Szitaformula és alkalmazásai

Hajnal Péter

2021. tavasz

Bevezető példa

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben a és b nem kerül egymás mellé?

• Az összes sorbaállítás halmaza legyen S, az összes sorbaállítás száma $5! = 120$.

• Ezek között vannak olyanok, amelyben a és b nem kerül egymás mellé (ezeket kell megszámolnunk, ezeket jóknak nevezzük, halmazukat J-vel jelöljük) és vannak olyanok, amelyben a és b egymás mellé kerül (ezeket nem kell megszámolnunk, ezeket rosszaknak nevezzük, halmazukat R-rel jelöljük).

• Nyilván J és R diszjunktak, együtt kiadják S mind a 120 elemét. Azaz

$$J = S \setminus R.$$

Bevezető példa (folytatás)

$$|J| = |S \setminus R| = |S| - |R| = 120 - |R|.$$

- J elemszáma helyett R elemszámának meghatározása is megoldja a problémát. Ez könnyebb feladat: a és b kétféleképpen kerülhet egymásmellé: a-t követi b (ezek a sorrendek alkossák az R_1 halmazt), vagy b-t követi a (ezek a sorrendek alkossák az R_2 halmazt).

- R_1 elemszáma $4! = 24$, hiszen ab, c, d és e betűsorokat kell sorbarakni. Hasonlóan $|R_2| = 24$. R_1 és R_2 diszjunktak, így az összeadási alapelv alapján $|R| = |R_1| + |R_2| = 24 + 24 = 48$.

- Tehát $|J| = 120 - 48 = 72$.

Második feladat

Feladat

Hány olyan sorbaállítása van a $\{a, b, c, d, e\}$ halmaznak, amelyben sem a és b, sem b és c nem kerül egymás mellé?

- Legyen R_{ab}, R_{bc} azon sorbaállítások halmaza, amelyekben a és b, illetve b és c egymás mellé kerül. Tudjuk, hogy $|R_{ab}| = 48$ és hasonlóan $|R_{bc}| = 48$.
- Most azonban R_{ab} és R_{bc} nem diszjunkt. Ez probléma.
- $120 - 48 - 48$ kiszámításánál az összes sorbaállítás számából a *dabce* sorbaállítás „1 hozzájárulását" kétszer is levontuk (mind R_{ab}, mind R_{bc}-hez is hozzátartozik). Korrigálnunk kell.
- A metszet elemeinek számát hozzá kell adnunk a korábbi számhoz, hogy eredőben „csak kiessen" ezen sorbaállítások hozzájárulása.

Második feladat (folytatás)

- Az $R_{ab} \cap R_{bc}$ elemei pontosan azok a sorbaállítások, ahol az a, b és c betűk egy *abc* vagy egy *cba* blokkot alkotnak. Így számuk $3! + 3! = 12$.
- A válasz $120 - 48 - 48 + 12 = 36$.

Formula

$$|S - (A \cup B)| = |S| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

További feladat

Feladat

Egy osztály 30 tanulója közül 12 szereti a matematikát, 14 a fizikát és 13 a kémiát. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy pedig a matematikát és a kémiát is szereti. Hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül?

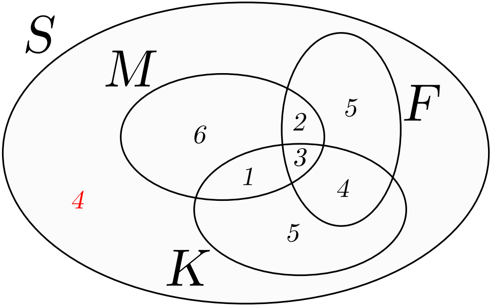
- A feladat egy könnyű gyakorló feladat.
- Ennek ellenére két megoldását is vázoljuk.

I. megoldás formálisan

- Adott több halmaz: S, az osztály tanulóinak halmaza; M, F és K a matematikát, a fizikát, illetve a kémiát szerető tanulók halmaza.
- A feladat $|S \setminus (M \cup F \cup K)|$ értékét kérdezi.
- $M \cap F$ és $M \cap F \cap K$ elemszáma ismert. Ebből $(M \cap F) \setminus (M \cap F \cap K) = M \cap F \cap \overline{K}$ elemszáma kiszámolható. ($\overline{K}$ a K halmaz S halmazra vett komplementerét jelöli, azaz $\overline{K} = S \setminus K$.)
- Hasonlóan kapjuk $M \cap \overline{F} \cap K$ és $\overline{M} \cap F \cap K$ elemszámait.
- Az eljárásunkat folytatva kiszámolhatjuk $M \cap \overline{F} \cap \overline{K}$, $\overline{M} \cap F \cap \overline{K}$ és $\overline{M} \cap \overline{F} \cap K$ elemszámait.
- Végül ezekből adódik a kérdezett szám, $\overline{M} \cap \overline{F} \cap \overline{K}$ elemszáma.

I. megoldás rajzon

• Valójában az osztályt és három részhalmazát tartalmazó Venn-diagram összes „tartományára” meghatároztuk az elemszámát.



• A meghatározás egy alkalmas sorrendben végzett felgöngyölítési eljárás. A kérdésre adott szám az utolsó érték lesz (az összes korábban kiszámolt/nem is kérdezett értékre támaszkodva).

II. megoldás

• Az előző módszer jelöléseit megtartjuk. Most a következőképpen okoskodunk:

• Kiszámíthatjuk $|S| - (|M| + |F| + |K|)$ értékét. Azonban ezzel alábecsültük a kívánt számot.

• Többet vontunk ki $|S|$-ből, mint kellene. Ez abból eredt, hogy bizonyos gyerekeket, például $F \cap K$ elemeit, kétszer is kivontuk ahelyett, hogy csak egyszer vontuk volna ki őket.

• Ezt a hibát korrigálhatjuk

$$|S| - (|M| + |F| + |K|) + (|M \cap F| + |M \cap K| + |F \cap K|)$$

kiszámolásával.

II. megoldás (folytatás)

• Azonban még most sem a helyes értéket kaptuk. $M \cap F \cap K$ elemeit először háromszor vontuk ki, most azonban háromszor vissza is raktuk.

• Az ennek megfelelő módosítás után már a kívánt számot kapjuk:

$$\begin{aligned} |S \setminus (M \cup F \cup K)| = |S| &- (|M| + |F| + |K|) \\ &+ (|M \cap F| + |M \cap K| + |F \cap K| \\ &- |M \cap F \cap K|. \end{aligned}$$

• A feladatban megadott adatok alapján ez egyszerűen kiszámítható.

• A második gondolatmenet több azzal, hogy meg is adja azokat az együtthatókat, amikkel „össze kell rakni” a megadott számokat.

Az általános szitaformula

A második gondolatmenetet általánosítjuk.

Szitaformula

$$
\begin{aligned}
|S\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)| = {} & |S| - (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) + \\
& +(|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + \dots + |A_{n-1}\cap A_n|) - \ldots + \\
& +(-1)^i(|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_i| + |A_1\cap\ldots\cap A_{i-1}\cap A_{i+1}| + \dots + \\
& \qquad |A_{n-i+1}\cap\ldots\cap A_n|) + \\
& + \ldots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Az általános szitaformula: A bizonyítás: Jelölések

- Érdemes bevezetni néhány jelölést:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S,$$

$$A_I = \cap_{i \in I} A_i, \text{ahol } \emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \text{és } A_\emptyset = S,$$

$$\sigma_i = \sum_{I:|I|=i} |A_I| (\sigma_0 = |S|),$$

azaz σ_i az i tagú metszetek elemszáaminak összege.

- Ezen jelöléseket az egész fejezet során használjuk.
- A jelölésekkel a szita formula:

$$|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Az általános szitaformula: A bizonyítás

- Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés egy halmaz elemszáma. Azt mondhatjuk, hogy az $S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ elemeinek 1 a hozzájárulása ehhez a számhoz, míg $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ elemeinek 0.

- A jobb oldal értékét is értelmezhetjük úgy, mint egy számot, amely S elemeinek hozzájárulásából adódik.

- Azt fogjuk belátni, hogy S minden elemének a jobb és a bal oldalhoz való hozzájárulása ugyanaz.

- Az $i = i(s)$ paraméter jelölje azt, hogy s pontosan hány A_j halmazban van benne. (i lehetséges értékei: $0, 1, 2 \dots, n$).

- Ekkor az $s \in S$ elem hozzájárulása a szita formula jobb oldali számához.

$$F(s) = 1 - i + \binom{i}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{i}{n} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Szünet

Elcserélt levelek problémája

- Adott n megírt levél és a hozzájuk tartozó megcímzett borítékok. Hányféleképpen helyezhetők el a levelek úgy, hogy egyik levél se kerüljön a saját borítékába?
- A problémát Euler és N. Bernoulli nevézhez kötik.
- Szita formula nélkül a kérdés fogós és komoly ötleteket kíván.
- Szita formulával azonban könnyen megoldható.

Elcserélt levelek problémája: Permutációk nyelve

- Rakjuk sorba a leveleket és a hozzátartozó borítékokat. Azaz az i-edik levél borítékja is legyen az i-edik pozícióban.
- A levelek elhelyezésnél az i-edik levélnek választunk egy borítékot, mondjuk a j-ediket. Az elhelyezést egy $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ párbaállító leképezés/bijekció írja le.
- Azaz egy elhelyezés a $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy π permutációja.
- Az i-edik levél a saját borítékába kerül ha $\pi(i) = i$. Ekkor azt mondjuk, hogy i a π permutáció fixpontja.
- A kérdés: Hány fixpontmentes permutációja van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak?

Elcserélt levelek problémája: A tétel

Tétel

Egy n elemű halmaz fixpont nélküli permutációinak száma

$$n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} =$$

$$n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) =$$

$$n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil .$$

Elcserélt levelek problémája: A megoldás

- Legyen $S = S_n$, és $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$.
- Ekkor

$$A_I = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i \text{ minden } i \in I \text{ esetén}\}.$$

Ez alapján $|A_I| = (n - |I|)!$.

- Így $\sigma_i = \binom{n}{i}(n-i)! = n!/i!$.
- A keresett szám $|S \setminus \cup_{i=1}^n A_i|$. Ez a szita formula alapján felírható. A felírás mindegyik tagját meghatároztuk. A kapott formula a bizonyítandót egyenlőségsorozat kezdetét adja.
- Az utolsó egyenlőség belátásához némi analízisbeli ismeretek és ötletek szükségesek. Ennek igazolását az érdeklődő hallgatókra bízom.

Szünet

Leképezések összeszámlálása

- Legyen N egy n elemű halmaz, K egy k elemű halmaz. Hány $N \to K$ függvény létezik? Az alapelvek ismerete alapján könnyű a válasz: Függvényértéket kell rendelnünk az értelmezési tartomány n eleméhez egymástól függetlenül. Mindegyik értékadás egy döntés, amelynek k kimenetel lehet. A teljes függvény kialakítására $k \cdot \ldots \cdot k = k^n$ lehetőség van.

- Ezek közül hány injektív van? Ismét ismert a válasz: $k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$.

- A bijektívek függvények összeszámlálása a fentiekből automatikusan adódik: Csak $k = n$ esetén lehetséges bijektív függvény, ekkor viszont az összes injektív függvény bijektív is lesz. Azaz a válasz

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq k, \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases}$$

Szürjektív leképezések száma

- Egy alapkérdés még maradt: Hány szürjektív $N \to K$ függvény van?

- A kérdés jóval nehezebb a fentieknél. A szita formula ismeretében azonban könnyen megoldható.

Jelölés

Jelöljük szürj(n, k)-val szürjektív $N \to K$ függvények számát, ahol $|N| = n$, $|K| = k$.

Tétel

$$\text{szürj}(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Szürjektív leképezések száma: A megoldás

- Legyen N és K egy n, illetve k elemű halmaz.
- Legyen $S = \{f \mid N \to K\}$, és $A_t = \{f \in S : t \notin f(N)\}$ $(t \in K)$, azaz A_t tartalmazza azokat a függvényeket, amelyek nem veszik fel a t értéket.
- Ekkor
$$\text{szürj}(n,k) = |S \setminus \cup_{t\in K} A_t|.$$
- Legyen $L \subseteq K$. Ekkor $|\cap_{\ell\in L} A_\ell| = (k - |L|)^n$.
- Ezek után a szita formula alkalmazható, és kapjuk, hogy
$$\text{szürj}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Köszönöm a figyelmet!