Borbély Zsuzsanna

BOZVADT.SZE

**Kombinatorika beadandó érettségi feladatsorok**

2011-2012-2013

* + 1. *- közép*

I. A 2, 4 és 5 számjegyek mindegyikének felhasználásával elkészítjük az összes, különböző számjegyekből álló háromjegyű számot. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kiválasztott szám páratlan? Válaszát indokolja!

II. András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír-cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut?

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg! (A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) A húzó neve az oszlopok, a sorok pedig a cédulák megfelelő sorrendjei.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |
|  |  |  |  | E |

c)Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett?

*2011.05.03 – emelt szint*

I. Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll. A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!

b)Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl?

c) Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor!

*2011. 10.18 – közép*

I. Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti.



a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban?

b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba?

c) A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél? Válaszát három tizedes jegyre kerekítve adja meg!

II.a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} halmaznak?

b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?

c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne?

*III. Egy csonka kúp alakú tejfölös doboz méretei a következők: az alaplap átmérője 6 cm, a fedő lap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm.*

*a) Hány cm3 tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg? Válaszát tíz cm3-re kerekítve adja meg!*

*b)A gyártás során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg.*

*2011.10.18 – emelt szint*

I. Egy urnában egy fehér, egy piros és egy kék golyó található. Egymás után ötször húzunk az urnából egy-egy golyót úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során kihúzott kék és piros golyók száma megegyezik?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során több kék golyót húzunk, mint pirosat?

II.

Egy újfajta, enyhe lefolyású fertőző betegségben a nagyvárosok lakosságának 5%-a betegszik meg. A betegek 45%-a rendszeres dohányos, a betegségben nem szenvedőknek pedig csak 20%-a dohányzik rendszeresen.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy nagyváros száz véletlenszerűen kiválasztott lakosa között legalább két olyan ember van, aki az újfajta betegséget megkapta? (Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

b) Számítsa ki, hogy a rendszeres dohányosoknak és a nem dohányosoknak hány százaléka szenved az új betegségben!

*2012.05.18 - közép*

I. Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 4 lesz? Válaszát indokolja!

*2012.05.18 – emelt*

*I.A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma 34-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139.*

*a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!*

*Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).*

*b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai?*

II. Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az A, B, C, D, E és F osztály egy-egy csapattal vett részt.

1. Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az A és a B osztály végzett az elsőkét helyen, a D osztály pedig nem lett utolsó?
2. Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az E osztály megelőzte az F osztályt? A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje A, B, C, D, E, Felett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett B osztály legyőzte a bajnok A osztályt.
3. Mutassa meg, hogy a B és a D osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött!

III. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

1. Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között! A poharakat elő állító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.
2. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes! A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.
3. Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

*2012.10.16 – közép*

I.Egy érettségiző osztály félévi matematika osztályzatai között elégtelen nem volt, de az összes többi jegy elő fordult. Legkevesebb hány tanulót kell kiválasztani közülük, hogy a kiválasztottak között biztosan legyen legalább kettő, akinek azonos volt félévkor a matematika osztályzata?

II. Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.

a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos?

b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető? A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű?

*III. Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Életkor* | *17* | *18* | *19* | *21* | *22* | *23* | *24* | *25* | *26* | *31* |
| *Gyakoriság* | *2* | *1* | *1* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *1* | *1* |

*a) Számítsa ki a csapat átlagéletkorát! Jelölje A azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.*

*b) Számítsa ki az A esemény valószínűségét! A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdő csapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:*

*•a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,*

*•a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,*

*•a hat játékos életkorának mediánja 23 év,*

*•a hat játékos életkorának átlaga 24 év.*

*c) Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát!*

*1012.10.16 – emelt*

I.Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.



a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)

*II. Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Kijelölünk e-n 5, f-en pedig 4 különböző pontot.*

*a) Hány (e-től és ft-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont?*

*Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?*

*b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az e egyenes 5 pontja is azonos színű és az f egyenes 4 pontja is azonos színű lesz?*

*2013.05.07 – közép*

*I.*Egy futóverseny döntőjébe hat versenyzőjutott, jelöljük őket A, B, C, D, E és F betűvel. A cél előtt pár méterrel már látható, hogy C biztosan utolsó lesz, továbbá az is biztos, hogy B és D osztozik majd az elsőkét helyen. Hányféleképpen alakulhat a hat versenyző sorrendje a célban, ha nincs holtverseny? Válaszát indokolja!

II. Adja meg annak valószínűségét, hogy a 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím!

*III. Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.*

*a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!*

*b, Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!)*

*c,) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket!*

*2013.05.07 – emelt*

*I. Egy építő készletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építő elem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.*

*a) Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedes jegyre kerekítve adja meg! A készletben az építő elemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.*

*b) Hányféle különböző szín-összeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni? A gyárban (ahol ezeket az építő elemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra. Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne*

*vásárolni, melyre igaz a következő állítás: 0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építő elemek között van selejtes.*

*c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András?*

II. Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.

a) Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű?

b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk?

c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal? Válaszait három tizedes jegyre kerekítve adja meg

* + 1. *– közép*

I. Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja!

II. Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek!

*b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominók egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egy-forma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kőlátható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet?*

*c)A „Ki nevet a végén?” Nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán!*

III. Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kell ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnyel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnyel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvutalványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnyel nem lehet nyerni semmit.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám a 3.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki?

Az a) és b) kérdésekre adott válaszait három tizedes jegyre kerekítve adja meg!

c) Számolással igazolja, hogy (három tizedes jegyre kerekítve) a telitalálat valószínűsége 0,004, a négyes találat valószínűsége pedig 0,099.

d) Ha a húzás előtt 240 szelvényt adtak el, akkor mekkora az alapítvány lottó-húzásból származó hasznának várható értéke?

III. Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre A, B, C, D és E. a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak?

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén A-ból C-be, ha a B, D és E pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az A pontot csak az út kezdetén, a C pontot csak az út végén érinthetjük.)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul?

Forrás: <http://www.oktatas.hu/>

\*A dőlt betűvel jelölt feladatok csak egy része tartalmaz kombinatorikára vonatkozó kérdéseket.