KOMBINATORIKA GYAKORLAT

osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Polinomok

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2023. 5. hét

1. Feladat. *Találjunk ki egy feladatot, amelyre a válasz* $(m+1)^n$.

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden* n *pozitív egészre teljesül, hogy tetszőleges* m *számra*

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \ldots + \binom{n}{n}m^n.$$

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden* n *pozitív egészre teljesül, hogy*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

4. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az* $(x+y)(z+t)$ *betűs kifejezésben. A kapott monomok között lehet-e összevonni? Hány monomot kapunk a kifejtésben?*

Válaszoljuk meg a fenti kérdéseket

$$(a+b)(b+c+d)(e+f+g+h)(i+j)$$

kifejezés esetén is.

5. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az* $(1+x)(1+x)\ldots(1+x) = (1+x)^n$ *betűs kifejezésben. A kapott monomok között lehet-e összevonni? Hány* x^k *monomot kapunk a kifejtésben?*

6. Feladat. *Mi a* $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ *kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?*

7. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a* $\left(3x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^5$ *hatvány kifejtésében:* x^{-5}, x^0, x^3, x^4 *és* x^5.

8. Feladat. * *Bizonyítsuk be, hogy ha* n *természetes szám, akkor* $(5+\sqrt{26})^n$ *tizedestört-alakjában a tizedesvesszőt követő első* n *jegy egyenlő.*

$\star \quad \star \quad \star$

9. Feladat. *Milyen tagokat, milyen együtthatóval kapunk, ha a* $(x+y+z)^n$ *hatványt kifejtjük?*

10. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a* $(1+x^3+x^4)^{12}$ *hatvány kifejtésében:* x^{16}, x^{20}, x^{23}.

$\star \quad \star \quad \star$

11. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az*

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})(1+x^{64})$$

polinom-szorzatban. Próbáljuk számelméleti magyarázatát adni az eredménynek.

12. Feladat. *Indokoljuk meg, hogy a következő két feladatnak mi köze van egymáshoz. A b) feladatot az a) feladat felhasználásával oldjuk meg. Majd néhány lehetséges kifizetésnél ellenőrizzük a lehetőségek számát kombinatorikusan.*

a) Határozzuk meg az

$$(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{10})(1+x^{20}+x^{40})$$

polinomszorzás eredményét. Ehhez használhatunk számítógépet. (Például az ingyenes Wolfram Alpha-t.)

b) Pénztárcánkban négy 5-forintos, egy 10-forintos, és két 20-forintos van. Milyen összegeket tudunk pontosan kifizetni (tehát úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni)? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van?

13. Feladat. *Lehetséges-e két dobókockát úgy „cinkelni" (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után a kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége azonos legyen?*

14. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az* $(1-x)(1+x)(1-x)(1+x)\dots(1-x)(1+x)$ *betűs kifejezésben (2n tényező, felváltva* $1+x$ *és* $1-x$*-ek). Összevonás után mi lesz* x^k *együtthatója a szorzatban? Tudunk-e ennek kombinatorikus értelmet adni?*

15. Feladat. *[1986. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 3. feladata] A és B a következő játékot játssza: az első száz pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként B. Milyen k-ra lesz egyenlő A és B nyerési esélye?*

16. Feladat. *Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége*

a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),

b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),

c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?

Olyan megoldást adjunk, amely nagy számok esetén is működik (pl. ha 2018 számból húzunk 100-at).