KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Részhalmazok

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2023. 3. hét

1. Feladat. *Egy lottóhúzás (normál lottó) története az öt szám és kihúzásuk sorrendje. Egy lottóhúzás eredménye a kihúzott öt szám halmaza. (Mi a különbség a két fogalom között?)*

Hányféle történet lehet egy lottóhúzásnak? Hányféle történet vezet ugyanahhoz az eredményhez? Hányféle eredménye lehet egy lottóhúzásnak?

2. Feladat. *Hányféleképpen lehet n darab különböző tárgy közül k darabot kiválasztani, és a kiválasztottakat sorba állítani?*

Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

3. Feladat. *Hét különböző nagyságú almából és három különböző nagyságú barackból két csomagot készítünk. Ezt hány különböző módon tehetjük meg úgy, hogy mindkét csomagban öt gyümölcs és közöttük legalább egy barack legyen?*

4. Feladat. *Egy raktárban 20 öltöny van, amelyek közt 9 szövési hibákat tartalmaz, a többi hibátlan. Egy kereskedő kiválaszt 15 öltönyt. Hány olyan választási lehetősége van, hogy legfeljebb 5 legyen hibás?*

5. Feladat. *Öt párhuzamos egyenest 11 párhuzamos, az előzőkre merőleges egyenesek metszenek. Hány téglalapot határoznak meg az így kapott rács vonalai?*

6. Feladat. *Igazoljuk kombinatorikus úton a következő összefüggéseket:*

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$,

e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

f) $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$,

g) $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + n \cdot m + \binom{m}{2}$,

h) $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$.

7. Feladat. *Hányféleképpen olvasható ki a fenti karakter táblázatból, hogy SZÁMOL, ha az összeolvasott betűknek folyamatosan (egymás után mindig szomszédosak következnek) kell elhelyezkedni?*

$$a)\ \begin{array}{cccccc} S & Z & Á & M & O & L \\ Z & Á & M & O & L & \\ Á & M & O & L & & \\ M & O & L & & & \\ O & L & & & & \\ L & & & & & \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{cccc} S & Z & Á & M \\ Z & Á & M & O \\ Á & M & O & L \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{cccc} & & O & L \\ & Á & M & O \\ S & Z & Á & M \\ & Á & M & O \\ & & O & L \end{array}$$

8. Feladat. *Hányféleképpen juthatunk el egy sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha egyszerre csak felfelé vagy jobbra léphetünk egyet?*

Mi a válasz ha táblánk mérete $n \times n$-es? És ha $n \times m$-es?

9. Feladat. *a) Milyen n és k természetes számok esetén lesz egy számtani sorozat három szomszédos tagja*

$$\binom{n}{k-1},\ \binom{n}{k},\ \binom{n}{k+1}\ ?$$

b) Lehetséges-e, hogy $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$ egy számtani sorozat egymást követő elemei ($0 \le k < k+3 \le n$)?

10. Feladat. *Írjuk fel a Pascal-háromszög első 16 sorát és pirossal satírozzuk be azokat a pozíciókat, ahol páratlan szám áll.*

11. Feladat. *Igazoljuk, hogy $(1+x)^{2^n}$ kifejtésében 1 és x^{2^n} monomokon kívül mindegyik páros együtthatóval szerepel.*

12. Feladat. *A Pascal-háromszög n-edik sora csak páratlan számokat tartalmaz. Mit mondhatunk n-ről?*

13. Feladat. *Igazoljuk, hogy az ötöslottó korrekt kitöltéseinek (90 számból öt beikszelése) páros sokféle módon lehetséges. Megoldásunk ne használjon képletet $\binom{90}{5}$-re.*

14. Feladat. *Egy n szintes panelház mindegyik szintjén két panel néz az utcára. Az utcára néző $2n$ darab panel részből k darabot pirosra színeznek. Hányféleképpen tehetik ezt meg?*

Hány lehetőség van, ha két színezést nem különböztetünk meg, ha egyiket megkaphatjuk a másikból a ház függőleges szimmetriatengelyére való tükrözéssel?

15. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

a) Igazoljuk, hogy $\binom{2n}{2k+1}$ páros.

b) Igazoljuk, hogy $\binom{2n+1}{2k+1}$, $\binom{2n+1}{2k}$ és $\binom{2n}{2k}$ ugyanolyan paritású mint $\binom{n}{k}$.

c) Határozzuk meg $\binom{2014}{1000}$ paritását.

d) A fenti feladatok alapján adjunk egy hatékony algoritmust $\binom{n}{k}$ paritásának kiszámolására.