KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Multihalmazok

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2023, 6. hét

1. Feladat. *Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajta gyümölcsök teljesen egyformák.)*

2. Feladat. *Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)*

3. Feladat. *Egy* 150 *cm hosszú centit (amit a boltban lehet kapni) a beosztásoknál elvágogatjuk úgy, hogy* 20 *részre essen szét. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*

4. Feladat. *Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?*

$$a + b + c + d = 2020.$$

5. Feladat. *Hány megoldása van a pozitív egész számok körében a*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{214} = 2014$$

egyenletnek?

Mi lesz a válasz, ha a természetes számok között számoljuk a megoldásokat?

6. Feladat. *Hányféleképpen oszthatunk el k darab (egyforma) ötforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy*

a) tetszőleges elosztás megengedett;

b) mindenki kapjon legalább egy érmét;

c) az i-edik gyerek legalább i érmét kapjon ($i = 1, \ldots, n$);

d) mindenki páros sok érmét kapjon;

e) mindenki páratlan sok érmét kapjon?

7. Feladat. *Cégünknél 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzösszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?*

8. Feladat. *Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?*

9. Feladat. *Hányféleképpen lehet n darab egyforma érmét k ember között szétosztani, ha mindenki legfeljebb egyet kaphat?*

Hányféleképpen lehet n darab egyforma érmét k ember között szétosztani?

10. Feladat. *Hány monoton növő $[n] \to [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)*

11. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \ldots, 2n + 1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \ldots, 2n + 1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).*

12. Feladat. *Az (n elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora $(m_1, \ldots, m_n)$. Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{m_k}).$$

13. Feladat. *Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \ldots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ multiplicitásai párosak?*

14. Feladat. *Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:*

a)

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right),$$

b)

$$\left(\!\!\binom{2n}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \left(\!\!\binom{n}{n-k}\!\!\right),$$

c)

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k-1}\!\!\right) + \ldots \left(\!\!\binom{n-1}{1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right).$$