = \{a, b, c, d, e\}$. Ekkor
$\binom{H}{2}" = "\{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$.

Példa

$\binom{2021}{2022} = 0$, hiszen egy 2021 elemű halmaznak nincs 2022 elemű részhalmaza.

- $\binom{n}{k}$ pontosan akkor nem-nulla/pozitív, ha $0 \leq k \leq n$.

... és most valami egészen más ...



Polinomok

Példák polinomokra

$x^2+x-7, \qquad x^3-2x^2+3x-7, \qquad x^{2020}-2019x^2+1024x-13.$

• A fenti alakú kifejezések (számok és egy betű „keveréke") megszokottak matematikai tanulmányaink során (betűszámtan). Ezeket polinomoknak nevezzük.

• A szó görög eredetű, eredeti jelentése „több tag". A *polinom* a matematikában szakkifejezéssé vált, magyarul *többtagú kifejezésnek* nevezzük.

• A polinomokkal kapcsolatos alapismereteket az alábbiakban összefoglaljuk és pontosítjuk.

• A „többtagú" jelentése: egy polinom egyszerűbb elemekből/tagokból van összerakva. Ezek az egyszerűbb alkotó elemek az úgynevezett *egytagúak*, idegen szóval *monomok*. A polinomokban ilyen monomokat kötünk össze „+" jelek segítségével.

Monomok

Példa

A $P = 5 - 3x + 2x^3$ polinom az 5, $(-3)x$ és $2x^3$ monomok összege.

Példa

A $Q = x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11}$ polinom az x^2, x^3, x^5, x^7 és x^{11} monomok összege.

Definíció

Egy monom egy nem-nulla szám – amit a *monom együtthatójának* nevezünk – és egy betűs hatvány (ahol a kitevő egy természetes szám) szorzata.

- A betű kitevője a *monom foka*, vagy a *monom típusa*.
- Két monom, akkor ugyanaz, ha típusuk (azaz kitevőjük) és együtthatójuk is ugyanaz.

Polinomok

Definíció

Egy polinom különböző típusú monomok összefűzése $+$ jelekkel.

• Fontos megjegyezni, hogy az üres összeg is összeg. A megfelelő polinom a 0 polinom.

• Monomok összefűzésénél a sorrend nem számít.

• Két megállapodás természetes: Az összeg tagjainak felsorolásánál a monomok fokai szerinti növekvő, illetve csökkenő sorrendet használjuk.

Polinomok: Megállapodások

- A fenti definícióknak eleget tevő polinom például $5x^0 + 2x^3 + (-3)x^1$. A polinomok ismerősei számára világos, hogy ez ugyanaz, mint az első példában szereplő $5 - 3x + 2x^3$ polinom. Az x^1 betűs hatványt x-nek, az $5x^0$ monomot 5-nek írtuk és a -3 együttható „zárójelét felbontottuk” és a monomok sorrendjét felcseréltük.
- A fentiekkel egyező polinom $2x^3 + 0x^2 - 3x + 5$, azaz a 0 együtthatós tagok mintha ott sem lennének. Ezek elhagyhatók, illetve beszúrhatók.
- Ezekhez a jelölésekhez mindenki hozzászokott (amennyiben most kezd a polinomok tanulmányozásához, akkor hozzá kell szoknia).
- Ennek megfelelően egy x betűt használó polinom általános alakja

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

illetve $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Polinomok: Együttható sorozatok

- A polinomok azonosíthatók együtthatóik sorozatával:

$p \equiv$ (p konstans tagja, p lineáris/első fokú tagjának együtthatója,

p kvadratikus/négyzetes tagjának együtthatója,

p kubikus/köbös/harmadfokú tagjának együtthatója, $\ldots$).

Alternatív definíció

Polinomok végtelen számsorozatok, amelyeknek egy idő után minden eleme 0.

- Matematikailag talán ez a „legtisztább”, problémamentesebb leírás, de ez egy lényeges távolodás (absztrakció) a minden napi gyakorlattól.

Polinomok: Együttható sorozatok: Jelölések

- Tegyük fel, hogy a P polinom egyetlen betűt/határozatlant használ, x-et.

Jelölés

$[x^i]P$ az i típusú/fokú monom együtthatója P-ben. ($[x^i]P$ minden i természetes számra értelmezve van!)

Példa

Legyen $P = 5 - 3x + 2x^3$. $[x^0]P = 5$, $[x]P = -3$, $[x^2]P = 0$, $[x^3]P = 2$, $[x^4]P = 0$, $[x^{2021}]P = 0$.

Észrevétel

P és Q polinomok egyenlők, ha minden i természetes számra $[x^i]P = [x^i]Q$.

Polinomok: Együttható sorozatok: Megjegyzések

- A fentieket összefoglalva. Egy P polinomot akkor ismerünk, ha ismerjük az együtt ható sorozatát. Egy P polinomot akkor ismerünk, ha tudjuk a $\{[x^i]P\}_{i=0}^{\infty}$ sorozatot.

- Egy P polinomot úgy definiálhatunk, hogy megadjuk együtthatóit. Azaz leírjuk $[x^i]P$ értékét minden $i \in \mathbb{N}$ esetén.

Definíció

Egy P polinom *fokszáma* $\deg P = \max\{i : [x^i]P \neq 0\}$.

Polinomok: Betűk

- Az eddigi példánk mindegyike egyetlen betűt használt. A leggyakoribb választás x.
- Vannak „több betűre épülő polinomok" is.
- Ezekben a monomokban az együttható mellett a különböző betűk hatványainak (a kitevők természetes számok) szorzata van.

Példa

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$x^9 - y^9,$$

$$p^9 + p^8q + p^7q^2 + p^6q^3 + p^5q^4 + p^4q^5 + p^3q^6 + p^2q^7 + pq^8 + q^9$$

Polinomok: Számok

• Matematikai tanulmányaink alatt az általános és középiskolában mindenki találkozik az egész számokkal, racionális számokkal, valós számokkal. Egyetemen, illetve más tanulmányok során komplex számokkal, kvaterniókkal, oktánokkal, p-adikus számokkal, Gauss egészekkel, algebrai számokkal, $\mod p$ számokkal is találkozhatunk.

• $0, 1, 2$ felfogható mint egész szám és felfogható mint $\mod 3$ szám. A $1 + 2 = 0$ egyenlőség $\mod 3$ számolva helyes, míg a benne szereplő számokat egészeknek fogva fel az egyenlőség természetesen nem igaz.

• Fontos hogy lássuk az együtthatók közötti számolási szabályokat. Ezekre építve definiáljuk a polinomokkal való számolási szabályokat is.

Polinomok: Jelölések

Jelölés

Ha P egy x határozatlanú, egész együtthatós, akkor azr úgy jelöljük, hogy $P \in \mathbb{Z}[x]$.

- Tehát $\mathbb{Z}[x]$ az x határozatlanú, egész együtthatós polinomokat összegyűjtő matematikai struktúra.

Példa

$R = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y^2 \in \mathbb{Q}[y]$, azaz az R polinomban y a határozatlan és az együtthatók racionálisak.

Példa

$S = \pi + \sqrt{2}x^3 \in \mathbb{R}[x]$, azaz az S polinomban x a határozatlan és az együtthatók valósak.

Polinomok: Hogy milyen együtthatókkal azon matematikai tartalom múlhat

Példa

$x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomot nem írhatjuk fel két ($\mathbb{Q}[x]$-beli) elsőfokú polinom szorzataként.

Ha $x^2 - 2$-t $\mathbb{R}[x]$ egy elemének tekintjük, akkor
$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

Példa

Ha $1 + x^2$-t $\mathbb{R}[x]$ egy elemének tekintjük, akkor azt nem írhatjuk fel két ($\mathbb{R}[x]$-beli) elsőfokú polinom szorzataként.

Ha $1 + x^2$-t $\mathbb{C}[x]$ egy elemének tekintjük, akkor
$1 + x^2 = (i + x)(-i + x)$.

A továbbiakban csak valós együtthatós polinomokkal foglalkozunk.

Polinomok vs polinom függvények

• A továbbiakban bevezethetjük a polinomok helyettesítési értékét, definiálhatnánk a polinom-függvényeket.

• Továbbá az analízisben megismert fogalmakat alkalmazhatnánk polinomokra. Polinom-függvényeket, függvényként összeadhatunk, szorozhatunk, oszthatunk. Az összeg és a szorzat szintén egy polinom által leírható függvény lesz. A hányados vétele már kivezethet a polinomok köréből. Ezt az utat úgy írhatjuk le, mint a polinomok analitikus vizsgálata.

• Mi nem ezt az utat követjük.

• A polinomok alapműveleteit bevezethetjük másképpen is. Leírjuk, hogy két polinom összege, ami egy polinom lesz milyen együttható sorozata lesz a két összeadandó együttható sorozatától függően. Így anélkül, hogy tudnánk két polinom által jelentett két függvényt fel tudjuk írni az összegpolinomot. Hasonlóan cselekedhetünk a szorzásnál is.

• Ezt az utat algebrai/formális szemléletnek nevezzük. Mi ezt követjük.

A szemléletek viszonya

• A két szemlélet közül egyik sem magassabb rendű a másiknál. Jól kiegészítik egymást és különböző kérdéseknél mindegyiknek meg lehet a maga előnye.

• Mi azért választottuk az algebrai tárgyalást mert ez ad lehetőséget, hogy egy harmadik szemléletmódot is megmutassunk. Ez a kombinatorikus szemléletmód.

• Célunk nem az, hogy egy matematikailag pontos bevezetést adjunk.

• Feltesszük, hogy az olvasó már ismeri a polinomokat, dolgozott polinomokkal. Szeretnénk tudatosítani a munka alatt felmerült és talán ki nem mondott problémákat.

Polinomok összege: Klasszikus szemlélet

Definíció: Azonos fokú monomok összevonása

Két polinom összegében egy adott típusú monom együtthatója az összeadás egy-egy tagjában szereplő megfelelő típusú tagok együtthatóinak összege.

- Azt is mondhatjuk, hogy a polinomok összeadását visszavezetjük az együtthatók összeadására.

Példa

$$(2x^3 - 3x + 5) + (-x^2 + 3x + 2) =$$
$$(5x^0 + (-3)x^1 + 0x^2 + 2x^3) + (2x^0 + 3x^1 + (-1)x^2 + 0x^3) =$$
$$(5 + 2) + ((-3) + 3)x + (0 + (-1))x^2 + (2 + 0)x^3 = 7 - x^2 + 2x^3.$$

Polinomok összege: Új jelölésekkel

- Legyen $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ két polinom. Összegüket $P + Q$-val jelöljük.
- Ahhoz, hogy ezt definiáljuk meg kell mondanunk, hogy mik $P + Q$ együtthatói.
- Az ismert definíciót jelöléseinkkel a következőképpen formalizálhatjuk:

Definíció

$$[x^n](P + Q) = [x^n]P + [x^n]Q.$$

Polinomok szorzása: Klasszikus szemlélet

- Először *monomok szorzatát* definiáljuk: Az αx^i és βx^j monom szorzata is egy monom lesz, együtthatója $\alpha \cdot \beta$ és kitevője $i + j$: $\alpha\beta x^{i+j}$.

Definíció

Két polinom szorzatát úgy számoljuk ki, hogy mindegyikből kiveszünk egy-egy monomot, ezeket összeszorozzuk, majd az összes lehetséges módon nyert szorzat monomokat összeadjuk (összegyűjtjük).

Példa

$(5 - 3x + 2x^3) \cdot (2 + 3x - x^2) = (5)(2) + (5)(3x) + (5)(-x^2) + (-3x)(2) + (-3x)(3x) + (-3x)(-x^2) + (2x^3)(2) + (2x^3)(3x) + (2x^3)(-x^2) = (10) + (15x) + (-5x^2) + (-6x) + (-9x^2) + (3x^3) + (4x^3) + (6x^4) + (-2x^5) = 10 + 9x - 14x^2 + 7x^3 + 6x^4 - 2x^5.$

Polinomok szorzása: Új jelölés

- A két polinom szorzatát $P \cdot Q$-val jelöljük.
- A szorzatot a következő formula definiálja:

Definíció

$$[x^n](P \cdot Q) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}: i+j=n} [x^i]P \cdot [x^j]Q.$$

Polinomok alapműveletei: Tulajdonságok

Tétel

Legyen $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

(i)
$$P + Q = Q + P,$$

(ii)
$$(P + Q) + R = P + (Q + R),$$

(iii)
$$PQ = QP,$$

(iv)
$$(PQ)R = P(QR),$$

(v)
$$(P + Q)R = PR + QR.$$

Tulajdonságok ellenőrzése

Állítás

$$P \cdot Q = Q \cdot P.$$

Az ellenőrizendő állítást az együtthatókra kiírjuk.

Olyan egyenlőségeket kapunk, amelyekben csak az együtthatók szerepelnek:

$$[x^n](PQ) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}: i+j=n} [x^i]P[x^j]Q,$$

illetve

$$[x^n](QP) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}: i+j=n} [x^i]Q[x^j]P.$$

A két szám egyenlőségét kell ellenőrizni, amely ellenőrzés folyamán a számokra megismert számolási szabályok alkalmazhatók.

Tulajdonságok ellenőrzése (folytatás)

Tétel

Legyen $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $(PQ)R = P(QR)$.

Azt kell igazolnunk, hogy $[x^n](PQ)R = [x^n]P(QR)$ minden n-re. Az egyenlőség bal és jobb oldalát külön alakítjuk.

$$
\begin{aligned}
[x^n](PQ)R &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}:i+j=n} [x^i](PQ)[x^j]R \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}:i+j=n} \left(\sum_{k,l\in\mathbb{N}:k+l=i} [x^k]P[x^l]Q \right) [x^j]R \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}:i+j=n} \sum_{k,l\in\mathbb{N}:k+l=i} [x^k]P[x^l]Q[x^j]R \\
&= \sum_{k,l,j\in\mathbb{N}:k+l+j=n} [x^k]P[x^l]Q[x^j]R.
\end{aligned}
$$

Szorzás asszociativitása és kommutativitása

- Az asszociativitás fontos következménye, hogy beszéhetünk a PQR hármas szorzatról.
- A kommutativitás miatt a tényezők sorrendje is tetszőleges, így egy három elemű polinomhalmaz esetén is jól értelmezett szorzatuk.
- A fenti bizonyítás egy kiszámítási módot is ad a hármas szorzatra: Mindegyik polinomot fogjuk fel, mint egy-egy zárójelbe írt monomok összegét. A szorzatot úgy kapjuk, hogy az összes lehetséges módon kiválasztunk egy-egy monomot a három zárójelből, összeszorozzuk azokat, majd az így kapott monomokat összegyűjtjük.
- Ez a szabály n-tényezős szorzatra is elmondható. Azaz

$$[x^n](PQR\dots YZ) = \sum_{i+j+k+\dots+s+t=n} [x^i]P[x^j]Q[x^k]R\dots[x^s]Y[x^t]Z.$$

Többtényezős szorzat leírása

Többtényezős szorzatban egy monom együtthatóját
úgy határozzuk meg, hogy
(1) Minden zárójelből úgy választunk ki egy-egy monomot,
úgy hogy az ezekben szereplő határozatlan hatványainak
szorzata a kiválasztott típusú legyen.
(2) Ekkor a kiválasztott monomok együtthatóit összeszorozzuk.
(3) Ezt az összes lehetséges módon megtesszük,
az eredményeket összegezzük.
A megfelelő együttható-szorzatok összege lesz
a szorzatban a keresett együttható.

Szünet

Polinomokkal kapcsolatos fogalmak megvilagítása: Példa

Feladat

Lehetséges-e két kockát úgy „cinkelni" (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége ugyanannyi legyen?

- Először is nevezzük el a keresett valószínűségeket. Jelentse $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, illetve $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ az egyes kockák esetén a megfelelő szám valószínűségét.
- Annak valószínűségét hogy a két kockával együtt dobva a kapott számok összege n legyen, jelöljük s_n-nel ($n = 2, 3, \dots, 12$).
- Egyszerűen látható, hogy $s_n = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,6\}: i+j=n} p_i q_j$, ahol

Példa megoldása: Polinomok

- Eddig három véges sorozatot vezettünk be. Fűzzük össze ezeket a sorozatokat x hatványaival egy-egy polinommá:

$$P = p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6,$$
$$Q = q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6,$$
$$S = s_2x^2 + s_3x^3 + s_4x^4 + \ldots + s_{12}x^{12}.$$

- Ezzel három $\mathbb{R}[x]$-beli polinomhoz jutunk, amelyekben az i típusú monom együtthatója egy i eredményű dobás valószínűségét fejezi ki. Ekkor a valószínűségek közti összefüggést nagyon tömören fejezhetjük ki:

$$PQ = S.$$

Példa megoldása: Az állítás polinomokkal való megfogalmazása

- A feladat olyan p_i és q_i számok létezését kérdezi, amelyeknél $s_2 = s_3 = s_4 = \ldots = s_{12} = \frac{1}{11}$ teljesüljön.
- A polinomok nyelvén ez azt jelenti, hogy olyan $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ polinomokat keresünk, amelyekre teljesül, hogy

$$PQ = \frac{x^2}{11}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{10}).$$

- A feladat eredeti, „hétköznapi" szövegét lefordítottuk a „polinomok" nyelvére. A fordításunk nem tökéletes. A kiinduló sorozatok úgynevezett valószínűségi eloszlások. Azaz például a p_i számok nem-negatívak és összegük 1. Így például a P polinom együtthatói nem-negatívak és az $x = 1$ helyettesítéssel az értéke 1.

Bizonyítás

- Belátjuk, hogy nincsenek ilyen P és Q valós együtthatós polinomok.

- Indirekten tegyük fel, hogy mégis vannak. Ekkor az egyenletet $11(1-x)$-gyel szorozva és x^2-tel egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$11(1-x)\frac{P}{x}\frac{Q}{x} = 1 - x^{11}.$$

- A jobb oldal által definiált j függvény egy szigorúan monoton függvény. Így pontosan egy (valós) gyöke van. Ez $x = 1$ és ennek a gyöknek multiplicitása 1.

- A bal oldal által definiált b függvénynek legalább 3 valós gyöke van (az esetleges multiplicitásokat is számolva), hiszen P/x és Q/x is ötödfokú polinom, azaz biztos van valós gyökük.

- Az ellentmondás igazolja, hogy a kért cinkezés nem lehetséges.

Megjegyzés a bizonyításhoz

• Megjegyezzük, hogy a megoldás módszere nem teljesen homogén. Analitikus és algebrai személet keveredett benne.

Ennek oka az egyszerűség volt. Algebrai eszközökkel kimutathattuk volna, hogy $1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}$ nem írható fel két ötödfokú polinom szorzataként $\mathbb{R}[x]$-ben.

Szünet

A binomiális tétel

- A binom magyarul két tagot jelent. Az alapkérdés, amit az alábbiakban megoldunk, hogy hogyan lehet kéttagú kifejezéseket hatványozni.

Binomiális tétel

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

- Azaz az $\binom{n}{k}$ számok az együtthatók az $1+x$ binom hatványaiban. Ezekután megadahatjuk szokásos elnevezésüket: binomiális együtthatók.

Binomiális tétel: Az indoklás

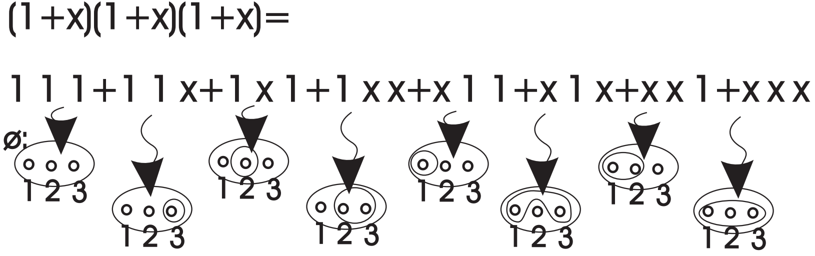
- Végezzük el az $(1+x)(1+x)\dots(1+x)$ polinom szorzást.

- Ehhez válasszunk ki minden tényezőből egy-egy tagot. Minden tényező esetén a választható tag 1 vagy x.

- n tényezőnk van. Ezek azonosíthatók a $U = \{1, 2 \dots, n\}$ halmaz elemeivel. Az i-edik tényező esetén a két választható tagnak „nyilvánítsunk egy jelentést". Ha az 1-et választjuk, akkor az jelentse azt, hogy az i elemet nem rakjuk bele U egy részhalmazába, ha pedig az x-et választjuk, akkor ez jelentse azt, hogy az i elemet belerakjuk U egy részhalmazába.

- Ezzel a „jelentéssel" a tényezőkből történő monomok választása megfelel az U halmazból egy részhalmaz kiválasztásával és fordítva.

Binomiális tétel: Az indoklás: Ábra



Az ábra egy 3-elemű halmaz esetén mutatja ezt be az ötletet

• Egy részhalmaznak megfelelő tag kitevője a halmaz elemszáma lesz, azaz H-nak $x^{|H|}$ monom felel meg.

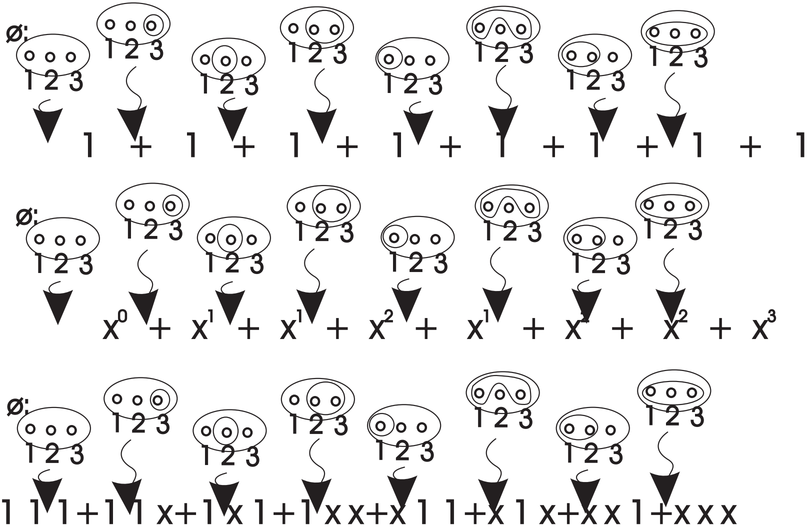
• Így az x^k típusú monomok száma annyi lesz, amennyi az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazainak száma.

Binomiális tétel: Az indoklás magyarázata

• Gondoljunk arra, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes részhalmaza „felsorakozik és elhalad előttünk”. Amikor megszámoljuk a részhalmazokat, akkor mindegyik „elvonuló” részhalmaz esetén egy 1-est jegyzünk fel (egy vonást húzunk), majd amikor végeztünk, akkor ezek összessége megadja a keresett számot.

• A polinomok szorzásának definíciója bizonyos monomok összegyűjtését kívánja. Mi jelentést adtunk az egyes monomoknak, esetünkben ezek részhalmazokat azonosítottak. Egy monom típusa megegyezett a megfelelő részhalmaz egy paraméterével (esetünkben elemszámával). Így a polinom rendezése után, az egyes együtthatók egy adott paraméterrel (elemszámmal) rendelkező halmazokat „számolták össze”.

Binomiális tétel: Az indoklás magyarázata ábrán



Az ábra egy 3-elemű halmaz esetén mutatja be a magyarázatot

Szünet

Egy Feladat

Feladat: Kürschák József matematikai emlékverseny (1987)

A és B a következő játékot játssza: az első 100 pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként B. A k milyen értékeire lesz egyenlő A és B nyerési esélye?

- Ebben a feladatban a valószínűségszámítási nyelvezet nem lényeges eszköz. Érdemes kiküszöbölnünk a véletlennel kapcsolatos kifejezéseket.

- Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmaznak $\binom{100}{k}$ darab k-elemű részhalmaza van. Ezek közül bizonyosakba eső számok összege páros. Legyen ezek száma a_k. A többi részhalmaz esetén a benne lévő számok összege páratlan. Ezek száma legyen b_k.

Egy Feladat (folytatás)

- Nyilvánvalóan $a_k + b_k = \binom{100}{k}$. A nyerési esélye $a_k/\binom{100}{k}$, míg B nyerési esélye $b_k/\binom{100}{k}$ (jó esetek száma osztva az összes esetek számával).

- A feladat ennek a két nyerési esélynek az összehasonlításával kapcsolatos.

- A két esély nagyságrendi viszonya azonos az a_k és b_k számok nagyságrendi viszonyával. Ez pedig kiolvasható az $\omega_k = a_k - b_k$ számok előjeléből: Ha $\omega_k < 0$, akkor B nyerési esélye nagyobb; ha $\omega_k = 0$, akkor A és B nyerési esélye azonos; Ha $\omega_k > 0$, akkor A nyerési esélye nagyobb.

- Tehát a feladat kérdésének egy átfogalmazása: határozzuk meg azokat a k számokat ($k = 0, 1, \ldots, 100$), amelyekre $\omega_k = 0$. Mi ennél többet fogunk dolgozni: pontosan meghatározzuk az ω_k értékeket.

Egy Feladat (folytatás): Példa

Példa

$\omega_0 = 1$. Egyetlen 0-elemű halmaz van, az üreshalmaz. Az eddigiekben erről nem szóltunk, de az elfogadott megállapodás szerint az „üres-halmaz elemeinek összegét” és általában az üres összegeket 0-nak definiáljuk. Tehát az üres-halmaz *A*-nak kedvez.

Példa

$\omega_1 = 50 - 50 = 0$. A 100 darab 1-elemű halmaz között 50 darab tartalmaz páros számot és 50 darab tartalmaz páratlan számot.

Példa

$\omega_2 = 2\binom{50}{2} - 50 \cdot 50 = -50$. Egy két elemű halmazban lévő számok összege akkor lesz páros, ha az 50 páros szám közül választottunk kettőt, illetve ha az 50 páratlan szám közül választottunk kettőt. Páratlan összeghez egy páros és egy páratlan számot kell választanunk.

Egy Feladat (folytatás)

- A feladat megoldásához a $P(x) = \omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{100} x^{100}$ polinomot fogjuk vizsgálni.

- Mielőtt ehhez hozzákezdenénk, vizsgáljuk meg az analóg polinomot az $a_k + b_k = \binom{100}{k}$ sorozat esetén.

- Ez a
$$\binom{100}{0} + \binom{100}{1}x + \binom{100}{2}x^2 + \ldots + \binom{100}{100}x^{100}$$
polinom lesz.

- A binomiális tétel megmondja, hogyan írható fel ez a polinom szorzat alakban: $(1+x)^{100}$.

- A bizonyítás ötelete alkalmazható problémánk esetén is.

- Az $\omega_k = a_k - b_k$ számokat is értelmezzük úgy, mint egy összeszámolást. Ez kissé furcsának tünhet, hiszen értéke negatív is lehet.

Egy Feladat (folytatás)

- Az előző megszámlási történetet úgy módosítjuk, hogy az elhaladó részhalmazok esetén, ha az összeg páros, akkor egy 1-est, ha páratlan, akkor egy -1-est jegyzünk fel.

- Ha feljegyzéseink közben érzékenyebbek vagyunk és lejegyezzük a megfelelő részhalmaz elemszámát is, akkor $-x^k$ és x^k-monomokat írunk le. qpa Az „összes részhalmaz elvonulása" után a feljegyzett monomok összege a $P(x) = \omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{100} x^{100}$ polinom lesz.

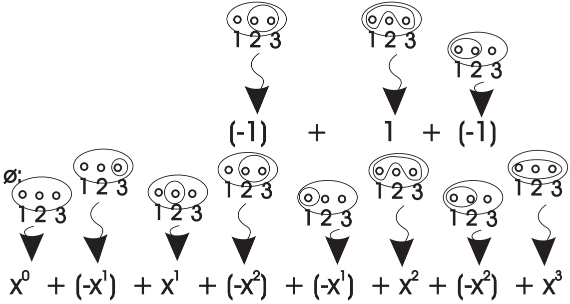
- A $P(x)$ polinom egyenlő lesz a 100 tényezőből álló $(1-x)(1+x)(1-x)(1+x)\ldots(1-x)(1+x)$ polinom-szorzattal.

- Legyen a hozzárendelés az i-edik tényező 1 tagjánál a „nem választjuk ki az i elemet", míg a $(-1)^i x$ tagnál a „kiválasztjuk az i elemet".

Egy Feladat (folytatás)

- A polinom szorzás definíciójából eredő monom-szorzatok újból egy részhalmaz kiválasztásának felelnek meg. A megfelelő szorzat kitevője a halmaz elemszáma. De lesz egy előjel is. Ez azt mondja meg, hogy páros sokszor vagy páratlan sokszor választottunk $-x$-es monomot. Azaz a kiválasztott részhalmazban páros vagy páratlan sokszor szerepel páratlan szám. Azaz a részhalmazban szereplő számok összege páros vagy páratlan.
- Tehát egy részhalmaznak megfelelő monom-szorzat egyenlő lesz a részhalmazhoz tartozó/szükséges „feljegyzéssel”.

Egy Feladat (folytatás): Ábra



Az összes k-elemű részhalmaz elvonulása után feljegyzéseink összege éppen ω_k lesz

Tehát

$$\omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{100} x^{100} =$$
$$=(1-x)(1+x)(1-x)(1+x)\ldots(1-x)(1+x) =$$
$$=(1-x)^{50}(1+x)^{50} = (1-x^2)^{50} = \sum_{i=0}^{50}(-1)^i \binom{50}{i} x^{2i}.$$

Egy Feladat (folytatás)

- Polinom egyenlőség két végén szereplő polinomok egyenlők, azaz a megfelelő együtthatóik egyenlők.
- Azaz
$$\omega_k = \begin{cases} 0, & k = 2l+1 \\ \binom{50}{2l}, & k = 4l \\ -\binom{50}{2l+1}, & k = 4l+2. \end{cases}$$
- Ebből kiolvasható, hogy páratlan k esetén a játék igazságos, 4-gyel osztható k esetén A nyerési esélye jobb, míg a maradék esetekben ($k \equiv 2 \pmod 4$) B nyerési esélye jobb.

Szünet

Egy bevezető példa

- Egy n elemű halmazra gondoljunk úgy, hogy van egy speciális eleme s. (Például halmaunk lehet egy osztálykirándulás résztvevőinek halmaza: az osztályfönök és a gyerekek.)

- Ekkor k elemű részhalmazai csoportosíthatók aszerint, hogy a speciális elem/s (az osztályfönök) benne van-e a halmazban.

- Így az összeszámolandó objektumokat (k elemű részhalmazok) két diszjunkt részre bontottuk/a megszámolandó objektumok listáját két részlistára szedtük szét.

- A két részlista milyen hosszú?

- A speciális elemet nem tartalmazó részhalmazokhoz $n-1$ elemből (nem-speciális elemek) kell kiválasztani k-t. A speciális elemet tartalmazó részhalmazokhoz $n-1$ elemből (nem-speciális elemek) kell kiválasztani $k-1$-t, amelyek a speciális elemmel együtt kiadják a kiválasztandó k elemet.

A Tétel

- Az összeadási alapelv alapján kapjuk, hogy az alábbi tételt.

Tétel

(o)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

(i) Ha $0 < k < n$, akkor

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

- Valójában a fenti gondolatmenet (ii)-t indokolja. Az (i) rész a binomiális együtthatók definíciójából nyilvánvaló. A két állítást azért foglaltuk össze egy tételben, mert így a binomiális együtthatók ($\binom{n}{k}$ számok) közül az érdekesek ($0 \leq k \leq n$) egy teljes/rekurzív leírását kapjuk.

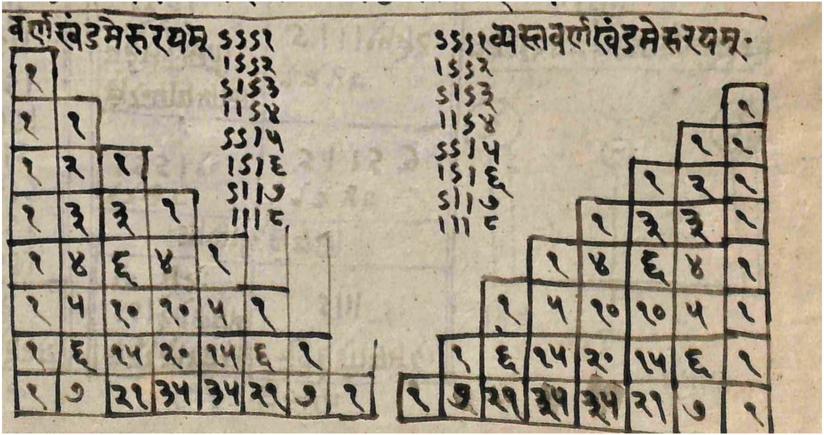
A háromszög

• Ezen számok egy tetszetős, háromszög alalkú táblázátban fogalalhatók össze. A táblázat szélső elemei 1-ek. Minden nem szélső elemnek lesz egy ÉNy-i és egy ÉK-i szomszéda, értéke ezen két felső szomszéd összege. A számtáblázat neve *Pascal-háromszög*.

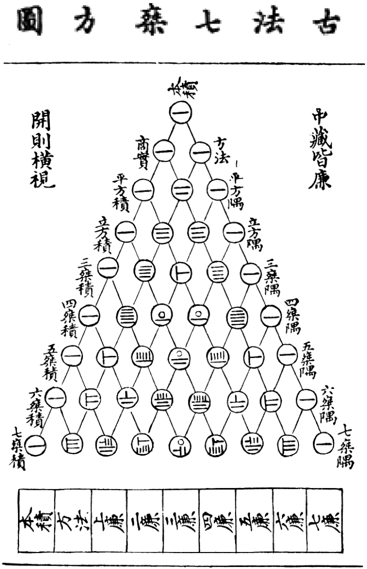
1
1 1
1 2 1
1 3 4 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

• Összefoglalva a rekurziót és binomiális tételt: Ha $(1+x)^n$ hatványt kifejtjük, akkor az együtthatók éppen a Pascal-háromszög $1, n, \ldots$ kezdetű sorában találhatók meg.

Pingala formulája, kézirat, Raghunath Library J&K (755)

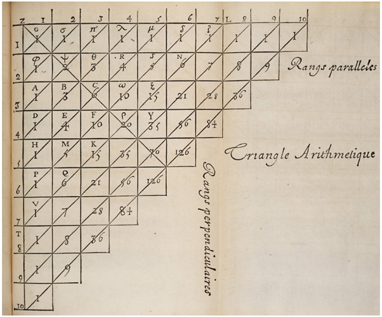


Yang Hui háromszöge Zhu Shijie munkájában (1303)



Pascal, Traité du triangle arithmétique (1654), publikálva 1665-ben

(a) Blaise Pascal



(b) „Aritmetikai háromszög”

Szünet

Egy tétel binomiális együtthatók paritásáról

Tétel

Legyen a egy páros és b egy páratlan szám. Ekkor $\binom{a}{b}$ páros.

• Az állítást szemeléletesen fogjuk demonstrálni. Veszünk egy A a elemű halmazt. Ennek b elemű részhalmazait párokba állítjuk. Az A halmaz elemei legyenek egy $(a/2) \times 2$-es sakktábla mezői.

• Erre a táblára úgy gondolunk, mint egy „házra”, amelynek $a/2$ szintje van (ezek a sorok) és minden szinten kettő lakás található (ez a megfelelő sorban lévő két mező). Az első és a második oszlopot közös határának egyenesére vonatkozó τ tükrözés táblázatunknak (házunknak) egy szimmetriája, amely felcseréli a házunk bal és jobb oldalát.

Egy tétel binimiális együtthatók paritásáról (folytatás)

• Az A halmaz b elemű részhalmazai számukra b darab lakásból áló lakáshalmazok lesznek házunkban. Egy b elemű L lakáshalmazhoz rendeljük hozzá $\tau(L)$-et mint párt, az L-beli lakások tükörképeit. Így egy L-től különböző b elemű lakáshalmazt kaptunk, amely párja a kiinduló L lesz.

• A fenti állításban az egyetlen nem nyilvánvaló állítás, hogy L és $\tau(L)$ különbözik. Ez abból következik, hogy b páratlan. Azaz házunkban kell lennie olyan emeletnek, amelyen lévő két lakásból pontosan egy eleme L-nek. Ez az emelet megkülönbözteti L-et és $\tau(L)$-et.

A megoldás kiterjesztése

- Ha b páros, akkor a fenti bizonyítás nem működik. az $(L, \tau(L))$ párosításnál lesznek olyan L lakáshalmazok, amelyek párjai önmaguk lesznek.

- Ezek az L halmazok azonban könnyen leírhatók. azok a lakáshalmazok lesznek, amely elemei teljes emeletekből állnak össze. Azaz az $a/2$ emeletből kell $b/2$ emeletet kiválasztani, hogy az összes ilyen halmazt megkapjuk. Tehát a bizonyításbeli τ leképezés $\binom{a/2}{b/2}$ halmazt kiválaszt és a többit párokba állítja.

Tétel

legyen a és b két páros szám. Ekkor $\binom{a}{b}$ és $\binom{a/2}{b/2}$ azonos paritású (azaz egyszerre páros és egyszerre páratlan). Jelöléssel

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a/2}{b/2} \pmod 2.$$

Páratlan a esete

A fenti gondolatok különösebb gond nélkül páratlan a esetére is elismételhetők.

Tétel

Legyen a egy páratlan szám ($a = 2k + 1$).

(i) Ha b páros ($b = 2\ell$), akkor $\binom{a}{b} \equiv \binom{k}{\ell} \pmod 2$,

(ii) Ha b páratlan ($b = 2\ell + 1$), akkor $\binom{a}{b} \equiv \binom{k}{\ell} \pmod 2$.

• Először definiálunk egy a elemű halmazt. Ez egy „k emeletes, emeletenként két lakásos ház lakásaiból" és „tetőtéri lakásból" (amely alakja egy szimmetrikus háromszög) álló halmaz.

Páratlan a esete (folytatás)

- Ismét definiálhatjuk a τ leképezést. Egy L lakáshalmazra úgy kapjuk meg $\tau(L)$-t, hogy L az emeletes házba eső részére a bal és jobb oldalt felcserélve új lakáshalmazra térünk át, míg a külön lakást tekintve nem változtatjuk meg L-et (ha a külön lakás L eleme volt, akkor $\tau(L)$-nek is eleme lesz; ha a külön lakás nem volt L eleme, akkor $\tau(L)$-nek sem lesz eleme).
- Milyen L-re lesz $L = \tau(L)$? Ez akkor és csak akkor teljesül, ha L-nek az emletes házba eső része teljes emeletekből ál össze. Azaz (i) esetén L-et ℓ teljes emelet alkotja, míg (ii) esetén L-et ℓ teljes emelet és a külön lakás alkotja.
- Ebből a bizonyítandó adódik.

Paritás tételek: Összefoglalás

- A fenti négy állítás egyetlen formulában is megfogalmazható. Ehhez felhasználjuk, hogy minden természetes szám felírható $2k+\epsilon$ alakban, ahol $\epsilon \in \{0,1\}$.
- Ekkor
$$\binom{2k+\epsilon}{2\ell+\varepsilon} \equiv \binom{k}{\ell}\binom{\epsilon}{\varepsilon} \pmod 2.$$
- Ezt az állítást ismételten alkalmazva minden binomiális együttható paritását gyorsan meghatározhatjuk.

Példa

Ekkor $\binom{7}{2} = \binom{3\cdot 2+1}{1\cdot 2+0} \equiv \binom{3}{1}\binom{1}{0} \pmod 2$.
Hasonlóan $\binom{3}{1} = \binom{1\cdot 2+1}{0\cdot 2+1} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1} \pmod 2$.
Összefoglalva $\binom{7}{2} = \binom{111_2}{010_2} \equiv \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{0} \pmod 2$.

A Tétel

- A fenti rövid példa alapján is felismerhetjük az általános szabályt.

Tétel

Legyen $0 \leq k \leq n$. Írjuk fel n-et és k-t is kettes számrendszerben. k felírását egészítsük ki elején 0-kal úgy, hogy a felírásának hossza azonos legyen n kettes számrendszerbeli alakjával. Legyen ez a két felírás $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_s}_2$, $k = \overline{b_1 b_2 \ldots b_s}_2$. Ekkor

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\ldots\binom{a_s}{b_s} \pmod 2.$$

Azaz $\binom{n}{k}$ akkor és csak akkor páros, ha van olyan $1 \leq i \leq s$, hogy $a_i = 0$ és $b_i = 1$.

Következmény

Következmény

A Pascal háromszög $\binom{n}{k}$ alatti számokat ($k = 0, 1, \ldots, n-1, n$) tartalmazó sora akkor és csak akkor tartalmaz csupa páratlan számot, ha $n = 2^\ell - 1$ alakú.

• Eredményeink nem csak a paritásra alkalmazhatók. Binomiális együtthatók egy prímszámmal való osztási maradékaira hasonló állítások igazak.

Általánosítás

Tétel

Legyen p egy prímszám és a, b, α, β természetes számok, ahol $\alpha, \beta < p$. Ekkor

$$\binom{ap+\alpha}{bp+\beta} \equiv \binom{a}{b}\binom{\alpha}{\beta} \pmod{p}.$$

- Legyen C egy $ap+\alpha$ elemű halmaz. Legyen $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_a \cup \widetilde{C}$, ahol a C_i halmazok elemszáma p és az $\widetilde{C}$ halmaz elemszáma α. (Az elemszámokból kiolvasható, hogy a fenti halmazoknak nincs közös elemük, páronként diszjunktak.)
- $\binom{ap+\alpha}{bp+\beta}$ az C halmaz $bp+\beta$ elemszámú részhalmazainak száma.

Az Általánosítás bizonyítása

• Legyen $\mathcal{A}$ a C halmaz $bp + \beta$ elemszámú részhalmazainak halmaza. Legyen $\mathcal{A}_0$ a C halmaz azon $bp + \beta$ elemszámú részhalmazainak halmaza, amelyek b darab C_i halmazt teljesen és a $\widetilde{C}$ halmaz β darab elemét tartalmazzák. Tehát $\mathcal{A}_0$ elemei speciális $\mathcal{A}$-beli elemek ($\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$).

• A bizonyítás befejezéséhez $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ elemeit kell p elemű osztályokba sorolnunk.

• Ehhez C elemeit szemléltessük a következőképpen. Vegyünk egy szabályos p-szög alapú egyenes hasábot. Ennek alaplapjának a síkjára, mint vízszintes síkra hivatkozunk. Vízszintes síkokkal a hasábot a darab emeletre vágjuk. Minden emeletre p lakást képzelünk, amik egy adott emelet p lapjának felelnek meg. $C_1 \cup \ldots \cup C_a$ elemei a „lakások”, ahol az egyes C_i halmazok az egy szinten lévő lakások által alkotott halmaz.

Az Általánosítás bizonyítása

• Így $\mathcal{A}$ egy eleme, C egy $ap + \alpha$ elemszámú részhalmaza, felfogható úgy, hogy a toronyban lakások egy részhalmaza és esetleg néhány további lakás $\widetilde{C}$-ből.

• $\mathcal{A}_0$ elemei azok a lakáshalmazok, amelyek a toronyból pontosan b darab teljes szintet tartalmaznak. Tehát $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ elemei esetén a „toronyból jövő hozzájárulás" nem teljes szintekből áll össze.

• Ennek következményeképpen, ha a toronybeli rész elforgatásával egymásba vihető részhalmazok kerülnek egy osztályba, akkor p elemű osztályok alakulnak ki.

Az Általánosítás következménye

Következmény, Lucas tétele (1878)

Legyen $x = (x_1 x_2 \ldots x_k)_p$ és $y = (y_1 y_2 \ldots y_k)_p$ az x és y természetes számok p számrendszerben való felírásai. (A két felírás hossza ugyanaz. Ezt elérhetjük úgy, hogy a rövidebb felírást nullákkal kiegészítjük az elején.) Ekkor

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{x_1}{y_1}\binom{x_2}{y_2}\ldots\binom{x_k}{y_k} \pmod{p}.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!