Multihalmazok

Hajnal Péter

2021. tavasz

A halmazok

- Egy halmaz elemeinek sokasága.

- Két halmaz akkor ugyanaz, ha minden objektum, ha az egyikben benne van, akkor a másikban is. Ha az egyikben nincs benne, akkor a másikban sincs benne.

- Egy halmazt ismerünk, ha minden objektumról tudjuk, hogy hozzátarozik vagy sem.

- A halmaz fogalom nagyon hasznos. Minden matematikus használja nap mint nap. Ez a fogalom azonban sokszor nem elegendő egy valóságos helyzet matematikai megfogalmazására.

Példa: Molekulák

Példa

A kémiai egy korai forradalma az volt, amikor felismerték, hogy egy homogén kémiai anyagot molekulák alkotnak, amelyek meghatározott módon épülnek fel atomokból.

A molekula egyik (legyegyszerűbb és lagnaívabb) leírása az, hogy megadjuk milyen atomokból hány alkotja. A víz esetén ez 2 darab hidrogén és 1 darab oxigén atom. Azt mondjuk a víz kémiai képlete H_2O.

• Igaz, hogy a víz molekulát hidrogén és oxigén atomok alkotják, de kémiailag igen fontos, hogy a hidrogén atomok kettő multiplicitással szerepelnek a molekulában.

• További példák kémiai képletekre: $NaHCO_3$ nátrium-hidrogén-karbonát, HNO_3 salétromsav, Na_2SiO_3 nátrium-szilikát.

Példa: Prímtényezős felbontás

Példa

Ismert, hogy minden pozitív egész felírható prímek szorzataként és ez a felírás (ha a tényezők sorrendje nem számít, akkor) egyértelmű.

- Például

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31,$$

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1,$$

$$2021 = 43 \cdot 47,$$

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101.$$

- A prímtényezős felbontás több mint a prímosztók halmaza. Minden prímosztóról tudnunk kell, hogy hányszorosan osztja a kiinduló számot.

Példa: Monomok

Példa

A polinomok/betűs kifekezések matamatikájában a monom fogalma alapvető. Az x, y, z betűkre épített szorzatok (ahogy számoknál megszoktuk) a tényezők sorrendjének felcserélésével, hatvány írásmóddal átírhatók.

• Így x, y, x, z, x, x, z, x, x, z, y szorzata $x^6y^2z^3$. A kialakult monom nem csak azt fejezi ki, hogy milyen betűk alkotják, hanem azt is, hogy melyikből hány tényező szerepelt a szorzásban.

Példa: Anagrammák

Példa

A XIX., XX. század kávéházi életének egy kedvenc játéka volt az anagramma. Egy adott szó, név, mondat betűkészletét kell venni és újrarendezni (kis/nagy betűk nem számítanak, közök, írásjelek tetszés szerint használhatók; gyakran rövid, hosszú magánhangzók is egyenértékűek) úgy, hogy értelmes szavak, mondatok alakuljanak ki.

• A MISSISSIPPI szó betűkészlete 1 darab M, 4 darab I, 4 darab S és 2 darab P.

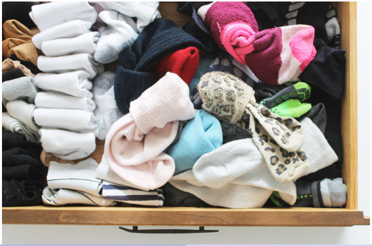
• Példák anagrammákra (némelyik fejtörő, kinek a nevéből ered?): Anyján a sor (Arany János). Nos, anya jár (Arany János). silány szerepeim (Szinyei Merse Pál). A doni gáz gyér (Gárdonyi Géza). siető dán prof (Petőfi Sándor). jó árnyasan (?). Dani, por festő (?). De bősz a szó (?).

Példa: Zoknik

Példa

Középiskolás vagy szórakoztató feladatokban visszatérő szereplő egy fiók, amelyben különböző színű zoknik vannak. Az azonos színű zoknik nem megkülönböztethetők. Hogyan írhatjuk le a fiók tartalmát?

- A fiókban lévő zoknik színei egy halmazt alkotnak, de ez a halmaz nem írja le pontosan a tartalmat. Minden színhez meg kell mondanunk, hogy hány olyan színű zokni van a fiókban.



A multihalmaz fogalma

- A bevezető példák után természetes az alábbi fogalom.

Definíció

M egy multihalmaz a H halmaz felett, ha

$$M : H \to \mathbb{N}.$$

- Az alaphalmaz (H) egy eleme (h) esetén $M(h)$-t a h elem multiplicitásának nevezzük.

- A fogalom további elnevezésekhez, jelölésekhez vezet.

Jelölések

Jelölés

$h \in H$ esetén azt írjuk, hogy $h \in M$, ha $M(h) > 0/M(h) \geq 1$.

Jelölés

R, M multihalmazok H felett. $R \subset M$ akkor és csak akkor, ha minden $h \in H$ elemre $R(h) \leq M(h)$.

Jelölés

M multihalmaz H felett. M elemszáma

$$|M| = \sum_{h:h \in H} M(h).$$

Jelölés

M multihalmaz H felett. $\mathcal{P}(M)$ az a halmaz, amely pontosan M rész-multihalmazait tartalmazza.

További jelölések

Jelölés

Legyen H egy halmaz. $\left(\!\!\binom{H}{k}\!\!\right)$ az a halmaz, amely a H feletti k elemű multihalmazokat „gyűjti össze".

• Megjegyezzük, hogy számunkra általában H egy véges halmaz. Ha az összes pozitív egész prímtényezős febontásait vizsgáljuk, akkor az alaphalmaz lehet az összes prím végtelen halmaza.

Jelölés

Legyen M egy multihalmaz H felett. M tartója

$$\mathrm{supp}(M) = \{h \in H : h \in M / M(h) > 0\}.$$

• Mi mindig véges tartójú multihalmazokat vizsgálunk. Ekkor az elemszámot leíró összeg végtelen H esetén egy „álvégtelen" összeg (véges sok kivétellel 0 tagok szerepelnek benne).

Alapkérdés és a válasz

Alapkérdés

Adott M multihalmaz. Hány rész-multihalmaza van?

• Középiskolai nyelvvel: Osztálykirándulásra utazunk és bepakolunk. Kihúzzuk a zoknis fiókot és valamennyi zoknit elrakunk (többek között esetleg egyet sem, esetleg mindet). Hány lehetőségünk van az elvitt zoknik kiválasztására?

Tétel

$$|\mathcal{P}(M)| = \prod_{h:h\in H} (M(h)+1).$$

Megjegyzés

- A tételt nagyon tömör „egyetemi” jelöléssel írtuk le.

- Érdemes egy kicsit megállni és visszaírni a középiskolás jelölésre.
Legyen $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Legyen M az a multihalmaz H felett, ahol a h_i elemnek m_i a multiplicitása $(M(h_i) = m_i/$ az i-edik színből m_i darab zoknink van). Ekkor a rész-multihalmazok száma

$$(m_1 + 1) \cdot (m_2 + 1) \cdot (m_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_{n-1} + 1) \cdot (m_n + 1),$$

vagy

$$\prod_{i=1}^{n} (m_i + 1).$$

Bizonyítás

- A rész-multihalmaz kiválasztását független döntésekre bontjuk.
- Az alaphalmaz első elemének (h_1) mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban? Az alaphalmaz második elemének mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban? Az alaphalmaz harmadik elemének mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban? ... Az alaphalmaz utolsó elemének mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban?
- Az első döntésnél a $\{0, 1, 2, \ldots, M(h_1)\}$ halmazból kell kikerülnie a válasznak. Azaz $M(h_1) + 1$ lehetőség van. A második döntésnél $M(h_2) + 1$ lehetséges kimenetel van. ... Az utolsó döntésnél $M(h_n) + 1$ lehetséges kimenetel van ($n = |H|$).
- A rész-multihalmazok száma a szorzási alapelvat használva

$$(M(h_1) + 1) \cdot (M(h_2) + 1) \cdot \ldots \cdot (M(h_n) + 1) = \prod_{h: h \in H} (M(h) + 1).$$

Második alapkérdés

Alapkérdés

Legyen H egy tetszőleges n elemű halmaz. $|\left(\!\binom{H}{k}\!\right)| = ?$

Jelölés

$$\left|\left(\!\!\binom{[n]}{k}\!\!\right)\right| = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right).$$

Középiskolás nyelven: Adott n számozott golyó. Húzzunk ki k golyót úgy, hogy minden húzás után visszatesszük az éppen kihúzott golyót. Hányféle eredménye lehet a k húzásnak, amennyiben a kihúzott számok sorrendjét nem vesszük figyelembe?

A Tétel, a kódolás

Tétel

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

- A $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ feletti k elemű multihalmaz leírása a $m_1, m_2, \ldots, m_n$ multiplicitások megadása (az h_i elem multiplicitása m_i, így $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$).
- Ez kódolható a következő módon:

$$\underbrace{\circ \ldots \circ}_{m_1 \text{ darab}} \mid \underbrace{\circ \ldots \circ}_{m_2 \text{ darab}} \mid \underbrace{\circ \ldots \circ}_{m_3 \text{ darab}} \mid \ldots \mid \underbrace{\circ \ldots \circ}_{m_{n-1} \text{ darab}} \mid \underbrace{\circ \ldots \circ}_{m_n \text{ darab}}$$

- Nyilván k darab $\circ$ karakter és $n-1$ darab $\mid$ karakter/elválasztójel alkotja a kódot.

A Kódolás: Példa: $H = \{a, b, c\}$, $k = 6$

$$\langle a, a, a, b, c, c\rangle = a^3bc^2 \mapsto \circ\circ\circ|\circ|\circ\circ,$$
$$\langle a, b, b, b, c, c\rangle = ab^3c^2 \mapsto \circ|\circ\circ\circ|\circ\circ,$$
$$\langle a, a, a, b, b, b\rangle = a^3b^3 \mapsto \circ\circ\circ||\circ\circ\circ,$$
$$\langle a, a, a, a, a, a\rangle = a^6 \mapsto \circ\circ\circ\circ\circ\circ||,$$
$$\langle b, b, b, b, c, c\rangle = b^4c^2 \mapsto |\circ\circ\circ\circ|\circ\circ.$$

- Folytatva/megfordítva az előző példát:

$$\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ \mapsto ab^4c,$$
$$\circ\circ\circ\circ|\circ\circ| \mapsto a^4b^2,$$
$$|\circ\circ\circ\circ\circ\circ| \mapsto b^6,$$
$$\circ\circ\circ\circ\circ||\circ \mapsto a^5c,$$
$$\circ\circ\circ\circ||\circ\circ \mapsto a^4c^2.$$

- A példa matematikai jelentése: a kódoló függvénynek van inverze, párbaállító leképezés.

A bizonyítás vége

- Azaz az összeszámolandó multihalmazok ugyanannyian vannak mint a lehetséges kódok.
- Egy kódhoz az $n+k-1$ pozícióból ki kell választanai a k darab $\circ$ karakter helyét. Ez $\binom{n+k-1}{k}$ lehetőség.
- Ez a tételt igazolja.

II. Bizonyítás

- Nyilvánvalóan
$$\left(\!\!\binom{1}{k}\!\!\right)=\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right)=1$$

minden n, k természetes számra.

- Ha az $\left\{\left(\!\binom{n}{k}\!\right)\right\}_{n=1,k=0}^{\infty,\infty}$ számokat egy síknegyedet elfoglaló táblázatba képzeljük, akkor a fenti képletek a táblázat szélét/peremét írják le: ott 1-esek állnak.

- A bizonyítás folytatása ezen képlet bizonyítása, ami a nem szélső számokra mondja meg, hogy számolható ki a korábbiakból:

Lemma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)=\left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)+\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

Lemma bizonyítása

• Ahogy a Pascal-háromszöget leíró rekurziónál tettük a megszámolandó objektumokat (mostani estünkben a k elemű multihalmazokat) két csoportba osztjuk aszerint, hogy az 'n' elem bennük van-e vagy nem.

• A két esethez tartozó multihalmazokat külön-külön megszámoljuk és az összeadási elvre hivatkozva összeadjuk a két eredményt.

• Ha 'n' elem nincs benne a multihalmazunkban, akkor a k elemű multihalmazt az $[n-1] = [n] \setminus \{n\}$ halmaz felett kell választanunk, a lehetőségek száma $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$.

• Ha 'n' elem benne van a multihalmazunkban, akkor a k elemű multihalmazhoz, még mellé kell választani egy $k-1$ elemű multihalmazt. Ez a választás a $[n]$ halmaz felett értendő. (Itt van a különbség a részhalmazokhoz képest.)

Lemma bizonyítása (folytatás)

- Az 'n' elem multihalmazhoz tartozása 1 multiplicitást jelent. Amikor mellé választunk objektumokat, hogy k elemű multihalmazhoz jussunk, akkor 'n' elem újra választható, multiplicitása növelhető (ez a lehetőség nem állt rendelkezésünkre a részhalmazok választásánál).
- A lehetőségek száma $\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$.
- Az összefüggést igazoltuk.

A bizonyítás vége

• A bizonyított összefüggés a táblázatra vonatkozólag azt jelenti, hogy minden nem-perem- pozícióban álló szám ($\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$) a felette álló (északi szomszéd: $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$, előző sor, de ugyanaz az oszlop) elem és előtte álló (nyugati szomszéd: $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$ ugyanaz a sor, de az előző oszlop) elem összege:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	21
4	1	4	10	20	35	56
5	1	5	15	35	70	126

• Jól látható a Pascal-háromszög számainak megjelenése. A tételben szereplő képlet helyességének igazolása egyszerű teljes indukció.

Szünet

Multihalmaz sorbaállításai

• A kávéházban ülő irók, költők minden probléma nélkül megértették, hogy mit értünk egy név betűkészletén és ennek sorbarendezésén. A fogalom természetes. A formalizmus azonban elrejtheti a természetességet. Addig kell „rágnunk” a formalizmust, míg jelentése egybeolvad a természetes értelmezéssel.

Definíció

Legyen M egy multihalmaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ n elemű halmaz felett. Legyen m_i a H_i elem multiplicitása. Legyen $\ell = |M| = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Ekkor M sorbaállítása egy

$$\pi : [\ell] = \{1, 2, 3, \ldots, \ell - 1, \ell\} \to H$$

leképezés, ahol minden h_i elem pontosan m_i darab pozícióhoz lett rendelve.

Az alapkérdés

- A sorbaállítási tulajdonság formálisan leírva:

$$|\{p \in [\ell] : \pi(p) = h\}| = M(h), \qquad \text{minden } h \in H \text{ esetén.}$$

Jelölés

Legyen $\sigma(M)$ az a halmaz, amely az M multihalmaz sorbaállításait gyűjti össze.

Alapkérdés

Adott M multihalmaz. $|\sigma(M)| = ?$

- Középiskolai nyelven: Kimossuk a zoknis fiókunk tartalmát. (A fiókban az s_i színből m_i zoknink volt $(i = 1, 2, \ldots, k)$.) A mosás után kiakasztjuk a szárítókötélre száradni őket. Hányféle sorrendben akaszthatjuk ki őket?

A Tétel és a bizonyítás kezdete

Tétel

Legyen M egy multihalmaz H felett. Ekkor

$$|\sigma(M)| = \frac{|M|!}{\prod_{h:h\in H} M(h)!}.$$

- Legyen $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, ahol $n = |H|$ M-et helyettesítsük egy $M^{\{\}}$ halmazzal: minden elemet helyettesítsünk multiplictásnyi különböző indexelt elemmel.

- Példa $H = \{a, b, c\}$ esetben:

$$M = a^4bc^2 \mapsto M^{\{\}} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, c_1, c_2\},$$
$$M = a^2b^5 \mapsto M^{\{\}} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}.$$

A hozzárendelt $M^{\{\}}$ halmaz nyilván $|M|$ elemszámú.

A bizonyítás

• Így $|M|!$ darab sorbaállítása van. Mindegyiket soroljuk fel és töröljük le az indexeket. Így egy $|M|!$ hosszú listát kapunk M sorbaállításaiból.

• Általában egy sorbaállítás többször is szerepelhet. Azaz általában „túlszámolunk".

• A túlszámolás azonban könnyen követhető/kontrolálható. M minden π_0 sorbaállítása $M^{\{\}}$-nek azokból az az elemeiből ered, amiket úgy kapunk, hogy a π_0 sorbeli $M(h_1)$ darab h_1 elemet $1, 2, \ldots, M(h_1)$ indexekkel láttuk el, majd ettől függetlenül az $M(h_2)$ darab h_2 elemet $1, 2, \ldots, M(h_2)$ indexekkel láttuk el valamilyen sorrenben, és így tovább.

• Az indexelésre $M(h_1)! \cdot M(h_1)! \cdot \ldots \cdot M(h_n)!$ lehetőség van. Minden $\sigma(M)$-beli elemet ennyiszeresen számolunk túl.

• $\sigma(M)$ elemszáma egy osztással adódik, ahogy a tétel leírta.

... és valami teljesen más ...

Újból polinomok

• Térjünk vissza a polinomokhoz. Ismét a disztributív szabály segítségével bontsuk fel a zárójeleket, de a tényezők sorrendjéhez NE nyúljunk:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y)+y(x+y) = xx+xy+yx+yy.$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 =& (x+y)(x+y)(x+y) = x(x+y)(x+y) + y(x+y)(x+y) = \\ =& xx(x+y) + xy(x+y) + yx(x+y) + yy(x+y) = \\ =& xxx + xxy + xyx + xyy + yxy + yxy + yyx + yyy.\end{aligned}$$

• Mit látunk? A harmadik hatványnál az összes x, y tényezőkből felírt 3 tényezős szorzatokat ($2^3 = 8$ darab, szorzási szabály!). A tényezők sorrendjének figyelembe vételével ezeket felfoghatjuk mint az $\{x, y\}$ halmaz feletti három elemű multihalmazok sorbaállításai.

Újból polinomok (folytatás)

• Hozzuk a monomokat rendezett alakba (egy x hatvány szorozva egy y hatvánnyal). $x^i y^j$ alakú monomok lesznek, ahol $i + j = 3$.

• Hányszor kapjuk meg $x^i y^j$-t? Annyiszor, ahány sorbaállítása van az $\langle \underbrace{x, \ldots, x}_{i \text{ darab}}, \underbrace{y, \ldots, y}_{j \text{ darab}} \rangle$ multihalmaznak.

• Ugyanez n-edik hatvánnyal is megismételhető és kapjuk a binomiális tétel új alakját:

Binomiális tétel

$$(x+y)^n = \sum_{i,j \in \mathbb{N}: i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Trinomok

• Az új bizonyítás erénye, hogy háromtagú/trinom polinomok hatványozására is alkalmazható:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 =& (x+y+z)(x+y+z) = \\ =& x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) = \\ =& xx + xy + xz + yx + yy + yz + zx + zy + zz.\end{aligned}$$

Trinomok (folytatás)

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 =&(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z) = \\
=&x(x+y+z)(x+y+z) + y(x+y+z)(x+y+z) + \\
&+ z(x+y+z)(x+y+z) = \\
=&xx(x+y+z) + xy(x+y+z) + xz(x+y+z) + \\
&+ yx(x+y+z) + yy(x+y+z) + yz(x+y+z) + \\
&zx(x+y+z) + zy(x+y+z) + +zz(x+y+z) = \\
=&xxx + xxy + xxz + xyx + xyy + xyz + xzx + \\
&+ xzy + xzz + yxx + yxy + yxz + yyx + yyy + \\
&+ yyz + yzx + yzy + yzz + zxx + zxy + zxz + \\
&+ zyx + zyy + zyz + zzx + zzy + zzz.
\end{aligned}$$

Trinomok (folytatás)

- Természetesen az utolsó példánkban az össze nem vont, sorrend-tartó leírásban $3^3 = 27$ monom szerepel. Mennyi lesz az összevonás után x^2z együtthatója? Ahány monom „vonódik össze erre”.

- A 27-ből hány monom adja rendezés után x^2z-t? Ahány sorbaállítása van az $\langle x, x, z\rangle$ multihalmaznak. Azaz $\frac{3!}{2!0!1!} = 3$.

- Az n-edik hatványra elmondva ugyanezt kapjuk a következő tételt:

Trinomiális tétel

$$(x+y+z)^n = \sum_{i,j,k\in\mathbb{N}:i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Multinomok

• A gondolatmenet minden probléma nélkül kiterjeszthető t tagú polinomok hatványozására. A kezdeti példák végigszámolását, majd a részletek kidolgozásáta az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

Multinomiális tétel

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_t \in \mathbb{N}: i_1+i_2+\ldots i_t = n} \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_t!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_t^{i_t}.$$

• Ha valaki a jelölés technikát szeretné gyakorolni, akkor olvassa el a következő formalizálását a multinomiális tételnek.

$$\left(\sum_{i=1}^{t} x_i\right)^n = \sum_{(k_i)_{i=1}^t \in \mathbb{N}^t : \sum_{i=1}^t k_i = n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^t k_i!} \prod_{i=1}^{t} x_i^{k_i}.$$

Köszönöm a figyelmet!