

# Fák

Hajnal Péter

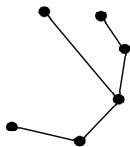
Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

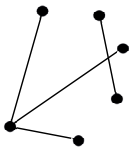
## Definíció

Egy  $F$  gráf fa/fagráf, ha összefüggő és bármely élét elhagyva összefüggősége megszűnik.

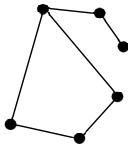
Ennek olvasata lehet: a fák minimális összefüggő gráfok (a csúcshalmazukat rögzítve, az élhalmazukként tekintve a lehető legkisebbek).



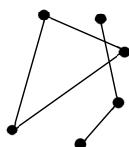
*G*



*H*



*I*



*J*

*G* egy FA. A hallgató ellenőrizze összefüggőségét és azt, hogy él-minimális erre a tulajdonságra.

*H* nem összefüggő. Így NEM fa.

*I* összefüggő, négy hosszú körének bármelyik élet elhagyva összefüggő marad. Így NEM fa.

*J* nem összefüggő. Így NEM fa.

# Egy észrevétel

Legyen  $G$  egy gráf és  $e = xy$  egy éle. Két lehetőség van:

- (a)  $e$ -t nem tartalmazza egyetlen kör sem.
- (b)  $e$  egy gráfbeli  $C$  kör egy éle.

A két lehetőség közötti különbséget különösen kiemeli a  $G - e$  gráf vizsgálata.

## Észrevétel

Legyen  $G$  egy gráf és  $e = xy$  egy éle.

- (a) Ha  $e$ -t nem tartalmazza egyetlen kör sem, akkor  $G - e$  elérhetőségi relációja más mint  $G$ -é.
- (b)  $e$  egy gráfbeli  $C$  kör egy éle, akkor  $G - e$  elérhetőségi relációja ugyanaz mint  $G$ -é..

## (a) eset: $e$ -t nem tartalmazza egyetlen kör sem

Az  $e = xy$  él biztosítja, hogy a  $G$  gráfban  $x$ -ből  $y$  elérhető. Ezt az  $x, e, y$  séta ( $x$ -ből indulva az  $e$  keresztül (egy lépéssel)  $y$ -ba sétáltunk) mutatja.

Az (a) eset azt mondja más út nem is lehetséges.

Ha nem  $e$ -n indulunk el és egy  $P$  úttal  $y$ -ba jutnánk, akkor ez az út  $e$ -vel folytatva visszatérne  $x$ -be (ezzel út mivolta megszűnne) és egy kört kapnánk az  $e$  élen keresztül, ami (a) alapján nem lehet.

Tehát a  $G - e$  gráfban (a  $G$  gráfból elhagyjuk az  $e$  élt) nem marad  $x$ -ből  $y$ -ba vezető út. Azaz  $x$ -ből  $y$  elérhetősége megszűnik.

Tehát  $G$ -ben és  $G - e$ -ben (két gráf ugyanazon a csúcshalmazon) az elérhetőség reláció más. Természetesen a  $G - e$ -beli elérhetőség egyben  $G$ -beli elérhetőséget is jelent. Fordítva azonban nem igaz.

## (b) eset: $e$ egy gráfbeli $C$ kör egy éle

Belátjuk, hogy ekkor  $G$ -ben és  $G - e$ -ben ugyanaz az elérhetőség reláció.

Nyilván, ha két csúcs  $G - e$ -ben elérhető, akkor  $G$ -ben is.

Másképpen: Ha két csúcs  $G$ -ben nem elérhető, akkor  $G - e$ -ben sem.

Állításunk érdemi része: Ha két csúcs  $G$ -ben elérhető, akkor  $G - e$ -ben is. Azaz az  $e$  él elhagyása nem szüntetheti meg a  $G$ -beli lehetőséget.

Legyen  $P$  egy út, ami  $x$  és  $y$  csúcsok elérhetőségét  $G$ -ben igazolja. Ugyanez az út igazolja az elérhetőséget  $G - e$ -ben is, ha utunk nem halad át  $e$ -n. Tegyük fel, hogy  $P$  áthalad  $e$ -n. Ekkor  $P$  nem egy út  $G - e$ -ben.

## (b) eset (folytatás)

Egy alternatív elérhetőséget kell felmutatnunk. A (b) lehetőség által garantált kör ad erre lehetőséget.

A kör áthalad  $e$ -n, így tartalmazza az  $x$  és  $y$  csúcsokat. Ez a két csúcs két ívre, gráfelméleti útra bontja a kört.

Az egyik ív/út egy hosszú, csak az  $e$  élt tartalmazza. A másik ív/út nem halad át  $e$ -n. Így ez az út  $G - e$ -ben is „ott van”.

Az eredeti  $P$  utunknak egyetlen lépése „hibázik”  $G - e$ -ben. Ezt a lépést helyettesíthetjük a körünkből származó másik ívvel. Így kapunk egy sétát (nem szükségszerűen utat)  $x$ -ből  $y$ -ba, ami igazolja az elérhetőséget.

## Tétel

A következők ekvivalensek:

- (i)  $F$  fa, azaz összefüggő és erre a tulajdonságra nézve minimális,
- (ii)  $F$  összefüggő és körmentes.



(i) $\Rightarrow$ (ii) A bizonyítandó összefüggőség a feltételek között is ott van.

Csak azt kell látnunk, hogy minimális összefüggő gráfban nem lehet kör.

Kör létezése esetén a korábbiak miatt a kör bármely éle ellentmondana fa mivoltának.

(ii) $\Leftarrow$ (i) A bizonyítandó összefüggőség a feltételek között is ott van.

Csak azt kell látnunk, hogy bármely élét elhagyva megszűnik összefüggősége.

Ismét az előző észrevételre kell hivatkoznunk.

## Tétel

A következők ekvivalensek:

- (i)  $F$  fa, körmentes és összefüggő,
- (ii)  $F$  körmentes, de bármely két meglévő csúcsát új éllel összekötve kör keletkezik.

(ii)-beli két csúcs összekötéséről jegyezzük meg:

Ha a két összekötött csúcs egybeesik, akkor egy hurokélet adunk gráfunkhoz. A kör megjelenése nyilvánvaló.

Ha a két összekötött csúcs az eredeti gráfban szomszédos, akkor egy meglévő él mellé húzunk be egy párhuzamos párt. Ismét nyilvánvaló a megjelenő kör.

Az (ii)-ben leírt tulajdonság „akkor érdekes”, ha két nem szomszédos csúcsot kötünk össze az új éllel.

# A bizonyítás

(i) $\Rightarrow$ (ii) A bizonyítandó körmentesség a feltételek között is ott van.

Csak azt kell látnunk, hogy tetszőleges élt behúzva kör keletkezik.

Legyen  $x$  és  $y$  a két csúcs, amit az új  $e$  éllel összekötünk.

$F$  összefüggő, azaz van benne  $xy$  út. Ezt az  $e$  éllel folytatva egy kört kapunk. Az állítást igazoltuk.

(i) $\Leftarrow$ (ii) A bizonyítandó körmentesség a feltételek között is ott van.

Csak azt kell látnunk, hogy gráfunk összefüggő, azaz tetszőleges  $x$  és  $y$  csúcsok között létezni kell útnak.

Ehhez adjunk hozzá gráfunkhoz egy új  $xy$  élt. Legyen  $C$  a keletkezett kör.

Ebben az új élen kívüli élek egy  $F$ -beli  $xy$  utat adnak.

# Fák mint gráfok, amelyekben az úttal való összekötés egyértelmű

Egy kör bármely két pontja között kétféle módon is „mutatja”, hogy elérhetőek egymásból. A kör két íve, két különböző utat ad tetszőlegesen választott két pontja között.

## Tétel

A következők ekvivalensek:

- (i)  $F$  fa, összefüggő, körmentes gráf,
- (ii)  $F$  bármely két csúcsa között pontosan egy út létezik.

# Fák mint gráfok, amelyekben az úttal való összekötés egyértelmű

(i) $\Rightarrow$ (ii) Az összefüggőség garantálja, hogy bármely két csúc között vezet út. Azt kell kizárnunk, hogy létezessen két út is. Indirekten bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Tegyük fel, hogy van ellenpélda:  $x$  és  $y$  csúcsok, köztük  $P_1$  és  $P_2$  két különböző út.

$P_1$  és  $P_2$  nem szükségszerűen alkot kört  $x$ -en és  $y$ -on keresztül. A vadászott ellentmondás azonban valóban  $F$  körmentességével lesz.

Trükkös módon találjuk meg az ellentmondást adó kört: Tegyük fel, hogy ellenpéldánkat úgy választottuk meg, hogy  $P_1$  hossza és  $P_2$  hossza a lehető legkisebb legyen. Ekkor  $P_1$  és  $P_2$  valóban egy kört alkot (ahogy korábban kizártuk). Ha a két út belső pontok mentén összefutna/„összegubancolódna” (ahogy korábban „megfélemlítésként” előrevetítettük), akkor ellenpéldánk az összefutás csúcsát felhasználva rövidíthető lenne (hogyan?).

(ii) $\Rightarrow$ (i)  $F$  összefüggősége nyilvánvaló. Belátjuk, hogy egyik élén sem halad át kör (így nem lehet benne kör). Valóban egy  $e = xy$  élén áthaladó kör két  $xy$  út létezését adná.



## Definíció

Legyen  $G$  egy tetszőleges gráf. Azt mondjuk, hogy  $G$ -ből  $G'$  ághajtás operációval keletkezett, ha  $V(G') = V(G) \dot{\cup} \{u\}$ ,  $E(G') = E(G) \dot{\cup} \{e\}$ . A  $G$ -beli élek két végpontja ugyanaz  $G'$ -ben is, míg  $e$  egyik végpontja  $u$ , másik  $V(G)$ -beli „régí” csúcs.

Tehát egyetlen új csúcs kerül be a  $G$  gráfba, amely fokszáma 1. Ezt a fokot az egyetlen új él adja, ami  $u$ -t egy  $V(G)$ -beli csúcscsal köti össze.



## Lemma

Tegyük fel, hogy  $G'$ -t ághajtással kaptuk meg  $G$ -ből. Ekkor

- (i)  $G$  akkor és csak akkor összefüggő, ha  $G'$  az.
- (ii)  $G$  akkor és csak akkor körmentes, ha  $G'$  az.

Ha  $G$  összefüggő, akkor  $G'$  régi csúcsai között is bárhonnán bárhová eljuthatunk.

Az új csúcsból is eljuthatunk bárhová úgy, hogy az új élen átlépve  $G$ -be kerülünk, ahol tetszőleges célcsúcsba eljuthatunk.

Ha  $G'$  összefüggő, akkor  $G$  bármely két csúcs között van út. Ez az út a közbülső csúcsok fokáról mutatja, hogy legalább 2. Így az új csúcs nem lehet rajta egy úton.

A  $G'$ -beli összekötő utak  $G$ -ben is ott vannak a régi csúcsok között.

Ha  $G'$  körmentes, akkor része  $G$  is az.

Ha  $G$  körmentes, akkor  $G'$ -ben sem lehet kör. Valóban: Hiszen egy csúcson áthaladó kör annak fokáról mutatja, hogy legalább 2. Speciálisan az új  $u$  csúcson nem halad át kör.

Csak régi csúcsokon áthaladó kör  $G$ -beli kör lenne.

Speciálisan kapjuk, hogy fából ághajtással kapott gráf is fa. Így ághajtások ismételtetésével kapott gráf is fa lesz. Egyetlen fából példák sorát tudjuk elkészíteni. Legyen  $T_0$  az egy csúcsból és 0 élből álló fa. Ez fa (az egyetlen egy pontú fa).

## Definíció

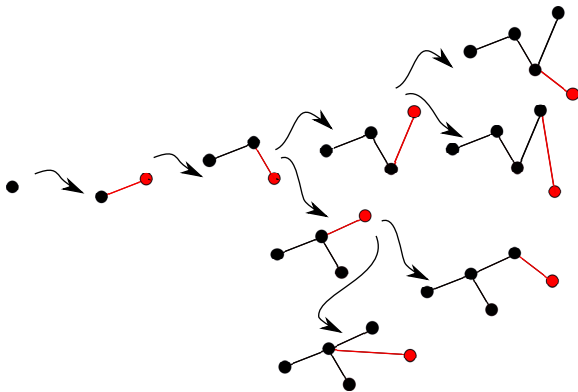
$G$  ághajtásokkal felépíthető, ha  $T_0$ -ból megkapható ághajtások ismétlésével.

Összefoglalva eddigi ismereteinket:

## Tétel

Ha  $G$  ághajtásokkal felépíthető, akkor fa.

A lemma ismételtetésével rengeteg példát kapunk fákra. Az alábbi ábra csak fákat tartalmaz:



Célunk az, hogy belássuk, hogy ez egy „univerzális” módszer a fák megkapására. Ennek igazolásához egy lemmára lesz szükségünk.

## Lemma

Legyen  $G$  egy gráf, amelyben minden csúcs foka legalább 2. Ekkor  $G$  tartalmaz kört.

Legyen  $x$  egy tetszőleges csúcs. Kezdjük el sétálni úgy, hogy sose lépjünk vissza az utolsónak bejárt élen. Ez mindig megtehető, hiszen gráfunk minden foka legalább 2. Szükségszerűen lesz ismétlődés a meglátogatott csúcsok között. Vegyünk két ismétlődő csúcsot, amelyek között nincs más csúcs-ismétlődés. Sétánk ezen része kör.

## Tétel

Legyen  $T$  egy legalább két pontú fa. Ekkor van  $T$ -ben legalább két olyan csúcs, amely foka 1.

Ha  $T$ -nek legalább két csúcsa van, akkor az összefüggőség miatt minden csúcs foka legalább 1. Ha nem lenne 1 fokú csúcs, akkor minden csúcs foka legalább kettő lenne. Ez ellentmond annak, hogy egyrészt gráfunk körmentes (mert fa), másrészt az előző lemma állítása szerint kört kell tartalmaznia.

A második 1 fokú csúcs meglátásához tegyük fel, hogy csak egy darab 1 fokú csúcsunk van. A Lemma bizonyítást ismételjük meg, de ebből az 1 fokú csúcsból indítsuk vissza nem lépő sétánkat. Ha csak a kiinduló csúcs az 1 fokú, akkor most sincs probléma a folytatással, így a csúcsismétlés szükségszerű, az ellentmondást jelentő kör most is megjelenik.

## Definíció

Egy fában egy 1 fokú csúcsot *levélnek* nevezünk.

Az előző állítás szerint minden legalább két csúcsú fában legalább két levél van.

## Tétel

Legyen  $T$  egy fa és  $x$  egy levele. Ekkor  $T - x$  is fa.

Valóban  $T - x$ -ből  $T$  ághajtással nyerhető, így fa mivoltuk ekvivalens.  $T$ -ből  $T - x$ -re való áttérést nevezhetjük levél lecsípésnek vagy ágtörésnek

Ismételgetve az ötletet kapjuk, hogy minden fa levél lecsípésekkel lebontható az egy 1 pontú fává, azaz  $T_0$ -á.



Eljárásunk megfordítása adja az alábbi tétel eddig hiányzó irányát:

## Tétel

Egy  $T$  gráf akkor és csak akkor fa, ha  $T_0$ -ból felépíthető ághajtásokkal.



## Definíció

Egy gyökeres fa egy  $T$  fagráf egy  $r$  kitüntetett csúccsal, amit gyökérnek nevezünk.

A külön elnevezés kissé meglepő. A fa fogalmától egyetlen kis eltérés van, egy speciális csúcs. Ez azonban jelentős nyelvi lehetőséget ad. Gyökeres fák esetén kifejező képességünk, ábrázolási módunk sokkal erősebb lesz.

Legyen  $(T, r)$  egy gyökeres fa.

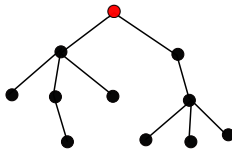
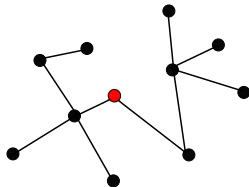
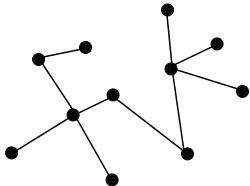
Tudjuk, hogy minden csúcshoz pontosan egy út vezet a gyökérből. Legyen  $\mathcal{G}_i$  azon csúcsok halmaza, amelyhez a gyökérből pontosan  $i$  hosszú út vezet. Ezek a pontok halmaza a fánk  $i$ -edik generációja.  $\mathcal{G}_0 = \{r\}$ .

Minden él által összekötött két csúcs olyan, hogy generációjuk 1-ben különbözik. Azt mondjuk, hogy az összekötött csúcsok között apa-fia reláció van. Amelyik generációja 1-gyel kisebb az az apa, a fia az amelyik generációja az 1-gyel nagyobb.

Gyökeres fák lerajzolásánál a csúcsok vízszintes egyenesekre kerülnek. A legfelső egyenes indexe 0, erre kerül a 0-adik generáció egyetlen eleme, a gyökér. A további egyenesek indexe fentől lefelé eggyel nő. Az  $i$  indexű egyenesre kerülnek az  $i$ -edik generáció csúcsai. Ahogy az  $i - 1$  generáció sorakozott úgy kerülnek sorban az egyes  $i - 1$ -es generációbéli csúcsok fiai blokkokban az  $i$  indexű egyenesre.



# Gyökeres fák: Mesterséges példa



Néhány apróságra felhívjuk a figyelmet.

## Definíció

Egy gyökeres fában egy csúcs levél, ha nincs fia.

Ez és a fabeli levél fogalom nagyon szoros kapcsolatban van, de mégis különböző.

Legyen  $T_0$  az egy pontú 0 élű fa. Ebben nincs levél. Ha azonban mint  $(T_0, r)$  gyökeres fának ( $r$  az egyetlen csúcs) tekintjük, akkor ez a csúcs levél lesz. Másrészt legyen  $T$  egy fa és  $\ell$  egy levele. Ekkor  $(T, \ell)$  gyökeres fában  $\ell$  nem lesz levél.



Láttuk, hogy minden fa felépíthető ághajtásokkal. Ennek bizonyítása az volt, hogy levél lecsípésekkel lebontottuk egy csúcsára.

Ezen eljárás minden lépésében egy levelet kellett választanunk, majd lecsípnünk azt. Azt is tudjuk, hogy a levél választásának mindig kell, hogy legyen legalább két alternatívája.

Azaz, ha kinéztünk egy tetszőleges  $r$  csúcsot minden csípésnél választhatunk úgy, hogy ne  $r$ -et csípjük le. Azaz  $r$  maradjon utoljára.

Azaz minden gyökeres  $(T, r)$  fa felépíthető a gyökérből ághajtásokkal. Azaz a gyökeres fák úgy építhetők fel, hogy kiindulunk a gyökérből majd sorba bővítjük a fát úgy, hogy egy meglévő csúcs egy új fiút ad a fának. Pont úgy, ahogy az Árpár-ház is nőtt.



## Tétel

Egy  $n$  pontú fának  $n - 1$  éle van.

Fákat építsük fel ághajtások segítségével. Azt kell igazolni, hogy a felépítés során végig eggyel több csúcsunk van mint élünk.

Az építkezés elején ez nyilvánvaló: 1 csúcs és 0 él van a gráfunkban.

Minden ághajtás 1-gyel növeli a csúcsok és ugyancsak 1-gyel növeli az élek számát. Azaz a csúcsok és élek száma közötti különbség nem változik az építkezés során. Ebből az állítás adódik.

Egy másik talán „kombinatorikusabb” bizonyítás lehet a következő.

Jelöljük ki egy tetszőleges csúcsot  $r$  gyökérnek. Ez a csúcshalmaz, élhalmaz számosságára nem hat ki. Így elég gyökeres fákra igazolni a tételt.  $E$  az élek halmaza, legyen  $V^*$  a nem-gyökér csúcsok halmaza (amiről tudjuk, hogy  $n - 1$  elemű). A tételt egy  $V^* \rightarrow E$  bijekcióval igazoljuk. Minden csúcshoz rendeljük hozzá az apjához vezető élt. Ez bijekció lesz: az inverze minden élhez a gyökértől távolabbi végpontját rendeli.

## Tétel

Egy  $c$  komponensű körmentes  $n$  pontú gráfnak  $n - c$  éle van.

Valóban. Vegyük gráfunk komponenseit. Ezek fák lesznek (összefüggőek, hiszen komponensek; körmentesek, hiszen eredeti gráfunk körmentes).

A komponensek csúcsszámai legyenek  $n_1, n_2, \dots$ . Élszámát megkapjuk, ha komponenseiből az élszámokat összeadjuk. Ezek az élszámok az előző tétel szerint  $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots$ . Ennek összegzéséhez adjuk össze az  $n_i$ -ket (a komponensek csúcsszámaikat): az eredmény az összes csúcs száma,  $n$ . Továbbá adjuk össze a  $-1$ -eket: az eredmény  $-c$ . A teljes összeg  $n - c$ .

## Definíció

A körmentes gráfokat *erdőnek* nevezzük.

## Tétel

Egy összefüggő  $G$  gráfnak van olyan részgráfja, ami az összes csúcsot tartalmazza és fa. Egy nem összefüggő gráfnak ilyen részgráfja nem lehet.

Az összes csúcsot tartalmazó részgráfok csak élek elhagyásával nyerhetők  $G$ -ből.

Az ilyen részgráfokat feszítő részgráfoknak neveztük.

A tétel által garantált részgráf  $G$  egy **feszítőfája**.

A tétel azt mondja, hogy pontosan az összefüggő gráfoknak van feszítőfája.

## Fák: Alaptételek III (folytatás)

Egy összefüggő feszítő gráf igazolja a kiinduló gráf összefüggőségét is. Azaz nem összefüggő gráfnak nem lehet összefüggő feszítő részgráfja, így feszítőfája sem.

**Feszítőfa kereső algoritmus:** Adott egy  $G$  összefüggő gráf.

Sorban vizsgáljuk meg összes élét: ha elhagyjuk az aktuális gráfból, akkor megszűnik-e az összefüggőség?

Ha igen, akkor ne hagyjuk el.

Ha nem, akkor hagyjuk el.

Azaz törekedjünk az élek elhagyására, de „nagyon vigyázzunk”: gráfunk maradjon összefüggő.

Algoritmusunk kiszámol (a leálláskori élhalmaz) egy feszítő részgráfot. Ez az összes csúcst tartalmazza, összefüggő lesz. Sőt bármely élét elhagyva megszűnik összefüggősége (miért?). Azaz egy feszítőfához jutottunk. A tétel bizonyított.

## Tétel

Egy legalább két pontú összefüggő gráfban mindig található egy csúcs, amit elhagyva összefüggő marad a gráf.

Könnyű látni, hogy elég fákra igazolni a tételt. Valóban, ha fákra tudnánk, akkor  $G$  egy  $T$  feszítőfájában megtalálva egy jó  $x$  csúcsot, az  $G - x$ -ről igazolna az összefüggőget. Valójában  $T - x$  a  $G - x$  gráf egy feszítőfája lenne.

Fákra egyszerű az állítás: bármelyik levele igazolja a tételt



Vége van!

Köszönöm a figyelmet!