**KOMBINATORIKA GYAKORLAT**
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

# Rekurziók

*Gyakorlatvezető: Hajnal Péter* 2020

## 1. Rekurziók sorozatokra

**1. Feladat.** *Írjuk fel az első* 20 *Fibonacci-számot. Írjuk fel a Pascal-háromszög első* 15 *sorát.*

**2. Feladat.** *Definiáljuk a számtani, illetve mértani sorozatokat rekurzív módon.*

**3. Feladat.** *Az alábbiakban rekurzióval definiálunk egy-egy sorozatot. Számoljuk ki az első néhány elemét a sorozatnak.*

*a)*
$$s_0 = 1, \quad s_{n+1} = s_n + 13 \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*b)*
$$r_0 = r_1 = 1, \quad r_{n+2} = r_n + 13 \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*c)*
$$m_0 = 1, \quad m_{n+1} = -3m_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*d)*
$$\mu_0 = 1, \mu_1 = 2, \quad \mu_{n+2} = -3\mu_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*e)*
$$e_0 = 1, \quad e_{n+1} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor e_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*f)*
$$f_0 = 1, \quad f_{n+1} = \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) f_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*g)*
$$L_0 = 2, L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*h)*
$$a_0 = a_1 = 1. \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*i)*
$$b_0 = b_1 = 1. \quad b_{n+2} = b_{n+1} + 3b_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*j)*
$$c_0 = c_1 = c_2 = 1, \quad c_{n+3} = c_{n+2} + c_{n+1} + c_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*k)*
$$d_0 = d_1 = d_2 = 1, \quad d_{n+3} = c_{n+2} - c_{n+1} + c_n \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*l)*

$$k_1 = 2, \quad k_{n+1} = k_n^2, \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*m)*

$$k_1 = 2, \quad k_{n+1} = 2^{k_n}, \quad (\textit{ha } n \geq 0),$$

*n)*

$$Q(1) = Q(2) = 1, \quad Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \quad (\textit{ha } n > 2),$$

*o)*

$$T(1) = T(2) = 1, \quad T(n) = T(T(n-1)) + T(n - T(n-1)) \quad (\textit{ha } n > 2),$$

*p)*

$$M(1) = 1, M(2) = 2,$$
$$M(n) = M(n - M(n-1)) + M(n - 1 - M(n-2)) \quad (\textit{ha } n > 2),$$

*q)*

$$s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 1,$$
$$s_n s_{n-4} = s_{n-1} s_{n-3} + s_{n-2}^2, \quad (\textit{ha } n \geq 4),$$

*r)*

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1,$$
$$t_n t_{n-5} = t_{n-1} t_{n-4} + t_{n-2} t_{n-3}, \quad (\textit{ha } n \geq 5),$$

*s)*

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 1,$$
$$u_n u_{n-6} = u_{n-1} u_{n-5} + u_{n-2} u_{n-4} + u_{n-3}^2, \quad (\textit{ha } n \geq 6),$$

*t)*

$$v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = 1,$$
$$v_n v_{n-7} = v_{n-1} v_{n-6} + v_{n-2} v_{n-5} + v_{n-3} v_{n-4}, \quad (\textit{ha } n \geq 7).$$

*u)*

$$w_0 = 1, w_1 = 2,$$
$$w_n = w_{n-1} w_{n-2}, \quad (\textit{ha } n \geq 2).$$

**Definíció.** Egy $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ sorozat lineáris rekurziót teljesít, ha van olyan $k \in \mathbb{N}_+$ és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ valós számok, hogy a sorozat minden tagja a $k+1$-edikkel kezodődően az előző $k$ tagból kapható meg az

$$s_\ell = \alpha_1 \cdot s_{\ell-1} + \alpha_2 \cdot s_{\ell-2} + \ldots + \alpha_k \cdot s_{\ell-k}$$

képlettel.

Ha ráadásul megadjuk a sorozat első $k$ tagját, akkor egyértelműen leírjuk/definiáljuk azt. Ekkor azt mondjuk a sorozat lineáris rekurzióval definiált.

**4. Feladat.** *Egy építőjátékunk van, amely piros és kék színű, egyforma téglákat tartalmaz (mindegyikből eleget). A téglák egymásra rakásával $n$ magas tornyot építünk.*

a) *Hány féle lehetőségünk van?*

b) *Hány féle lehetőségünk van, ha szomszédos szinteket különböző színűnek szeretnénk?*

c) *Tegyük fel, hogy nem engedjük meg, hogy két piros tégla szomszédos szintre kerüljön? Legyen $T_n$ a lehetőségek száma. Írjuk le a $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot.*

**5. Feladat.** *Egy négyzetalakú mezőkből alkotott táblához dominóink vannak. Egy dominó alakja két élénél összeragasztott mező. A tábát dominókkal szeretnénk lefedni, hogy minden dominó két mezőt fedejen le (ne lógjon le) és minden mezőt egy dominó fedjen le (a dominók ne kerüljenek egymásra).*

a) *Táblánk legyen $2 \times n$ méretű. Legyen $D_n$ a dominó fedések száma. Adjunk rekurziót a $D_n$ számokra.*

b) *Mi a helyzet, ha egyenes trominókkal fedünk (három egysorban lévő, egymás melletti mező összeragasztásával kapott alakzat)?*

c) *Mi a helyzet, ha triminókkal fedünk $3 \times n$ méretű táblát?*

d) *Mi a helyzet ha dominókkal fedünk $3 \times n$ méretű táblát?*

e) *Egy két egy sorban lévő mező és az egyik felett lévő mező összeragasztásával kapott alakzatot nevezzük L-alaknak. (Persze az L-alakok elforgathatók.) Hány fedése van a $2 \times n$ alakú táblának L alakok és dominók segítségével?*

**6. Feladat.** *Egy nyúlpár születésük után két hónappal kezdenek el kölykezni. Ekkor és ezek után minden hónapban a nőstény egy hím és egy nőstény alkotta nyúlpárnak ad életet (amelyek természetesen szintén a fent leírt szabály szerint élik életüket). Hány nyúlpárunk lesz egy év múlva, ha az év elején csak egy újszülött nyúlpárunk van, és feltételezzük, hogy közben egy sem pusztul el és további nyulakat már nem kapunk?*

**7. Feladat.** *Egy ábécé hat betűből áll, az ezeknek megfelelő morzejelek:*

$$\cdot \;\; ; \;\; - \;\; ; \;\; \cdot\cdot \;\; ; \;\; -- \;\; ; \;\; \cdot- \;\; ; \;\; -\cdot$$

*Egy bizonyos szó továbbításához 12 jelet (pontot, illetve vonást) használtak fel, de az egyes betűknek megfelelő szimbólumokat nem választották el egymástól, ezért a szót többféleképpen lehet értelmezni. Hányféleképpen?*

**8. Feladat.** *Hány olyan szigorúan növekvő, pozitív egészekből álló sorozatok van, amelyek utolsó eleme $n$-nél nem nagyobb és paritása $n$ paritásával azonos, valamint az egymást követő számok paritása váltakozik?*

**9. Feladat.** *$n$ darab 100 forintosunk van. Minden nap pontosan egy dolgot veszünk a következők közül (a zárójelben az egységár található): perec (100 forint), fagylalt (200 forint), csokoládé (200 forint). Határozzuk meg azt a $k_n$ számot, ahányféleképpen elkölthetjük pénzünket.*

**10. Feladat.** *Legyen $x_n$ azoknak az $n$ jegyű és csak $0, 1, 2$ számjegyeket tartalmazó számoknak a száma, amelyekben bármely két szomszédos számjegy legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Igazoljuk, hogy $n \geq 2$-re $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$.*

**11. Feladat.** *Egy négyzethálós papíron az egyik $O$ rácspontból kiindulva elkezdünk sétálni. A sétánk lépésekből áll. Minden lépés nyugatra, északra vagy keletre vezet úgy, hogy szomszédos rácspontba érkezzünk. Sétánk folyamán egyik rácspontot sem érinthetjük egynél többször. Legyen $s_n$ az $n$ lépésből álló, fenti feltételeknek eleget tevő séták száma. Adjunk meg olyan lineáris rekurziót, amelyet $s_n$ kielégít.*

**12. Feladat.** *Vegyünk egy kör alakú asztalt, amely körül $n$ darab szék van, amelyek egy szabályos sokszög csúcsaiban vannak elhelyezve. Tegyük fel, hogy embereket ültetünk le az asztalhoz úgy, hogy ne legyen két szomszédos szék elfoglalva, de ezen feltétel mellett már ne ülhessenek le többen (azaz két olyan ember között, akik között nem ül senki, egy vagy két üres szék lehet). Egy leültetésnél csak azt nézzük, hogy mely székeket foglaljuk el. Hányféleképpen oldható meg a leültetés?*

⋆

**13. Feladat.** *Keressünk olyan geometriai sorozatot, amelynek a harmadik tagjától kezdve minden eleme az előző kettő összege.*

**14. Feladat.** *Igazoljuk, hogy ha két sorozatra teljesül, hogy a harmadik tagjától kezdve minden eleme az előző kettő összege, akkor ez a tulajdonság öröklődik a sorozatok összegére és számszorosára is.*

**15. Feladat.** *Keressünk olyan formulát, amely által leírt sorozatnak a harmadik tagjától kezdve minden eleme az előző kettő összege, továbbá első két eleme:* $1, 1$.

**16. Feladat.** *Adjunk rekurziót a*

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

*oszlopvektorok sorozatára, ahol $F_n$ az $n$ paraméterű Fibonacci-szám.*

⋆

**17. Feladat.** *Adjunk meg olyan lineáris rekurziót, amelyet kielégít az alábbi sorozat:*

*a)* $a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n + 4 \cdot 3^n$,

*b)* $b_n = 2^n + 3 \cdot (-1)^n$,

*c)* $c_n = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 32)^n + \frac{1}{3}(\frac{-\sqrt{17}-3}{2})^n$.

**18. Feladat.** *Legyen $A$ és $E$ egy szabályos nyolcszög két átellenes csúcsa. Egy béka az $A$ csúcsból kiindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából, az $E$ csúcsot kivéve, a mellette lévő csúcsba ugorhat. Ha az $E$ csúcsba ér, akkor megáll és ott marad. — Legyen $a_n$ a pontosan $n$ ugrásból álló különböző utak száma. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n$ pozitív egész esetén*

$$a_{2n-1} = 0, \quad \text{és} \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right).$$

*Megjegyzés: Egy pontosan $n$ ugrásból álló út a csúcsoknak olyan $P_0$, $P_1$, …, $P_n$ sorozata, amely eleget tesz a következő feltételeknek:*

*I.* $P_0 = A, \qquad P_n = E,$

*II. Minden, a* $0 \le i \le n-1$ *egyenlőtlenséget kielégítő* $i$*-re* $P_i$ *különbözik* $E$*-től.*

*III. Minden, a* $0 \le i \le n-1$ *egyenlőtlenséget kielégítő* $i$*-re* $P_i$ *és* $P_{i+1}$ *szomszédos.*

⋆

**19. Feladat.** *Az* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *és* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozatokra* $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, *és mindkét sorozatra egy tag az előző két tag összege. Hány olyan szám van, amely mindkét sorozatban szerepel?*

**20. Feladat.** *Legyen* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a következő lineáris rekurzióval definiált sorozat:*

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 2, \qquad x_{n+1} = x_{n-2} + 2x_{n-1}.$$

*Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak minden* $m$ *természetes számra van* $m$*-mel osztható két szomszédos tagja.*

**21. Feladat.** *Adott az*

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 12, \qquad a_3 = 20, \qquad a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$$

*sorozat. Bizonyítsuk be, hogy* $1 + 4a_n a_{n+1}$ *négyzetszám.*

# 2. Fibonacci-számok

**Definíció.** A Fibonacci-számoknak több definíciója van. Mi most az alábbit használjuk:

$$F_1 = F_2 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ ha } n \ge 3.$$

Azaz a sorozat a pozitív egészekkel indexelt és első két tagja 1.

**22. Feladat.** *Igazoljuk, hogy*

*a)*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

*b)*

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n},$$

*c)*

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

*d)*

$$F_1 - F_2 + F_3 - \cdots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1,$$

*e)*

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$$

*f)*

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

*g)*

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1},$$

*h)*

$$n \mid m \text{ esetén } F_n \mid F_m,$$

*i)*

$$(F_n, F_m) = F_{(n,m)}.$$

**23. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozatban minden $n > 1$ pozitív egész számra az $n$ számjegyű tagok száma legalább négy és legfeljebb öt.*

**24. Feladat.** *Igazoljuk, hogy*

$$F_n = \sum_{i,j\in\mathbb{N}: i+j=n-1, j\le i} \binom{i}{j}.$$

# 3. Rekurziók két indexes számseregekre

**25. Feladat.** *Emlékezzünk, hogy $\binom{n}{k}$ egy $n$ elemű halmaz $k$ elemű részhalmazainak száma. Igazoljuk, hogy*

*a)* $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, *tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén,*

*b)* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, *ha $1 \le k \le n$.*

*A fentiek alaján írjuk fel a Pascal-háromszög első 10 sorát. Az első hat sor esetén minden szám mellé soroljuk fel a megszámolt részhalmazok listáját*

**26. Feladat.** *Legyen $\left\{ {n \atop k} \right\}$ az a szám, amely megmondja hány féleképpen oszthatunk ki $n$ különböző édességet $k$ tányérba úgy, hogy ne legyen üres tányér.*

*a)* *Igazoljuk, hogy* $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\}$.

*b)* *Adjunk rekurzió a ezekre a számokra.*

*Kis paraméter értékekre számoljuk ki a $\left\{ {n \atop k} \right\}$ számokat. Az egyes számok mögött írjuk is fel az összeszámolt lehetőségek listáját.*

**27. Feladat.** *Egy boltban $n$-féle képéslap van. $k$ barátunknak szeretnénk egyet-egyet küldeni. A boltban megvesszük az összes lapot ($k$ darabot). hány lehetőségünk van? (Csak a vásárolandó lapokról kell döntenünk.) A válasz legyen $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.*

*a)* *Igazoljuk, hogy* $\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$.

*b)* *Adjunk rekurziót a* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ *számokra.*

*Írjuk fel a $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számokat kis paraméter értékek esetén. Az egyes számok mögött írjuk is fel az összeszámolt lehetőségek listáját.*

**28. Feladat.** *Írjuk le $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ számokat formulával.*
*Igazoljuk a formulát kombinatorikus úton.*

**29. Feladat.** *$n$ óvodás játszik az udvaron. $k$ kört alakítanak ki (egy gyerek is lehet kör). A lehetőségek számát jelöljük $\left[{n \atop k}\right]$-val.*

*a) Igazoljuk, hogy $\left[{n \atop n}\right] = 1$.*

*b) Határozzuk meg $\left[{n \atop 1}\right]$ értékét.*

*c) Adjunk rekurziót a $\left[{n \atop k}\right]$ számokra.*

*Írjuk fel a $\left[{n \atop k}\right]$ számokat kis paraméter értékek esetén. Az egyes számok mögött írjuk is fel az összeszámolt lehetőségek listáját.*

**30. Feladat.** *A következő formula rekurzíven leír egy $\mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ függvényt:*

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \textit{ha } m = 1 \\ 2 & \textit{ha } m > 1 \textit{ és } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \textit{ha } m > 1 \textit{ és } n > 1. \end{cases}$$

*Mi $A(4,4)$ értéke? Mi $A(5,5)$ értéke? Írjuk fel a fenti számokat kis paraméter értékre. Az első két sorban és két oszlopban lévő számokon túl hányról tudjuk megmondani hány számjegyűek?*