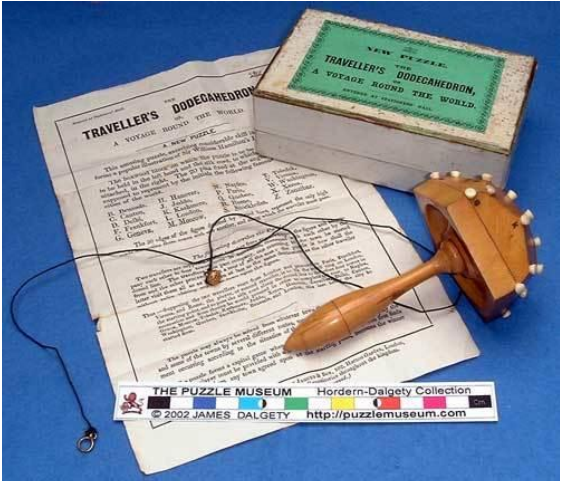
Hamilton-körök

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

A XIX. század egyik „Rubik-kockája”



1856-ban William Rowan Hamilton kitalált egy fejtörőt. A Puzzle Museum egy kiállítási tárgya egy korai, forgalmazott volt példányt mutat.

A Hamilton-út/kör fogalma

Az Euler-vonal olyan vonal volt, amely hossza eléri az „elméleti plafont”.

Ilyen plafon utaknál és köröknél is létezik.

Definíció

Egy út egy gráfban Hamilton-út, ha az összes csúcsot érinti.
Egy kör egy gráfban Hamilton-kör, ha az összes csúcsot érinti.

Nyilvánvaló, hogy Hamilton-kör létezése esetén gráfunkban van Hamilton-út is. Igazából egy Hamilton-kör bármely élét elhagyva egy Hamilton-utat kapunk.

Alapkérdés

Egy alapkérdés, hogy adott gráfban van-e Hamilton-út/kör.

Erre az alapkérdésre nincs olyan egyszerű, szép válasz mint amilyen Euler tétele az Euler-vonalakra vonatkozó alapfeladatnál.

A Hamilton-utak/körök problémája mind a mai napig aktívan kutatott terület.

Feladat

Vegyük a szabályos testek (szabályos tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder) gráfjait. Melyekben van Hamilton-út/kör?

Mohó út növelés

Relaxáljuk a Hamilton-út keresés problémáját. Ne akarjuk egyből az összes csúcsot érinteni. Keressünk csak egy „jó hosszú” utat.

Ismét elkezdhetünk sétálni a gráfunkban. Sétálás közben minden csúcsban olyan élek közül válasszuk ki következő lépésünket, amely eddig nem látogatott csúcsba vezet. Azaz ügyeljünk arra, hogy sétánk bejárása közben egy utat járjunk be.

Ismét szükséges az elakadás. Az elakadás csúcsa olyan lesz, hogy az összes szomszédját eddigi sétánk során már meglátogattuk.

Elnevezés

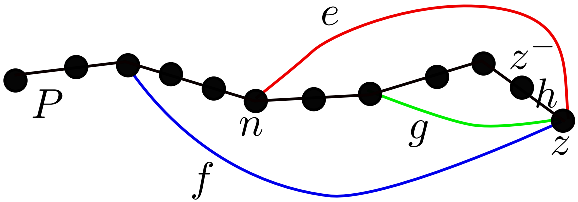
A fenti, elakadásig tartó eljárást nevezzük *mohó út-növelésnek*.

Sajnos elképzelhető, hogy a leghosszabbnál jóval rövidebb úthoz jutunk.

Elakadás

Tegyük fel, hogy az a csúcsból mohó út-növelést indítunk és egy z csúcsban elakadunk miután a P utat felépítettük, azaz z összes szomszédja (legyen d a számuk) a P útra esik.

z szomszédja közül egy, z^- az úton közvetlenül előtte lévő csúcs. A $d-1$ többi szomszéd az út mentén nem szomszédos z-vel.



Legyen n egy ilyen szomszéd.

Alternatívák

Ekkor gráfunkban P-t nem tudtuk meghosszabbítani, de észrevehetünk egy P-vel azonos hosszú alternatívát P-hez:

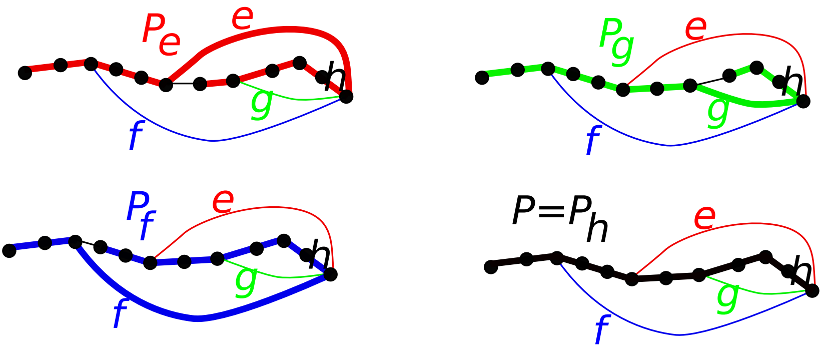
Menjünk el P-t követve n-ig, itt egyből z-be lépjünk, majd P-n visszafele haladva járjuk be a P- kihagyott csúcsokat.

Legyen P_n az így kapott alternatív út. Megjegyezzük, hogy a z^- szomszéd esetén is megtehetjük a fentieket, de ekkor P-hez jutunk vissza.

Csavart utak

Definíció

Az így kapott d alternatívát (most magát P-t is ide soroljuk) P csavart változatainak nevezzük.



Egy kiinduló P út, amely utolsó csúcsának négy szomszédja van P-n. P négy csavart vátozata.

Csavart utak tulajdonságai

A csavart utak tulajdonságait összefoglaljuk:

(a) Kiinduló csúcsuk azonos P kiinduló csúcsával.

(b) Utolsó csúcsuk mind különböző (d darab) csúcs.

(c) Ugyanazokat a csúcsokat járják be, speciálisan ugyanolyan hosszúak.

Miért jó csvarni?

Számunkra a (b) tulajdonság különösen fontos.

Az utolsó csúcsban próbáljuk meg folytatni az utunk növelését. Kezdetben az utolsó, z csúcs sikertelen volt.

A most talált további alternatívák mind lehetőséget kínálnak. Ha valamelyiknek van P-n kívüli szomszédja, akkor sikerrel hosszabbíthatjuk meg utunkat.

Elnevezés

Ha P-ről áttérünk egy alternatívára, akkor P csavarását végezzük. Ha ez a csavart út meghosszabbítjuk (mert megtehetjük), akkor csavarásos útnövelésről beszélünk.

A csavarásnál a mohóság feladasáról van szó: P-n elhaladunk az n csúcsig. Itt korábbi döntésünk az volt, hogy az úton továbbléptünk. Most ezt „felülbíráljuk”. z-be lépünk és P eddig be nem járt csúcsait fordított sorrendben látogatjuk. Észrevettük, hogy ezzel „jobban járunk”.

Csavarásos tétel

Bizonyos feltételek mellett a csavarásos útnövelés esetén garantált a siker.

Tétel

Tegyük fel, hogy egy G egyszerű gráfban minden csúcs legalább a csúcsok felével szomszédos. Legyen P egy út, amely nem Hamilton-út. Ekkor P garantáltan növelhető csavarásos módon.

Bizonyítás

Legyen x egy csúcs, amely nincs rajta az utunkon (mivel nem Hamilton-út ez biztos létezik).

Legyen z az út utolsó csúcsa. Ha utunk mohó módon növelhető, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy nem így van.

Ekkor a z csúcs minden szomszédja ($d(z)$ darab, hiszen G egyszerű) egy-egy csavarását adja. Legyen Z azon pontok halmaza, ahova a csavart utak elvezetnek.

Legyen N az x (nem az útra eső csúcs) szomszédjai.

Feltételeink alapján $|Z|, |N| \geq |V|/2$. Továbbá $x \notin Z, N$. Ez garantálja, hogy N és Z nem lehet diszjunkt. Kell egy közös csúcsuknak lenni: k.

Ekkor az utunk csavarható úgy, hogy k-ba vezessen ($k \in Z$) és innen x-be folytatható lesz ($k \in N$). Állításunkat igazoltuk.

Tétel

A fenti ötlet Hamilton-út esetén is mond valamit:

Tétel

Tegyük fel, hogy egy G egyszerű gráfban minden csúcs legalább a csúcsok felével szomszédos. Legyen P egy Hamilton-út G-ben. Ekkor P garantáltan csavarható úgy, hogy két végpontja összekötött legyen.

Bizonyítás

Legyen P egy *az* Hamilton-út.

Ekkor a z csúcs minden szomszédja ($d(z)$ darab szomszéd, szükségszerűen P-n) egy-egy csavarását adja. Legyen Z azon pontok halmaza, ahova a csavart utak elvezetnek.

Legyen N az a csúcs szomszédjai.

Feltételeink alapján $|Z|, |N| \geq |V|/2$. Továbbá $a \notin Z, N$ (a a csavart Hamilton-utak kezdőpontja és a fokszámra tett feltétel miatt legalább két pontunk van a gráfunkban). Ez garantálja, hogy N és Z nem lehet diszjunkt. Kell egy közös csúcsuknak lenni: k.

Ekkor az utunk csavarható úgy, hogy k-ba vezessen ($k \in Z$). A csavarás után is a-ból indul utunk. A két végpont összekötött ($k \in N$). Állításunkat igazoltuk.

Dirac-tétel

A két tétel együtt kiadja a következő nagyon fontos alaptételt.

(Dirac tétele)

Tegyük fel, hogy egy G egyszerű gráfban minden csúcs legalább a csúcsok felével szomszédos, továbbá $|V| \neq 2$. Ekkor G-ben van Hamilton-kör.

A bizonyítás

A feltételek biztosítják, hogy csavarásos útnöveléssel Hamilton-úthoz jussunk.

Ezután egy esetleges további csavarással elérhetjük, hogy a Hamilton-út kezdő és végpontja szomszédos legyen.

Mivel $|V| \neq 2$ ezért egy Hamilton-úthoz jutunk.

Ki is az a Dirac?

A Dirac név fizikusok számára ismerős lehet.

Paul Dirac Nobel-díjas fizikus.

A tétel azonban fia, Gabriel Dirac tétele.

Érdekességként megemlítjük, hogy Gabriel Dirac magyar születésű matematikus.

Wigner Jenő egyik lány testvére Wigner Margit (Manci) két gyerekes anya, elvált. Egyik gyerekét Gábornak hívták. Mint elvált asszony látogatta meg testvérét (a szintén Nobel-díjat érdemlő) Wigner Jenőt Princeton-ban.

Ott ismerkedett meg Paul Dirac-kal, akivel össze is házasodtak. Dirac természetesen Wigner Margit gyerekeit magáénak fogadta.

Szükséges feltétel hiánya

A Dirac-tétel egy elégséges feltételt ad Hamilton-kör létezésére.

A feltétel természetesen nem szükséges.

Az összes csúcson áthaladó körgráfban van Hamilton-kör (maga a gráf egy Hamilton-kör). Mégis minden csúcs foka csak 2.

Ha csúcshalmazunk nagy (gondoljunk 2021-re), akkor a Dirac-tétel feltételei „nagyon” nem teljesülnek.

Észrevétel körökre

A másik oldalról is adunk egy feltételt. Egy egyszerű észrevétellel kezünk:

Észrevétel

Legyen G-ben egy Hamilton-kör. Ha k csúcsot elhagyunk a gráfunkból (így a körről), akkor a Hamilton-kör legfeljebb k ívre/részútra esik szét. Ezek a „maradék utak” gráfunkat legfeljebb k komponensbe sorolják.

Az állítás nyilvánvaló. Geometriai analógja is van. Egy geometriai körön felvett k pont pontosan k ívre osztja a kört.

Itt azért nem mondhatjuk meg a részek pontos számát, mert ha szomszédos csúcsok is vannak az elhagyottak közt, akkor a köztes „maradék” nem jelentkezik (szemben a geometriai helyzettel). Illetve a kör maradék íveiről látjuk, hogy elérhetőséget biztosítanak az ívek csúcsai között. Azonban lehetnek olyan élek amik külünbüző ívek között is elérhetőséget adnak.

Észrevétel utakra

Megemlítjük az észrevétel Hamilton-utakra vonatkozó változatát is.

Észrevétel

Legyen G-ben egy Hamilton-út. Ha k csúcsot elhagyunk a gráfunkból (így az útról), akkor a kör legfeljebb $k+1$ ívre/részútra esik szét. Ezek a „maradék utak” gráfunkat legfeljebb $k+1$ komponensbe sorolják.

Összefoglalás

Az első észrevétel összefoglalása:

Hamilton-kör létezésének szükséges feltétele,
hogy tetszőleges k természetes számra és tetszőleges k csúcsra
elhagyásukkal legfeljebb k komponensre essen szét a gráfunk.

A második észrevétel összefoglalása:

Hamilton-út létezésének szükséges feltétele,
hogy tetszőleges k természetes számra és tetszőleges k csúcsra
elhagyásukkal legfeljebb $k+1$ komponensre essen szét a gráfunk.

1. feladat

Feladat

Egy sakktábla két szemköztes sarokmezőjét vegyük ki. Végig húzható-e egy bástya a maradék mezők felett úgy, hogy minden mező felett pontosan egyszer haladjunk el és utunk során a bástya lépésnek megfelelően mozogjunk? (A c1 mezőről a c8 mezőre lépve a teljes c oszlop mezői felett elhúztuk bástyánkat.)

A csonkolt sakktábla 62 mezője, az elemi bástya lépéssel (egy mezőről egy közös oldallal rendelkező szomszédos mezőre lépünk) definiált szomszédsággal egy egyszerű gráfot alkot. A kérdés, hogy ebben van-e Hamilton út.

Megoldás

A válasz:

NEM: Egy indoklás lehet, hogy a 62 mező a két szín között $30 + 32$ arányban oszlik meg.

Ha elhagyjuk a kisebb színosztályban lévő 30 mezőt, akkor gráfunk szét esik 32 izolált csúcsra/komponensre.

Így gráfunkban nem lehet Hamilton-út.

2. feladat

Feladat

Egy 4×4 méretű sakktábla bejárható-e huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk?

Ismét definiálhatunk egy egyszerű gráfot: Csúcsai a 16 mező, a szomszédságot a huszár lépés definiálja.

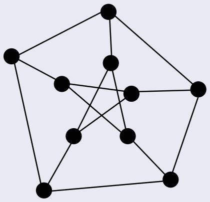
A kérdés: van-e benne Hamilton-út.

Egy új kérdés: Hány komponense lesz gráfunknak, ha elhagyjuk a középső 4 mezőnek megfelelő csúcsot?

A kérdés megválaszolását és a feladat megoldását az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

Feladat

(a) Igazoljuk, hogy az alábbi gráfból tetszőleges k természetes számra akárhogy hagyunk el k csúcsot a maradék gráfnak legfeljebb k komponense lesz.



(b) Igazoljuk, hogy a fenti gráfban nincs Hamilton-kör.

Miért csak ennyi?

Az érdeklődő hallgatónak talán hiányérzete lehet ezen fejezet elolvasása után. Az előző fejezet hasonló problémával foglalkozott. Ott teljes volt a megoldás.

Tetszőleges gráf esetén hatékony eljárást kaptunk annak eldöntésére, hogy egy gráfban van-e Euler-vonal.

Itt csak „részeredményeket” látunk. Az utolsó feladat megoldásához a korábbi ötletek nem alkalmazhatók.

Ez nem véletlen. A Hamilton-kör létezésének eldöntése egy más „kategória” mint az Euler-vonal létezésének eldöntése.

$\mathcal{NP}$-teljesség

A pontos fogalmak kialakítása messze túlmutat az előadássorozat keretein.

Csak megemlítjük, hogy a Hamilton-kör létezésének tesztelése egy úgy nevezett $\mathcal{NP}$-teljes probléma.

Ha valaki ügyesen tudja ezt kezelni, akkor egy nagyon tág, sokak által vizsgált témakör összes problémájáról mond valamit (például a modern titkosírások feltöréséről).

A tudósok mai véleménye/sejtése szerint a Hamilton-kör létezésének hatékony eldöntése elméleti nehézségekbe ütközik.

Ezeknek a nehézségeknek a tisztázása a modern matematika egy központi kérdése.

Köszönöm a figyelmet!