

Szitaformula és alkalmazásai

Hajnal Péter

2021. tavasz

Bevezető példa

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítás van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

- Az összes sorbaállítás halmaza legyen S ,

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítás van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

- Az összes sorbaállítás halmaza legyen S , az összes sorbaállítás száma $5! = 120$.

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

- Az összes sorbaállítás halmaza legyen S , az összes sorbaállítás száma $5! = 120$.
- Ezek között vannak olyanok, amelyben a és b nem kerül egymás mellé (ezeket kell megszámolnunk, ezeket jóknak nevezzük, halmazukat J -vel jelöljük)

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

- Az összes sorbaállítás halmaza legyen S , az összes sorbaállítás száma $5! = 120$.
- Ezek között vannak olyanok, amelyben a és b nem kerül egymás mellé (ezeket kell megszámolnunk, ezeket jóknak nevezzük, halmazukat J -vel jelöljük) és vannak olyanok, amelyben a és b egymás mellé kerül (ezeket nem kell megszámolnunk, ezeket rosszaknak nevezzük, halmazukat R -rel jelöljük).

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

- Az összes sorbaállítás halmaza legyen S , az összes sorbaállítás száma $5! = 120$.
- Ezek között vannak olyanok, amelyben a és b nem kerül egymás mellé (ezeket kell megszámolnunk, ezeket jóknak nevezzük, halmazukat J -vel jelöljük) és vannak olyanok, amelyben a és b egymás mellé kerül (ezeket nem kell megszámolnunk, ezeket rosszaknak nevezzük, halmazukat R -rel jelöljük).
- Nyilván J és R diszjunktak, együtt kiadják S mind a 120 elemét.

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

- Az összes sorbaállítás halmaza legyen S , az összes sorbaállítás száma $5! = 120$.
- Ezek között vannak olyanok, amelyben a és b nem kerül egymás mellé (ezeket kell megszámolnunk, ezeket jóknak nevezzük, halmazukat J -vel jelöljük) és vannak olyanok, amelyben a és b egymás mellé kerül (ezeket nem kell megszámolnunk, ezeket rosszaknak nevezzük, halmazukat R -rel jelöljük).
- Nyilván J és R diszjunktak, együtt kiadják S mind a 120 elemét. Azaz

$$J = S \setminus R.$$

Bevezető példa (folytatás)

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát.

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé:

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a -t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt),

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a -t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt), vagy b -t követi a (ezek a sorrendek alkossák az R_2 halmazt).

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a -t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt), vagy b -t követi a (ezek a sorrendek alkossák az R_2 halmazt).
- R_1 elemszáma $4! = 24$, hiszen ab , c , d és e betűsorokat kell sorbarakni.

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a -t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt), vagy b -t követi a (ezek a sorrendek alkossák az R_2 halmazt).
- R_1 elemszáma $4! = 24$, hiszen ab , c , d és e betűsorokat kell sorbarakni. Hasonlóan $|R_2| = 24$.

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a -t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt), vagy b -t követi a (ezek a sorrendek alkossák az R_2 halmazt).
- R_1 elemszáma $4! = 24$, hiszen ab, c, d és e betűsorokat kell sorbarakni. Hasonlóan $|R_2| = 24$. R_1 és R_2 diszjunktak, így az összeadási alapelv alapján $|R| = |R_1| + |R_2| = 24 + 24 = 48$.

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a -t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt), vagy b -t követi a (ezek a sorrendek alkossák az R_2 halmazt).
- R_1 elemszáma $4! = 24$, hiszen ab, c, d és e betűsorokat kell sorbarakni. Hasonlóan $|R_2| = 24$. R_1 és R_2 diszjunktak, így az összeadási alapelv alapján $|R| = |R_1| + |R_2| = 24 + 24 = 48$.
- Tehát $|J| = 120 - 48 = 72$.

Második feladat

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül.

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.
- Most azonban R_{ab} és R_{bc} nem diszjunkt.

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.
- Most azonban R_{ab} és R_{bc} nem diszjunkt. Ez probléma.

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.
- Most azonban R_{ab} és R_{bc} nem diszjunkt. Ez probléma.
- $120 - 48 - 48$ kiszámításánál az összes sorbaállítás számából a $dabce$ sorbaállítás „1 hozzájárulását” kétszer is levontuk (mind R_{ab} , mind R_{bc} -hez is hozzátartozik).

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.
- Most azonban R_{ab} és R_{bc} nem diszjunkt. Ez probléma.
- $120 - 48 - 48$ kiszámításánál az összes sorbaállítás számából a $dabce$ sorbaállítás „1 hozzájárulását” kétszer is levontuk (mind R_{ab} , mind R_{bc} -hez is hozzátartozik). Korrigálnunk kell.

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b , sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab} , R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b , illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.
- Most azonban R_{ab} és R_{bc} nem diszjunkt. Ez probléma.
- $120 - 48 - 48$ kiszámításánál az összes sorbaállítás számából a $dabce$ sorbaállítás „1 hozzájárulását” kétszer is levontuk (mind R_{ab} , mind R_{bc} -hez is hozzátartozik). Korrigálnunk kell.
- A metszet elemeinek számát hozzá kell adnunk a korábbi számhoz, hogy eredőben „csak kiessen” ezen sorbaállítások hozzájárulása.

Második feladat (folytatás)

Második feladat (folytatás)

- Az $R_{ab} \cap R_{bc}$ elemei pontosan azok a sorbaállítások, ahol az a , b és c betűk egy abc vagy egy cba blokkot alkotnak.

Második feladat (folytatás)

- Az $R_{ab} \cap R_{bc}$ elemei pontosan azok a sorbaállítások, ahol az a , b és c betűk egy abc vagy egy cba blokkot alkotnak. Így számuk $3! + 3! = 12$.

Második feladat (folytatás)

- Az $R_{ab} \cap R_{bc}$ elemei pontosan azok a sorbaállítások, ahol az a , b és c betűk egy abc vagy egy cba blokkot alkotnak. Így számuk $3! + 3! = 12$.
- A válasz $120 - 48 - 48 + 12 = 36$.

Második feladat (folytatás)

- Az $R_{ab} \cap R_{bc}$ elemei pontosan azok a sorbaállítások, ahol az a , b és c betűk egy abc vagy egy cba blokkot alkotnak. Így számuk $3! + 3! = 12$.
- A válasz $120 - 48 - 48 + 12 = 36$.

Formula

$$|S - (A \cup B)| = |S| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

További feladat

További feladat

Feladat

Egy osztály 30 tanulója közül 12 szereti a matematikát, 14 a fizikát és 13 a kémiát. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy pedig a matematikát és a kémiát is szereti. Hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül?

További feladat

Feladat

Egy osztály 30 tanulója közül 12 szereti a matematikát, 14 a fizikát és 13 a kémiát. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy pedig a matematikát és a kémiát is szereti. Hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül?

- A feladat egy könnyű gyakorló feladat.

További feladat

Feladat

Egy osztály 30 tanulója közül 12 szereti a matematikát, 14 a fizikát és 13 a kémiát. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy pedig a matematikát és a kémiát is szereti. Hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül?

- A feladat egy könnyű gyakorló feladat.
- Ennek ellenére két megoldását is vázoljuk.

I. megoldás formálisan

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert. Ebből $(M \cap F) \setminus (M \cap F \cap K) = M \cap F \cap \overline{K}$ elemszáma kiszámolható.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert. Ebből $(M \cap F) \setminus (M \cap F \cap K) = M \cap F \cap \bar{K}$ elemszáma kiszámolható. (\bar{K} a K halmaz S halmazra vett komplementerét jelöli, azaz $\bar{K} = S \setminus K$.)

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert. Ebből $(M \cap F) \setminus (M \cap F \cap K) = M \cap F \cap \bar{K}$ elemszáma kiszámolható. (\bar{K} a K halmaz S halmazra vett komplementerét jelöli, azaz $\bar{K} = S \setminus K$.)
- Hasonlóan kapjuk $M \cap \bar{F} \cap K$ és $\bar{M} \cap F \cap K$ elemszámait.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert. Ebből $(M \cap F) \setminus (M \cap F \cap K) = M \cap F \cap \bar{K}$ elemszáma kiszámolható. (\bar{K} a K halmaz S halmazra vett komplementerét jelöli, azaz $\bar{K} = S \setminus K$.)
- Hasonlóan kapjuk $M \cap \bar{F} \cap K$ és $\bar{M} \cap F \cap K$ elemszámait.
- Az eljárásunkat folytatva kiszámolhatjuk $M \cap \bar{F} \cap \bar{K}$, $\bar{M} \cap F \cap \bar{K}$ és $\bar{M} \cap \bar{F} \cap K$ elemszámait.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S , az osztály tanulóinak halmaza; M , F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert. Ebből $(M \cap F) \setminus (M \cap F \cap K) = M \cap F \cap \bar{K}$ elemszáma kiszámolható. (\bar{K} a K halmaz S halmazra vett komplementerét jelöli, azaz $\bar{K} = S \setminus K$.)
- Hasonlóan kapjuk $M \cap \bar{F} \cap K$ és $\bar{M} \cap F \cap K$ elemszámait.
- Az eljárásunkat folytatva kiszámolhatjuk $M \cap \bar{F} \cap \bar{K}$, $\bar{M} \cap F \cap \bar{K}$ és $\bar{M} \cap \bar{F} \cap K$ elemszámait.
- Végül ezekből adódik a kért szám, $\bar{M} \cap \bar{F} \cap \bar{K}$ elemszáma.

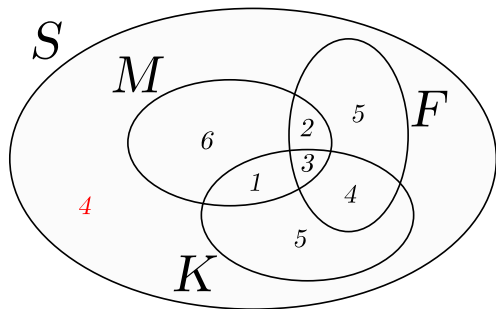
I. megoldás rajzon

I. megoldás rajzon

- Valójában az osztályt és három részhalmazát tartalmazó Venn-diagram összes „tartományára” meghatároztuk az elemszámát.

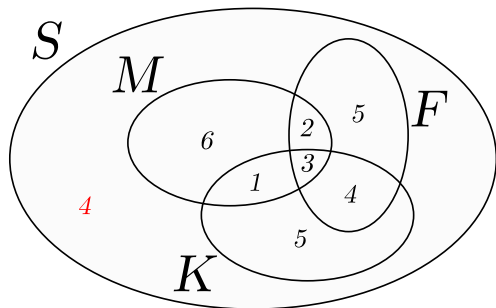
I. megoldás rajzon

- Valójában az osztályt és három részalmazát tartalmazó Venn-diagram összes „tartományára” meghatároztuk az elemszámát.



I. megoldás rajzon

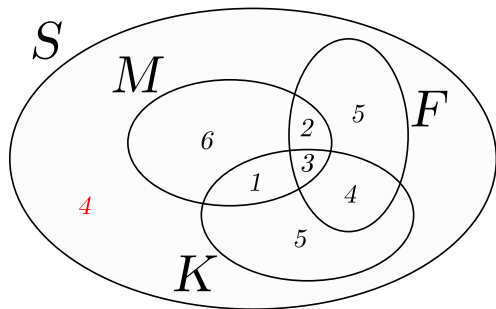
- Valójában az osztályt és három részalmazát tartalmazó Venn-diagram összes „tartományára” meghatároztuk az elemszámát.



- A meghatározás egy alkalmas sorrendben végzett felgöngyöltési eljárás.

I. megoldás rajzon

- Valójában az osztályt és három részhalmazát tartalmazó Venn-diagram összes „tartományára” meghatároztuk az elemszámát.



- A meghatározás egy alkalmas sorrendben végzett felgöngyölítési eljárás. A kérdésre adott szám az utolsó érték lesz (az összes korábban kiszámolt/nem is kért értékre támaszkodva).

II. megoldás

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk.

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:
- Kiszámíthatjuk $|S| - (|M| + |F| + |K|)$ értékét.

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:
- Kiszámíthatjuk $|S| - (|M| + |F| + |K|)$ értékét. Azonban ezzel alábecsültük a kívánt számot.

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:
- Kiszámíthatjuk $|S| - (|M| + |F| + |K|)$ értékét. Azonban ezzel alábecsültük a kívánt számot.
- Többet vontunk ki $|S|$ -ből, mint kellene.

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:
- Kiszámíthatjuk $|S| - (|M| + |F| + |K|)$ értékét. Azonban ezzel alábecsültük a kívánt számot.
- Többet vontunk ki $|S|$ -ből, mint kellene. Ez abból eredt, hogy bizonyos gyerekeket, például $F \cap K$ elemeit, kétszer is kivontuk ahelyett, hogy csak egyszer vontuk volna ki őket.

II. megoldás

- Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:
- Kiszámíthatjuk $|S| - (|M| + |F| + |K|)$ értékét. Azonban ezzel alábecsültük a kívánt számot.
- Többet vontunk ki $|S|$ -ből, mint kellene. Ez abból eredt, hogy bizonyos gyerekeket, például $F \cap K$ elemeit, kétszer is kivontuk ahelyett, hogy csak egyszer vontuk volna ki őket.
- Ezt a hibát korrigálhatjuk

$$|S| - (|M| + |F| + |K|) + (|M \cap F| + |M \cap K| + |F \cap K|)$$

kiszámolásával.

II. megoldás (folytatás)

II. megoldás (folytatás)

- Azonban még most sem a helyes értéket kaptuk.

II. megoldás (folytatás)

- Azonban még most sem a helyes értéket kaptuk. $M \cap F \cap K$ elemeit először háromszor vontuk ki, most azonban háromszor vissza is raktuk.

II. megoldás (folytatás)

- Azonban még most sem a helyes értéket kaptuk. $M \cap F \cap K$ elemeit először háromszor vontuk ki, most azonban háromszor vissza is raktuk.
- Az ennek megfelelő módosítás után már a kívánt számot kapjuk:

$$\begin{aligned} |S \setminus (M \cup F \cup K)| &= |S| - (|M| + |F| + |K|) \\ &\quad + (|M \cap F| + |M \cap K| + |F \cap K|) \\ &\quad - |M \cap F \cap K|. \end{aligned}$$

II. megoldás (folytatás)

- Azonban még most sem a helyes értéket kaptuk. $M \cap F \cap K$ elemeit először háromszor vontuk ki, most azonban háromszor vissza is raktuk.
- Az ennek megfelelő módosítás után már a kívánt számot kapjuk:

$$\begin{aligned} |S \setminus (M \cup F \cup K)| &= |S| - (|M| + |F| + |K|) \\ &\quad + (|M \cap F| + |M \cap K| + |F \cap K|) \\ &\quad - |M \cap F \cap K|. \end{aligned}$$

- A feladatban megadott adatok alapján ez egyszerűen kiszámítható.

II. megoldás (folytatás)

- Azonban még most sem a helyes értéket kaptuk. $M \cap F \cap K$ elemeit először háromszor vontuk ki, most azonban háromszor vissza is raktuk.
- Az ennek megfelelő módosítás után már a kívánt számot kapjuk:

$$\begin{aligned} |S \setminus (M \cup F \cup K)| &= |S| - (|M| + |F| + |K|) \\ &\quad + (|M \cap F| + |M \cap K| + |F \cap K|) \\ &\quad - |M \cap F \cap K|. \end{aligned}$$

- A feladatban megadott adatok alapján ez egyszerűen kiszámítható.
- A második gondolatmenet több azzal, hogy meg is adja azokat az együtthetőket, amikkel „össze kell rakni” a megadott számokat.

Az általános szitaformula

A második gondolatmenetet általánosítjuk.

Szitaformula

$$\begin{aligned} |S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) + \\ &+ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) - \dots + \\ &+ (-1)^i (|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i| + |A_1 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1}| + \dots + \\ &\quad |A_{n-i+1} \cap \dots \cap A_n|) + \\ &+ \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

- Érdemes bevezetni néhány jelölést:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S,$$

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

- Érdemes bevezetni néhány jelölést:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S,$$

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ ahol } \emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ és } A_\emptyset = S,$$

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

- Érdeemes bevezetni néhány jelölést:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S,$$

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ ahol } \emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ és } A_\emptyset = S,$$

$$\sigma_i = \sum_{I: |I|=i} |A_I| \quad (\sigma_0 = |S|),$$

azaz σ_i az i tagú metszetek elemszámának összege.

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

- Érdeemes bevezetni néhány jelölést:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S,$$

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ ahol } \emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ és } A_\emptyset = S,$$

$$\sigma_i = \sum_{I:|I|=i} |A_I| \quad (\sigma_0 = |S|),$$

azaz σ_i az i tagú metszetek elemszámának összege.

- Ezen jelöléseket az egész fejezet során használjuk.

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

- Érdeemes bevezetni néhány jelölést:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S,$$

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i, \text{ ahol } \emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{ és } A_\emptyset = S,$$

$$\sigma_i = \sum_{I:|I|=i} |A_I| \quad (\sigma_0 = |S|),$$

azaz σ_i az i tagú metszetek elemszámának összege.

- Ezen jelöléseket az egész fejezet során használjuk.
- A jelölésekkel a szita formula:

$$|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Az általános szitaformula: A bizonyítás

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma.

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeinek 0.

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeinek 0.
- A jobb oldal értékét is értelmezhetjük úgy, mint egy számot, amely S elemeinek hozzájárulásából adódik.

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeinek 0.
- A jobb oldal értékét is értelmezhetjük úgy, mint egy számot, amely S elemeinek hozzájárulásából adódik.
- Azt fogjuk belátni, hogy S minden elemének a jobb és a bal oldalhoz való hozzájárulása ugyanaz.

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeinek 0.
- A jobb oldal értékét is értelmezhetjük úgy, mint egy számot, amely S elemeinek hozzájárulásából adódik.
- Azt fogjuk belátni, hogy S minden elemének a jobb és a bal oldalhoz való hozzájárulása ugyanaz.
- Az $i = i(s)$ paraméter jelölje azt, hogy s pontosan hány A_j halmazban van benne.

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeinek 0.
- A jobb oldal értékét is értelmezhetjük úgy, mint egy számot, amely S elemeinek hozzájárulásából adódik.
- Azt fogjuk belátni, hogy S minden elemének a jobb és a bal oldalhoz való hozzájárulása ugyanaz.
- Az $i = i(s)$ paraméter jelölje azt, hogy s pontosan hány A_j halmazban van benne. (i lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, n$).

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeinek 0.
- A jobb oldal értékét is értelmezhetjük úgy, mint egy számot, amely S elemeinek hozzájárulásából adódik.
- Azt fogjuk belátni, hogy S minden elemének a jobb és a bal oldalhoz való hozzájárulása ugyanaz.
- Az $i = i(s)$ paraméter jelölje azt, hogy s pontosan hány A_j halmazban van benne. (i lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, n$).
- Ekkor az $s \in S$ elem hozzájárulása a szita formula jobb oldali számához.

$$F(s) = 1 - i + \binom{i}{2} - \dots + (-1)^n \binom{i}{n} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Szünet



Elcserélt levelek problémája

Elcserélt levelek problémája

- Adott n megírt levél és a hozzájuk tartozó megcímezett borítékok.

Elcserélt levelek problémája

- Adott n megírt levél és a hozzájuk tartozó megcímezett borítékok. Hányféleképpen helyezhetők el a levelek úgy, hogy egyik levél se kerüljön a saját borítékába?

Elcserélt levelek problémája

- Adott n megírt levél és a hozzájuk tartozó megcímezett borítékok. Hányféleképpen helyezhetők el a levelek úgy, hogy egyik levél se kerüljön a saját borítékába?
- A problémát Euler és N. Bernoulli nevéhez kötik.

Elcserélt levelek problémája

- Adott n megírt levél és a hozzájuk tartozó megcímezett borítékok. Hányféleképpen helyezhetők el a levelek úgy, hogy egyik levél se kerüljön a saját borítékába?
- A problémát Euler és N. Bernoulli nevéhez kötik.
- Szita formula nélkül a kérdés fogós és komoly ötleteket kíván.

Elcserélt levelek problémája

- Adott n megírt levél és a hozzájuk tartozó megcímezett borítékok. Hányféleképpen helyezhetők el a levelek úgy, hogy egyik levél se kerüljön a saját borítékába?
- A problémát Euler és N. Bernoulli nevéhez kötik.
- Szita formula nélkül a kérdés fogós és komoly ötleteket kíván.
- Szita formulával azonban könnyen megoldható.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésénél az i -edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j -ediket.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésénél az i -edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j -ediket. Az elhelyezést egy $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ párbaállító leképezés/bijekció írja le.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésénél az i -edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j -ediket. Az elhelyezést egy $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ párbaállító leképezés/bijekció írja le.
- Azaz egy elhelyezés a $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy π permutációja.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésénél az i -edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j -ediket. Az elhelyezést egy $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ párbaállító leképezés/bijekció írja le.
- Azaz egy elhelyezés a $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy π permutációja.
- Az i -edik levél a saját borítékába kerül ha $\pi(i) = i$.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésénél az i -edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j -ediket. Az elhelyezést egy $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ párbaállító leképezés/bijekció írja le.
- Azaz egy elhelyezés a $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy π permutációja.
- Az i -edik levél a saját borítékába kerül ha $\pi(i) = i$. Ekkor azt mondjuk, hogy i a π permutáció fixpontja.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzá tartozó borítékokat. Azaz az i -edik levél borítékja is legyen az i -edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésénél az i -edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j -ediket. Az elhelyezést egy $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ párbaállító leképezés/bijekció írja le.
- Azaz egy elhelyezés a $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy π permutációja.
- Az i -edik levél a saját borítékába kerül ha $\pi(i) = i$. Ekkor azt mondjuk, hogy i a π permutáció fixpontja.
- A kérdés: Hány fixpontmentes permutációja van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak?

Elcserélt levelek problémája: A tétel

Elcserélt levelek problémája: A tétel

Tétel

Egy n elemű halmaz fixpont nélküli permutációinak száma

$$\begin{aligned} n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} &= \\ n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) &= \\ n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!} &= \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$. Ez a szita formula alapján felírható.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$. Ez a szita formula alapján felírható. A felírás mindegyik tagját meghatároztuk.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$. Ez a szita formula alapján felírható. A felírás mindegyik tagját meghatároztuk. A kapott formula a bizonyítandót egyenlőségsorozat kezdetét adja.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$. Ez a szita formula alapján felírható. A felírás mindegyik tagját meghatároztuk. A kapott formula a bizonyítandót egyenlőségsorozat kezdetét adja.
- Az utolsó egyenlőség belátásához némi analízisbeli ismeretek és ötletek szükségesek.

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n - i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$. Ez a szita formula alapján felírható. A felírás mindegyik tagját meghatároztuk. A kapott formula a bizonyítandót egyenlőségsorozat kezdetét adja.
- Az utolsó egyenlőség belátásához némi analízisbeli ismeretek és ötletek szükségesek. Ennek igazolását az érdeklődő hallgatókra bízom.

Szünet



Leképezések összeszámlálása

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik?

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz:

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül.

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet.

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \dots \cdot k = k^n$ lehetőség van.

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \dots \cdot k = k^n$ lehetőség van.
- Ezek közül hány injektív van?

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \dots \cdot k = k^n$ lehetőség van.
- Ezek közül hány injektív van? Ismét ismert a válasz: $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \dots \cdot k = k^n$ lehetőség van.
- Ezek közül hány injektív van? Ismét ismert a válasz: $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.
- A bijektívek függvények összeszámlálása a fentiekből automatikusan adódik:

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \dots \cdot k = k^n$ lehetőség van.
- Ezek közül hány injektív van? Ismét ismert a válasz: $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.
- A bijektívek függvények összeszámlálása a fentiekből automatikusan adódik: Csak $k = n$ esetén lehetséges bijektív függvény, ekkor viszont az összes injektív függvény bijektív is lesz.

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \rightarrow K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \dots \cdot k = k^n$ lehetőség van.
- Ezek közül hány injektív van? Ismét ismert a válasz: $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.
- A bijektívek függvények összeszámlálása a fentiekből automatikusan adódik: Csak $k = n$ esetén lehetséges bijektív függvény, ekkor viszont az összes injektív függvény bijektív is lesz. Azaz a válasz

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq k, \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases}$$

Szűrjektív leképezések száma

Szűrjektív leképezések száma

- Egy alapkérdés még maradt:

Szürjektív leképezések száma

- Egy alapkérdés még maradt: Hány szürjektív $N \rightarrow K$ függvény van?

Szürjektív leképezések száma

- Egy alapkérdés még maradt: Hány szürjektív $N \rightarrow K$ függvény van?
- A kérdés jóval nehezebb a fentieknél. A szita formula ismeretében azonban könnyen megoldható.

Szűrjektív leképezések száma

- Egy alapkérdés még maradt: Hány szűrjektív $N \rightarrow K$ függvény van?
- A kérdés jóval nehezebb a fentieknél. A szita formula ismeretében azonban könnyen megoldható.

Jelölés

Jelöljük $\text{szürj}(n, k)$ -val szűrjektív $N \rightarrow K$ függvények számát, ahol $|N| = n$, $|K| = k$.

Szürjektív leképezések száma

- Egy alapkérdés még maradt: Hány szürjektív $N \rightarrow K$ függvény van?
- A kérdés jóval nehezebb a fentieknél. A szita formula ismeretében azonban könnyen megoldható.

Jelölés

Jelöljük $\text{szürj}(n, k)$ -val szürjektív $N \rightarrow K$ függvények számát, ahol $|N| = n$, $|K| = k$.

Tétel

$$\text{szürj}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Szűrjektív leképezések száma: A megoldás

Szürjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n , illetve k elemű halmaz.

Szürjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n , illetve k elemű halmaz.
- Legyen $S = \{f \mid N \rightarrow K\}$, és $A_t = \{f \in S : t \notin f(N)\}$ ($t \in K$), azaz A_t tartalmazza azokat a függvényeket, amelyek nem veszik fel a t értéket.

Szürjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n , illetve k elemű halmaz.
- Legyen $S = \{f \mid N \rightarrow K\}$, és $A_t = \{f \in S : t \notin f(N)\}$ ($t \in K$), azaz A_t tartalmazza azokat a függvényeket, amelyek nem veszik fel a t értéket.
- Ekkor

$$\text{szürj}(n, k) = |S \setminus \bigcup_{t \in K} A_t|.$$

Szűrjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n , illetve k elemű halmaz.
- Legyen $S = \{f \mid N \rightarrow K\}$, és $A_t = \{f \in S : t \notin f(N)\}$ ($t \in K$), azaz A_t tartalmazza azokat a függvényeket, amelyek nem veszik fel a t értéket.
- Ekkor

$$\text{szürj}(n, k) = |S \setminus \bigcup_{t \in K} A_t|.$$

- Legyen $L \subseteq K$.

Szűrjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n , illetve k elemű halmaz.
- Legyen $S = \{f \mid N \rightarrow K\}$, és $A_t = \{f \in S : t \notin f(N)\}$ ($t \in K$), azaz A_t tartalmazza azokat a függvényeket, amelyek nem veszik fel a t értéket.

- Ekkor

$$\text{szürj}(n, k) = |S \setminus \cup_{t \in K} A_t|.$$

- Legyen $L \subseteq K$. Ekkor $|\cap_{\ell \in L} A_\ell| = (k - |L|)^n$.

Szűrjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n , illetve k elemű halmaz.
- Legyen $S = \{f \mid N \rightarrow K\}$, és $A_t = \{f \in S : t \notin f(N)\}$ ($t \in K$), azaz A_t tartalmazza azokat a függvényeket, amelyek nem veszik fel a t értéket.
- Ekkor

$$\text{szürj}(n, k) = |S \setminus \cup_{t \in K} A_t|.$$

- Legyen $L \subseteq K$. Ekkor $|\cap_{\ell \in L} A_\ell| = (k - |L|)^n$.
- Ezek után a szita formula alkalmazható, és kapjuk, hogy

$$\text{szürj}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!