KOMBINATORIKA ELŐADÁS
osztatlan matematikatanár hallgatók számára

Bevezetés

Előadó: Hajnal Péter 2019.

A kombinatorika kurzus első fele összeszámlálásokkal foglalkozik (míg a második fél a gráfelméletet tárgyalja). Az összeszámlálási problémák alapkérdése, hogy határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van. Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepel egy paraméter, például: hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak. Itt egy H_n halmazsorozatról van szó és ennek elemei elemszámára kérdezünk rá. Az elemszám n-től függ. A válasz egy sorozat, mégpedig természetes számok egy sorozata.

Természetesen egy H halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter. Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban H-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit. Általában ezt nevezzük a halmaz elemeinek *listázásának*. Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk). Ez kis halmazok esetén nagyon hasznos feladat, néha nem is olyan egyszerű. Fontos, hogy a listázásnak legyen egy alapelve. Ezzel lehet kiküszöbölni a listázási feladat két buktatóját: egy elemet kihagyunk, illetve egy elemet többször is felírunk. Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen. Az ötös lottó kihűzott számötöseit összegyűjtő halmaz listázása értelmetlen feladat. Az elemszám meghatározása egy jó középiskolai gyakorlat. Megjegyezzük, hogy az óriási lista ellenére az elemszám tízes számrendszerben felírva csupán nyolc számjegy.

Egy paraméteres összeszámlálási problémát mindig érdemes úgy kezdeni, hogy kis paraméter értékekre listázzuk a halmazok elemeit. Így a feladat konkrét, megfoghatóvá válik.

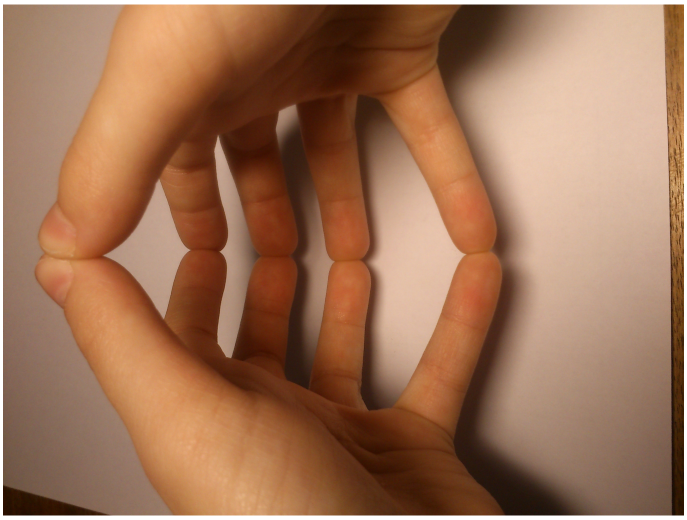
Az első rész az összeszámlálás kombinatorikus alapelveit tárgyalja.

1. Kombinatorikus alapelvek

Három alapelvet ismertetünk. Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza. Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat. Mindig feltesszük, hogy VÉGES halmazokkal dolgozunk, de erről később még szó lesz.

I. Bijektív alapelv

A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



1. ábra.

A képen egy kislány teszi össze bal, iletve jobb kezének ujjait. Ő már tud számolni, de ennélkül is látja (ahogy a számolni nem tudók is), hogy bal és jobb kezén ugyanannyi új van.

A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

2. ábra.

Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy. Párok alakulnak ki a két fajta figurák között. Ismét számolás nélkül tudhatjuk, hogy a két fajtából ugyanannyi darabunk van.

A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

3. ábra.

Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak. Tehát ugyanannyi balos cipő van a képen mint jobbos. A pontos számuk meghatározása egy számolás, összetettebb mint az egy pillanat alatt látható „azonos elemszámúság”.

A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja

4. ábra.

Ez alapján mindenki számolás nélkül tudja, hogy a csoportban ugyanannyi fiú van mint lány.

Meg is van az első alapelvünk.

HA két halmaz elemeit párokba tudjuk állítani, AKKOR a két halmaz azonos elemszámú.

Azért pontosítsunk. Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk? Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”. Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja. Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú, egy balos cipőnek jobbos, egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj. A és B halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli. Az is nyilvánvaló, hogy a párom párja én vagyok. Matematikai irásmóddal, ha $x \in A$, akkor x párjának ($\varphi(x) \in B$-nek) párja ($\psi(\varphi(x)) \in A$) x, azaz $\psi(\varphi(x)) = x$ bármi legyen is az $x \in A$ elem. Illetve hasonlóan ha $y \in B$, akkor y párjának ($\psi(y) \in A$-nak) párja ($\varphi(\psi(y)) \in B$) y, azaz $\varphi(\psi(y)) = y$ minden $y \in B$ elemre.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ egy párbaállító leképezés A-ból B-be, illetve ψ egy párbaállító leképezés B-ből A-be.

Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz φ meghatározza ψ-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító. Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lányhoz kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként. Ezen két tulajdonsággal szokták leírni a párbaállító leképezéseket. Ha „valamit” mindenki számára egyértelműen leírunk, akkor azt mondjuk hogy ezt a „valamit” definiáljuk. A leírás a „valami” definíciója.

Definíció. Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tualjdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a φ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés. Néha csak azt írjuk φ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk φ leképezés *ráképezés*.

A mai világban gyakoriak az idegen kifejezések használata. Az egy-egy értelmű φ leképzésre azt mondjuk *injekció*, φ injektív. A ráképzés φ leképzésre azt mondjuk *szürjekció*, φ szürjektív. Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az A és B halmazok közt ha injektív és szüjektív is, idegen szóval *bijektív*. Azaz a leképzések párbállító tulajdonságának egy másik neve a bijekció. Nyelvet tanultunk, a matematika nyelvét.

A matematikusok a jelöléseiket is próbálják ügyesen választani. Először talán szokatlan jelölések hosszú használat után természetessé válnak. A legtöbb jelölés hosszú évszázadok alatt végletesedik. $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először φ-t, majd ψ-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az x helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így x-et először a „közelebbi” függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a φ függvény által felvett értékeken ψ értelmezett. Speciálisan beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$. Ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$, ahol A, B, C három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes. Az amikor először φ-t, majd ψ-t alkalmazzuk. Azaz ekkor $\psi \circ \varphi$ egy jól definiált leképezés.

Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli. A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik A-n, a másik B-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez h-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a H-n értelmezett *identitás* függvény, jele id_H. Tehát egy párbaállító leképezés pár

($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi(x)$ is identitás, DE $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \mathrm{id}_B$. Ha két függvénynek ilyen viszonya van, akkor azt mondjuk, hogy egymás inverzei.

Definíció. $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$ leképzések egymás inverzei, ha $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$.

A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

1. Tétel. *$\varphi : A \to B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképzés.*

Tehát ha fiúk egy A halmazából lányok egy B halmazába történő leképzés párbaállító leképzés ($a \mapsto a$ párja), akkor van a lányok halmazából a fiúk halmazába menő leképzés ($b \mapsto b$ párja), hogy mindenki ($A \cup B$ minden elemére) párjának párja önmaga. Továbbá fordítva is igaz: ha fiúk egy A halmazából lányok egy B halmazába történő leképzéshez ($a \mapsto a$ párja) van a lányok halmazából a fiúk halmazába menő leképzés ($b \mapsto b$ párja), úgy hogy mindenki párjának párja önmaga, akkor a kiinduló leképezés párbaállító.

Két halmaz között leírt leképzésről gyakran úgy a legegyszerűbb belátni, hogy bijekció, hogy megadjuk inverzét. Azaz leírjuk, hogy x párja ismeretében, hogyan mondható meg, hogy mely x elemről van szó.

Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható. Egy „rejtvénytípust” definiálunk. A rejtvényben adott B egy tetszőleges eleme. A rejtvényt egy játékos fejti, aki számára ϕ ismert, azaz tudja, hogyan, milyen szabály szerint kell egy A-beli elemhez a képét hozzárendelni. A játékosnak azt kell kitalálnia, hogy mely A-beli elem képe b. Ha ez a rejtvénytípus olyan, hogy minden esetben van megoldása és az egyértelmű, az pontosan azt jelenti, hogy ϕ párbaállító leképezés.

⋆

Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az A és B halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés. Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképzésünk egy-egyértelmű (ráképezést nem tudjuk). Az alábbi képen két fajta Kinder játékokat raktunk egymás mellé.

5. ábra.

A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök T halmazából van egy „párja” leképezés a mókusok M halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

A következő tételt mondhatjuk ki:

2. Tétel. *Legyenek A és B véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.*

A figyelmes olvasó észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek. Mi is ez? Miért is van szükségünk erre a feltételre?

⋆

Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül. Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz. A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

Ennek ellenére a negatív egészékhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon pár nélküli pozitív egész. Például ha x párja $-x+1$, akkor a negatív számok egyikének sem lesz párja az 1. Ha pedig az x negatív egész párjának $-2x$-et nevezzük ki, akkor minden páratlan pozitív egész olyan lesz, mint a korábbi képünkön az utolsó két mókus. Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”. Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

Akkor jó lenne tisztázni, hogy mik a véges halmazok? Néhány példa véges halmazra:

$$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \ldots$$

A fenti példánk nyilván végtelen, minden n természetes számra $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$ a fenti sorozat egy eleme. Erre a halmazra van is egy jelölés: $[n]$. Azaz $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$). Ezeket standard véges halmazoknak nevezzük.

Definíció. Egy H halmaz véges, ha elemei párba állíthatók egy standard véges halmaz elemeivel.

Ha H elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állítjuk, akkor azt mondjuk, hogy H egy n elemű halmaz. Azt is mondhatjuk, hogy egy H halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt. Azaz bijekciót létesítettünk ujjaink és egy standard véges halmaz között. Ismét egy óvodás tanulmányt formalizáltunk a matematika nyelvén.

II. Összegzési alapelv

Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

6. ábra.

A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv. Számoljuk meg az áfonyát: 5 darab. Ribizli: 4 darab, fekete ribizli: 3 darab. Összesen $5+4+3$ erdei gyümölcs van a képen.

A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

Az új alapelv kimondása előtt vezessünk be egy fogalmat. Két halmazra azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs közös elemük. Ha több halmazunk van úgy, hogy mindegyik elemük csak egyetlen egyhez tartozik hozzá, azaz bármelyik kettő diszjunkt, akkor azt mondjuk, hogy halmazaink páronként diszjunktak.

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

Formulával:

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunktak, akkor $\|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k\| = \|A_1\| + \|A_2\| \ldots + \|A_k\|$.

Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor összeszámolandó elemeinket két (A és B) közös elem nélküli halmazba osztjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján az összeadás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

III. Szorzási alapelv

Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

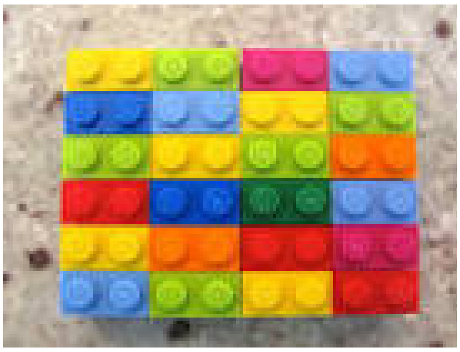
7. ábra.

Hányat is? Az első sorban négy, a másodikban is, a harmadikban is. Összesen $4+4+4=3\cdot 4=12$.

Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.) A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye. A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le. Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet. A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó. Hasonlóan, ha csak a helyet írjuk le, nem tudjuk melyik muffinról is beszélünk. Ezek csak egy „komponensek" az összeszámolandó objektumok leírásában.

⋆

Kis fiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?



8. ábra.

6 sor mindegyikében 4 pozíció. A (sor, pozíció) párokra a lehetőségek száma, ami a látott lego darabok száma $6\cdot 4=24$.

⋆

Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

9. ábra.

Hány hallgató számára van ülőhely a teremben? A válasz nyilvánvaló: $4 \cdot 10 = 40$.

⋆

Olga kollégiumi szobájának ablákából kinézve az alábbi képet látja:

10. ábra.

Hány ablakot lát? A ház öt szintes és mindegyiken nyolc ablak van (egy kicsi és hét nagy). Összesen $5 \cdot 8 = 40$ ablakot lát Olga, ha kinéz az ablakán.

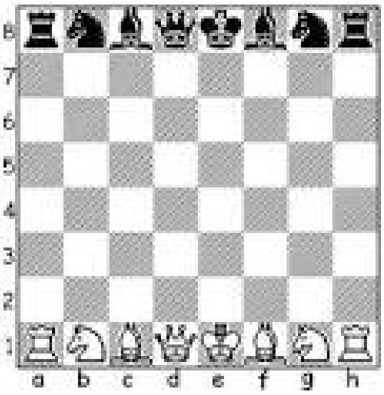
⋆

Hány mező van a sakktáblán?

11. ábra.

A mezők 8 sorba és 8 oszlopba vannak rendezve. A mezők pontosan azonosíthatók, ha megadjuk melyik sorban és melyik oszlopban van a leírandó mezőnk.

A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva a, b, c, d, e, f, g, h „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:



12. ábra.

Egy mező például az $a1$: az első mező a legalsó sorban. Vagy $e3$: az ötödik mező az alúlról számított harmadik sorban.

A mezők ugyanannyian vannak mint a betű-szám párok, ahol a betű az angol ábécé első nyolc betűje köül kerül ki és a szám a pozitív egészek első nyolc elemének egyike.

A matematikusok erre egy külön jelölést vezettek be. Az ilyen párok a kétféle lehetőséget adóhalmazok Descartes-szorzata, vagy egyszeruën (halmazelméleti) szorzata. A fenti „koordináta-rendszer” párjai az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazt alkotják. Ahogy a sík geometria koordináta párjainak halmazára a jelölés $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, röviden $\mathbb{R}^2$.

Definíció. A és B halmazok Descartes szorzata $A \times B$ pontosan az (a, b) párokat tartalmazza, ahola $a \in A$ és $b \in B$ tetszőleges elemek.

A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében. Például három tényezős Descartes-szorzat hármasokat, három hosszú koordinátasorokat tartalmaz, ahol a megfelelő koordináták a megfelelő halmazból jönnek.

Definíció. Az A_1, A_2, $\ldots$, A_k halmazok $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ Descartes-szorzata $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ elem k-asokat tartalmaz, ahol az i-edik elem/koordináta/komponens az i-edik halmazból kerül ki, azaz $a_i \in A_i$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ indexre.

⋆

Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

13. ábra.

Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámolandó objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság). Mindegyik egymástól függetlenül három értéket vehet fel. A válasz $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

Halmazok szorzatának elemszáma
a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

Formulával:

Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok esetén
$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$.

Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor két (A és B) tényezőnk van:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján a szorzás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

2. Egy n elemű halmaz részhalmazainak száma

Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen.

Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak? Ez az egyszerű kérdés nem állít komoly feladat elé. Vesszük a „kedvenc" négy elemű halmazunkat, mondjuk a $\{1,2,3,4\}$ halmazt. Ennek részhalmazai:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}.$$

A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk. Először az üres halmazt (az egyetlen 0 elemszámú részhalmazt) írtuk le, majd az egy elemű részhalmazokat, amelyeket a két eleműek, majd a három és végül a négy eleműek követtek. Az azonos elemszámú részhalmazok közül a 1-et tartalmazókkal kezdtünk, ezek sorrendejét a a második legkisebb (ha azok is megegyeztek akkor a harmadik legkisebb) elemek határozták meg: amelyik részhalmaznál kisebb volt értéke az került előbbre. Ez a rendező elv nemcsak munkánk megszervezésében volt segítségünkre. Ez adott alapot arra, hogy meggyőződéssel állíthassuk listánk teljes és minden részhalmazt egyszer sorol fel. Tehát a kérdésre a válasz az $\{1,2,3,4\}$ halmaznak tizenhat részhalmaza van.

Vehettük volna az $\{a,b,c,d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$$

$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk. Vehettük volna a

$$\{\text{tavasz}, \text{nyár}, \text{ősz}, \text{tél}\},$$

vagy

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

halmazt, illetve sok más négy elemű halmazt. Mindig ugyanazt az eredményt kaptuk volna? Jól van kitűzve kezdő kérdésünk?

Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni? Hogy tudjuk a következő tételt igazolni?

3. Tétel. *Legyen A és B két azonos elemszámú, azaz párba állítható halmaz. Ekkor részhalmazai által alkotott $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ halmazok is azonos elemszámúak, azaz párbaállíthatók.*

A bizonyítás egyszerű: Legyen ψ egy párbaállító leképezés A és B között, amely „bizonyítja" a két halmaz azonos elemszámúságát. Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, ϕ-t: A egy R részhalmaza minden elemének van egy párja. Ezek a párok B egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá R-hez. Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$. Belátjuk, hogy az így leírt ϕ leképezés párbaállító leképezés. Valóban ha $S \in \mathcal{P}(B)$ adott, akkor az a fejtőrő, hogy „melyik A-beli részhalmaz párja S?" egyértelműen megoldható. Össze kell gyűjteni az S-beli elemek ϕ inverzénél vett képeit. Igazából ez a szabály megadja a ψ inverzét.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Egy H véges/n elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden i-re ($i = 1, 2, \ldots, n$) megadjuk, hogy a h_i elem benne van-e vagy nem. Egy h_i-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége”, egy bit információ. Egy bit információ lehetséges értékeit általában 0/1 értékekkel kódolják. Esetünkben a h_i-hez tartalmazó k_i információ legyen 1, ha $h_i \in R$ és legyen 0, ha $h_i \notin R$. Formulával

$$k_i = \begin{cases} 0, & h_i \notin R \\ 1, & h_i \in R. \end{cases}$$

Egy $H \to \{0, 1\}$ függvénnyel írtuk le a részhalmazt. Például

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
0	0	1	0	1	1

függvény a $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazát írja le. A fenti függvény az R részhalmaz (H feletti) karakterisztikus függvénye. Jelölése $\chi_R(x) : H \to \{0, 1\}$. A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény” (adott $H \to \{0, 1\}$ függvényhez keressünk R részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus függvénye) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{f : H \to \{0, 1\}\}$ halmaz között $R \mapsto \chi_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.

Ha a H halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy n hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral. Egy az R részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora. Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Az tudja a részhalmazt kiolvasni/dekódolni, aki tudja, hogy a második komponens/a második bit a $h_2 \notin H$-re vonatkozó információ (és így tovább). H egy n elemű halmaz volt, így részhalmazainak karakterisztikus vektorai n hosszú bitsorozatok, azaz $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$ egy eleme, ahol n darab $\{0, 1\}$ tényező van. Ezen Descartes-szozat rövid jelölése $\{0, 1\}^n$.

Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0, 1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ bijekció. Első alapelvünk alapján $\mathcal{P}(H)$ és $\{0, 1\}^n$ elemszáma ugyanaz (párbaállítottak mint a sétáló óvodások). A szorzási alapelv alapján $\{0, 1\}^n$ elemszáma

$$|\{0, 1\}| \cdot |\{0, 1\}| \cdot \ldots \cdot |\{0, 1\}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

A következő tételt kaptuk.

4. Tétel. *Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.*

A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnik. Pedig középiskolás anyagról van szó. Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott n tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?”

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett. „Minden tárgy esetén el kell dönteni, hogy kiválasszuk vagy nem. Az n döntés mindegyikére két lehetőségünk van és a válaszaink függetlenek. A válasz $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. ”

A fenti egyetemi érvelés pontosan a középiskolás érvelést formalizálja. Pontosan hívatkozik azokra az elvekre, amik mutatják, hogy a 2 lehetőségeket össze kell szorozni, hisz az összeszámolandó objektumok egy-egy komponensére vonatkozó lehetőségek. Továbbá függetlenek, ami azt jelenti, hogy a komponensekre vonatkozó lehetőséghalmazok Descartes-szorzat halmaza azonosítható az összeszámolandó objektumokkal.

5. Feladat. *Adott egy n elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?*

Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. n fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?

Most is n döntést kell meghozniuk. Mindegyik két kimenetelű: az adott gyümölcsöt elviszik vagy nem. A döntések azonban nem függetlenek. Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg. Ezek a csomagolás feltételét nem ronthatják el. Az utolsó döntés azonban „kényszerített”. Pontosan az egyik kimenetel lesz jó arra, hogy a páros nagyságú gyümölcs-csomagot kialakítsa. A fenti érvelés alapján a válasz 2^{n-1}.

A fentiekkel analóg egyetemi érvelésben egy $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$ leképezést definiálunk, ahol $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ a H halmaz páros elemszámú részhalmazait összegyűjtő halmaz. Egy $R \in \mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ halmazhoz, azaz H egy páros elemszámú R részhalmazához hozzárendeljük $H \setminus \{h_n\}$-nak $R \setminus \{h_n\}$ részhalmazának karakterisztikus vektorát. Ez a hozzárendelés bijekció, azaz a megfelelő rejtvény egyértelműen megoldható: Adott $n-1$ hosszú bitsorozatból kell kiolvasni egy páros elemszámú részhalmazt. Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg h_n-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk. A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze. Ezen inverz léte igazolja a definiált függvény bijektív mivoltát, azaz az értelmezési tartomány és értékkészlet azonos elemszámúságát. Az értékkészlet a szorzási alapelv alapján 2^{n-1} elemű. Így a feltett kérdésre a válasz 2^{n-1}.

3. Jelölések

Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

A második alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat A-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja A_i, ahol az i értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. Szerepelt egy összeg is, amely általános tagja az $|A_i|$ elemszám, ahol az i értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. A középiskolai $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$/ $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$ jelölésből ki kell találni a sémát, az általános tagot és az indexek futását. Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad \text{illetve} \quad \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k} |A_i|, \quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$/ $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

$$\prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k} A_i, \quad \prod_{i=1}^{k} A_i, \text{ illetve } \prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k} |A_i|, \quad \prod_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Σ az összeg/szumma görög nevének kezdőbetűje. Π a szorzat/produktum görög nevének kezdőbetűje.

4. Kombinatorikus módszer

A kombinatorikában sokszor találkozunk olyannal, hogy két látszólag különböző összeszámlálási feladat ugyanarra az eredményre vezet. Gyakran kombinatorikus azonosságok bal és jobb oldala egy-egy halmaz elemszáma, így a bizonyítandó két halmaz elemszámának azonosságát állítja. A kombinatorikus gondolkozáshoz az áll legközelebb, hogy ezt kombinatorikus alapelvek alapján igazoljuk.

Gyakran sok lehetőség van más indoklásra is: teljes indukció vagy algebrai képletek, átalakítások használata. Ha tehetjük nem így indoklunk. Ha ilyen bizonyításokat látunk, akkor mindig van egy kis hiányérzetünk. Biztos jól számoltunk? Hogyan lehetett a bizonyítandó aznosságra rájönni?

A kombinatorikus alapelvek felismerése tudásunkat biztosabbá teszi. Ha látjuk, hogy az összeszámolandó objektumokat csoportosítjuk, a csoportokat külön-külön megszámoljuk, akkor a „részeredmények” mögött összeszámolandó objektumok vannak. A teljes szám a részeredmények összege lesz (amennyiben csoportjaink diszjunktak). Ha az összeszámolandó objetumokat komponensekre bontjuk és a komponensekre adódó lehetőségeket számoljuk ki, akkor a részeredmények mögött nem objektumok állnak, hanem ezeknek csak „töredékei”. Ezekből a „töredékekből” áll össze egy objektum. Ha a különböző töredékek szabadon összerakhatók, azaz a töredékek választásai függetlenek (azaz az objektumok halmaza egy Descartes-szorzat), akkor a részeredmények szorzata adja meg a választ. Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is könnyűvé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a H halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.

A kombinatorikus alapelvekre támaszkodó bizonyítások a lényeget mutatják meg. Látjuk mi miatt igaz az állítás. Gyakran a megoldás módszerét átlátva mi magunk is kitalálhatunk hasonló érveléssel belátható új azonosságokat.