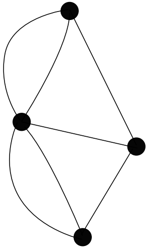
# Séták gráfokban

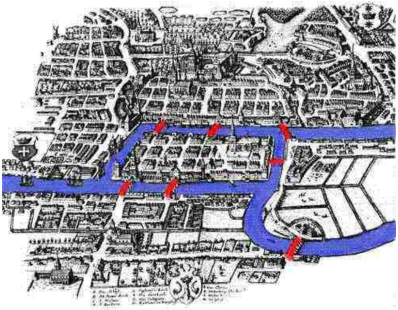
Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021 tavasz

# Kőnigsberg, ahol a gráfelmélet megszületett





Történetileg legfontosabb példa gráfra: a XIX. századi Kõnigsberg városának középpontjában lévő szárazföldi egységek és a köztük fekvő hidak rendszere

# A séta gráfelméleti definíciója

## A gráfelméleti séta definíciója

Egy séta a $G$ gráfban egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

sorozat, ahol

(i) $v_0, v_1, \ldots, v_\ell \in V$, $e_1, \ldots, e_\ell \in E$,

(ii) Minden $e_i$ élt a sorozatban két végpontja veszi körül: $e_i = v_{i-1}v_i$.

Szavakkal: A sorozat csúccsal kezdődik, végződik. A sorozatban a csúcs/él kategóriák alternálnak. Minden élt két végpontja veszi közre.

# Terminológiák

$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$ egy séta

$\mathcal{S}$ $u$-ból indul, $v$-be érkezik,

$\mathcal{S}$ egy $uv$-séta,

$\ell$ a séta hossza, Megjegyezzük, hogy $\ell = 0$ lehetséges, azaz '$u$' egy séta,

$V(\mathcal{S}) = \{v_0, v_1, \ldots, v_\ell\}$ a séta csúcshalmaza,

$E(\mathcal{S}) = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$ a séta élhalmaza.

# Séta: dinamikus szemlélet

A séta fent leírt definíció a séta statikus szemlélete. Egy matematikai objektumba (egy sorozat) sűrítettük a lényeget. Van egy dinamikus szemlélet is.

## Séta: dinamikus szemlélet

Egy sétálás egy gráfban egy folyamat, $t = 0, 1, 2, \ldots, \ell$ diszkrét időpontokkal, „óraütésekkel”,

Minden időpontban a gráf egy-egy csúcsában foglalunk helyet. $t = i$ időpontban $v_i$-ben vagyunk.

Két időpont között a megfelelő két csúcs (szükségszerűen szomszédosak) egy összekötő élén haladunk át (a séta egy lépését tesszük meg).

Azaz $t = i - 1$ és $t = i$ időpont között az $e_i = v_{i-1}v_i$ élen haladunk át, így $v_{i-1}$-ből $v_i$-be kerülünk át.

Azaz a gráfelméleti sétálás a korábbi valódi sétálás filmszalagjának, képsorozatának kiritkított sorozata.

# Speciális séták: vonal

**A vonal definíciója**

A *vonal* egy olyan séta, melyben az élek nem ismétlődnek.

Azt is mondhatjuk, hogy élhalmazának elemszáma ugyanaz mint a hossza. Ez általában nem igaz. Ha egy élen oda-vissza lépegetve sétálunk hosszú ideig, akkor élhalmaza egyetlen élből áll míg hossza tetszőleges hosszú lehet.

Azaz a vonal olyan séta, amely bejárása során tiltott az olyan élen való áthaladás, amelyen korábbán már átléptünk.

# Speciális séták: út

## Az út definíciója

Az *út* egy olyan séta, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek.

Azaz sétálásként fogva fel az utat minden lépés egy eddig nem látogatott csúcsba vezet.

Azaz út olyan séta, amely bejárása során tiltott a már látogatott csúcsba való visszalépés.

# Út/vonal

Nyilván van olyan vonal, amely nem út. Azaz az élek nem-ismétlődése mellett ugyanabba a csúcsba visszatérhetünk. Fordítva azonban nem igaz: Ha egy séta során tiltjuk a csúcsok ismétlődését, akkor az élek automatikusan nem ismétlődnek.

## Észrevétel

Egy $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ út egy vonal.

# Az észrevétel bizonyítása

Indirekten indoklunk. Tegyük fel, hogy utunk nem vonal, azaz alkalmas $i < j$ indexre $e_i = e_j = e$. (Indirekt bizonyítás)

Az ismétlődő él két végpontja legyen $u$ és $v$. Ekkor $e_i$-t és $e_j$-t is az $u$ és $v$ csúcsok veszik körül. Ez még nem teszi szükségessé, hogy például $v$ ismétlődjön. Az $u, e, v, e, u$ sétában ismétlődik az $e$ él, de $v$ végpontja nem.

Legyen $x \in \{u, v\}$ az $e$ él azon végpontja, amely $e_i$ előtt van. Ez a csúcs a későbbi $e_j$ él körül is ott van. Ez már biztos csúcsismétlődés. Kiinduló sétánk út mivoltának ez ellentmond. A bizonyítás teljes.

# Speciális séták: Kör

## Séták záródása

Egy séta záródó/zárt, ha első és utolsó csúcsa megegyezik.

Egy vonal is lehet záródó. Egy útnál csak akkor lehet záródásról beszélni, ha 0 hosszú. A legalább 1 hosszú utak szükségszerűen NEM záródóak (szokásos a nyilt kifejezés).

## A kör definíciója

A kör egy gráfban olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ séta, amelyre

- az első $\ell - 1$ lépés ($!\ell \geq 1$) sétája: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}$ út,
- továbbá az $e_\ell$ egy eddig nem szereplő él, amely visszavezet $v_0$-ba (azaz $v_\ell = v_0$).

Speciálisan egy kör hossza mindig pozitív egész (0 hosszú kör nincs). A körök záródó vonalak, nem utak.

# Szünet

# Definíció

## Elérhetőségi reláció

$\sim$ egy reláció egy gráf csúcshalmazán. $u, v \in V$ esetén $u \sim v$ ($u$-ból elérhető $v$) akkor és csak akkor, ha gráfunkban van $uv$ séta.

## Alaplemma

Az elérhetőség reláció egy ekvivalenciareláció. Azaz

(i) $u \sim u$,

(ii) $u \sim v$ esetén $v \sim u$,

(iii) $u \sim v$, $v \sim w$ esetén $u \sim w$.

# Ekvivalenciarelációk alaptétele

**Alappélda**

Egy gimnáziumban az osztálytárs reláció egy ekvivalenciareláció.

Azzal a nyelvi megállapodással élünk, hogy mindenki osztálytársa önmagának.

**Az ekvivalenciarelációk alaptétele**

Ha $\rho$ ekvivalenciareláció egy $H$ halmazon, akkor a halmaz egyértelműen osztályozható nemüres halmaz(ok)ba úgy, hogy $\rho$ pontosan az „ugyanabba az osztályba tartozni" reláció legyen.

Azaz az „osztálytárs" példa egy univerzális példa.

# A Lemma bizonyítása

(i) Minden $u$ csúcsra '$u$' egy 0 hosszú séta $u$-ból $u$-ba.

(ii) Egy sétát leíró csúcs/él-sorozat jobbról balra olvasva is séta lesz. Ennek belátására csak a definíciót kell végiggondolnunk. A 'csúccsal kezdődik és végződik', a 'csúcsok/élek alternálnak', és 'minden élt két végpontja fogja közre' olyan feltételek amik a jobb/bal felcserélésére szimmetrikusak.

(iii) Ha $u \sim v$, akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat $u$-val kezdődik és $v$ -vel végződik. Ha $v \sim w$, akkor van egy séta, amelyet leíró sorozat $v$-val kezdődik és $w$ -vel végződik. Ha leírjuk az első sétát, majd utolsó elemét a második séta kezdőelemének gondolva utána másoljuk a második sétát, akkor is egy sétát kapunk (miért?). Ez a séta igazolja, hogy $u \sim w$.

# Úttal való elérhetőség

**Lemma**

$u \sim v$ akkor és csak akkor teljesül, ha van $u$-ból $v$-be vezető út.

Azaz a sétával való elérhetőség és az úttal való elérhetőség ugyanaz.

# A lemma bizonyítása

Nyilván ha van $u$-ból $v$-be vezető út, akkor van séta is (az út maga egy (speciális) séta).

Az állítás lényege, ha $u$-ból elsétálhatunk $v$-be, akkor $u$-ból $v$-be vezető út is létezik.

Legyen $\mathcal{S}$

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_i, v_i, \ldots, e_j, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

séta és tegyük fel, hogy nem út. Azaz $i < j$ esetén $v_i = v_j$.
(Indirekt bizonyítás)

Ekkor legyen Kivág$(\mathcal{S}, i, j)$:

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_i, v_i (= v_j), e_{j+1}, \ldots, e_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

szintén egy $uv$ séta,
amely élsorozata az eredeti séta élsorozatának egy részsorozata. Az $e_{i+1}$ él biztos hiányzik belőle, azaz hossza rövidebb mint az előzőé.

Ez a nyilvánvaló észrevétel a Lemma igazolásának lényege.

# A matematikus befejezés

Legyen $\mathcal{S}$ a legrövidebb *uv* séta (ilyen biztos létezik hiszen van ilyen séta az $u \sim v$ feltevés alapján és a sétahossz egy természetes szám).

A fentiek alapján ebben nem lehet csúcsismétlés (hiszen az hossz csökkentéshez vezet, mint láttuk).

Azaz a legrövidebb séta egyben út és bizonyítja az állítást.

# Az informatikus befejezés

$u \sim v$ feltevés alapján van egy

$$\mathcal{S} : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = v$$

$uv$ séta gráfunkban.

Legyen $\mathcal{S}$ a következő algoritmus inputja:

**Kivágásos vonal egyszerűsítő algoritmus:** Adott egy $\mathcal{S}$ $uv$-séta egy $G$ gráfban.

**Amíg** van $v_i = v_j$ csúcsismétlés, **addig** $\mathcal{S} \leftarrow \text{Kivág}(\mathcal{S}, i, j)$.

Az algoritmus során a hossz nem csökkenhet a végtelenségig (értékei természetes számok). Így szükségszerű az algoritmus leállása. Ekkor az aktuális sétában nincs csúcsismétlés. Azaz az output (séta a leálláskor) igazolja az állítást.

# Köszönöm a figyelmet!

Az előadás során a wikipedia oldalairól származó képeket is használtam.