Sorbaállítások, átrendezések

Hajnal Péter

2021. tavasz

Az alapkérdés: Egy konkrét példa

• Van három plüss figuránk: egy elefánt, egy zsiráf és egy kutya. Napközben ezekkel játszunk, de este Édesanyánk azt mondja rendet kell csinálni. A plüss figurákat egy polcon tartjuk, ahol egymás mellett férnek el. Este sorba kell raknunk őket a polcon. Hány lehetőségünk van?

• A játékokat értelemszerűen jelöljük E, Zs és K jelekkel. A lehetőségeket listázhatjuk:

$$\begin{array}{ccc} E\ K\ Zs, & E\ Zs\ K, & K\ E\ Zs, \\ K\ Zs\ E, & Zs\ E\ K, & Zs\ K\ E. \end{array}$$

Hat lehetőségünk van.

A sorbaállítás definíciója

• A sorbaállítás egy „nyelvet” is ad számunkra. Lesz első, második/középső, harmadik/utolsó játék, mondhatjuk, hogy az első és utolsó közrefogja a középsőt.

• Egy H halmazt alkotó n elem sorbaállításánál van n pozíció, amit az $1, 2, \ldots, n$ számokkal jelölhetünk. A sorbaállításnál a pozíciókat és H elemeit párba állítjuk.

Definíció

Egy n elemű H halmaz sorbaállítása egy

$$\pi : [n] = \{1, 2, \ldots, n\} \to H$$

bijekció.

A formalizmusról

Példa

Legyen $H = \{E, K, Zs\}$. Ekkor

1	2	3
K	Zs	E

$$\underbrace{1}_{K} \quad \underbrace{2}_{Zs} \quad \underbrace{3}_{E}$$

$$K\ Zs\ E$$

ugyanannak a sorbaállításnak a leírása.

• Nyilván a legutolsó a legrövidebb, legemberibb. Tömörsége köszönhető annak, hogy néhány megállapodáson alapul olvasata. Például a sor első eleme a bal oldali elem. Héber közösségben esetleg más olvasat lehetséges.

• Ennek ellenére a formális matametikai leírás az első. A bijekciót leíró táblázat oszlopai felcserélhetők, olvasata „robusztus”.

Az alapkérdés

Jelölés

Legyen $\sigma(H)$ a H halmaz sorbaállításainak halmaza.

- Az alapkérdés: Legyen H egy n elemű halmaz. Határozzuk meg $|\sigma(H)|$-t. Speciálisabban: Határozzuk meg $|\sigma([n])|$-t.

- Ez „középiskolás nyelven”: Adott n különböző tárgy. Hányféleképpen állíthatjuk sorba őket?

Jelölés

Legyen n egy természetes szám. Ekkor $n!$ (olvasata n faktoriális) a következő értéket jelöli

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, & \text{különben} \end{cases}$$

A tétel

- Szavakkal: n faktoriális az elsőn pozitív egész szorzata.

- Ha $n = 0$ vagy $n = 1$, akkor ennek értelmezése nem világos. Mit értünk 0 tényezős/üres szorzat alatt? Mit értünk egytényezős szorzat alatt?

- Az üres szorzat értéke 1. Az egy tényezős szorzat értéke az egyetlen tényező. Fent a megállapodások alapján kijövő értékeket írtuk le.

Tétel

n tárgyat

$$n!\text{-féleképpen}$$

állíthatunk sorba.

Kis n-ek esete

• Az $n = 0$ eset nyilvánvaló.

• A sorbaállításokra úgy kell gondolnunk mint egy-egy fénykép. Ha $n = 0$, akkor nincs sorbaállítandó tárgy, egyetlen egy fénykép lehetőséges: az „üres polc" fényképe (feltettük, hogy a sor egy polcon kerül kialakításra).

• Az $n = 1$ eset hasonlóan nyilvánvaló.

• Egy játékunk van, amit egy polcon „felsorolunk" egyféle fénykép lehetséges (játék pontos helyzete nem lényeges).

• Az $n = 2$ eset könnyen meggondolható.

I. Bizonyítás

• Egy sorbaállítás kiválasztását döntések sorozataként fogjuk fel.

• Kiválasztjuk az első pozícióban álló elemet, majd a második pozícióban álló elemet, majd a harmadik pozícióban álló elemet és így tovább.

• Az első döntésre n lehetőségünk van. Az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kell egyet kiválaztani, ami azonosít egy tárgyat. Mondjuk t azt jelenti, hogy a koruk szerint rendezett sorban az t-edik tárgyról van szó.

• Az i-edik döntésnél vigyáznunk kell, hogy a korábban már sorbaállított emberekre vonatkozó döntésünkkel ne kerüljünk ellentmondába. Így $n - (i - 1)$ tárgy közül választhatunk. Mondjuk $t \in \{1, 2, \ldots, n - i + 1\}$ azt jelenti, hogy a koruk/súlyuk/nevük szerint rendezett sorban az t-edik EDDIG BE NEM SOROLT tárgyról van szó.

I. Bizonyítás (folytatás)

- Ha így teszünk, akkor ezen választásunk független a korábbiaktól.
- A teljes döntéssorozat ad egy választott sorrendet.
- A szorzásielv alapján erre $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetőség van.

II. Bizonyítás

- Jelölje s_n az n tárgy sorbaállításainak számát, azaz az alapkérdésre adandó választ.

- $s_0 = s_1 = 1$-et tudjuk.

- Mi a kapcsolat s_{n+1} és s_n között? Gondoljuk el, hogy van egy n fős osztály. A liberális tornatanáruk tetszőleges sorrendet megenged az órakezdeti tornasornak. Hány lehetőségük van? A válaszra vezettük be az s_n jelölést.

- Mi történik, ha egy új osztálytárs jelenik meg? Nyilván a lehetőségek száma nő. A korábbi sorok mind ott lesznek, de ezekbe be kell szúrnunk az új gyereket.

- Egy régi sor hány új lehetőséget ad? Hányféleképpen szúrhatunk be egy új elemet egy n hosszú sorba?

II. Bizonyítás (folytatás)

- A már sorbaálló gyerekek meghatároznak $n-1$ közt és ott van az első, illetve utolsó pozíció is mint lehetőség is. Másképpen a gyerek választhat egy jobb szomszédot (n lehetőség) és dönthet úgy, hogy a sor jobb oldalára áll. A beszúrásra $n+1$ lehetőség van.
- Azaz az s_n mögött álló lista mindegyik eleme $n+1$-szereződik az új listában. Ez azt jelenti az elemszám tekintetében, hogy

$$s_{n+1} = (n+1)s_n.$$

- A bizonyítást egy „unalmas” teljes indukció zárhatja.

Egy Általánosított feladat

Feladat

Egy dobozban tartunk n különböző plüssállatot. Ágyunk felett egy polc van, amelyen k állat fér el egymás mellett. Hányféleképpen rakhatjuk tele a polcunkat plüssállatokkal?

- Reméljük a feladat a korábbiak alapján nem túl nehéz.
- k döntést kell meghoznunk: Melyik állatot rakjuk az első pozicióba? Melyik állatot rakjuk a második pozicióba? És így tovább.
- Az első döntésre n kimenet lehet. Az i-edik döntésnél $i-1$ pozícióba már elhelyeztünk tárgyakat. Így $n-i+1$ lehetőség közül válaszhatunk.
- A válasz egy k tényezős szorzat. Az első tényező n, majd mindegyik tényező 1-gyel kevesebb. Formulával:

$$n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

A „Kontorlált túlszámolás” elve

- Listázzuk a megoldásokat kis n, k esetén. Minden megoldásnál egy-egy k-elemű plüsállat-halmazt is látunk (a sorrendet ezzel „elfelejtjük”).
- A k-elemű részhalmazok számára $n(n-1)\dots(n-k+1)$ egy rossz megoldás (feltesszük, hogy $k>1$). Minden részhalmazt látunk, de többször is amennyiben végigpásztázzuk a feladat lehetőségeit felsoroló listát. A formula egy túlszámolás eredménye.
- Azonban minden részhalmaz pontosan $k!$ sokszor szerepel a listán. Azaz túlszámolásunk „szabályos”.

Egyszerű alapelv

Ha egy $\widehat{\mathcal{L}}$ listában egy $\mathcal{L}$ elemei szerepelnek úgy $\mathcal{L}$ minden eleme pontosan s-szer szerepel, akkor

$$|\mathcal{L}| = \frac{|\widetilde{\mathcal{L}}|}{s}.$$

Újra a binomiális együtthatók

Tétel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Szünet

Bevezető feladat

Feladat

n óvodás játszik az udvaron körjátékot. Csoportokba osztódnak és minden csoport egy-egy kört alkot. Egy körben mindenkinek lesz bal és jobb szomszédja. Hány lehetőségük van a játékra?

- Kiemelünk két speciális „kört”. Lehetséges, hogy egy csoportba egy gyerek kerül. Ő is alkothat kört. Bal és jobb szomszédja is önmaga. Két gyerek is alkothat kört. Ekkor mindkettőnek ugyanaz lesz a bal, illetve jobb szomszédja: a másik gyerek.

- A feladat tapasztalatom szerint nehéz, a legtöbb diák nem tud vele mit kezdeni. Középiskolában ilyenről nem hallottak (szemben a sorbaállítási feladattal, amely alapfeladat).

- Az érdeklődő hallgató sorolja fel a lehetőségeket $n = 3, 4$ esetén.

- A feladatot egyelőre hagyjuk és továbbhaladunk.

Átrendezések: Definíció

Definíció

Egy H halmaz átrendezésén egy

$$\pi : H \to H$$

bijekciót értünk.

• Az átrendezést is interpretálhatjuk a sorbaállítás matematikai definíciójának logikájával. Adott n tárgy egy szobában. Mindegyiknek van egy pozíciója és mindegyik egy-egy tárgy is.

• $H = \{E, K, Zs\}$ esetén ha $E \in H$, akkor olvasható úgy is, hogy E egy tárgy, az elefánt játék és úgy is, hogy „E helye", egy pozíció.

• az $E \mapsto K$ olvasható úgy is, hogy a Kutya az Elefánt helyére kerül. Ez megmagyarázza az elnevezést.

Átrendezések: Az alapkérdés

Jelölés

Legyen $S(H)$ a H halmaz átrendezéseinek halmaza.

- Az alapkérdés: Legyen H egy n elemű halmaz. Határozzuk meg $|S(H)|$-t. Speciálisabban: Határozzuk meg $|S([n])|$-t.
- $S([n])$-re használatos az S_n jelölés is.()

Átrendezések és sorbaállítások

- Persze ha van egy alapsorbaállítása a H halmaznak, akkor H minden sorbaállítás értelmezhető átrendezésnek is.

- Ha H elhelyezkedése egy sorban történik, akkor az átrendezés egy sorbállításhoz vezet/azzal írható le.

Észrevétel

$$\sigma(H) \sim S(H).$$

Megállapodás

Ha nem akarjuk lerögzíteni, hogy sorbaállításként vagy átrendezésként beszélünk egy $S(H) \sim \sigma(H)$ elemről, akkor permutációt mondunk.

Permutatio: 1845

Permovere, reábirni.

Permutatio, csere; *cambialis permutatio*, viszonlagos csere; *permutare*, cserélni.

Pernicies, veszedelem.

Permutatio: internet

Latin	Magyar
permutatio noun onis F	csere ▼ főnév
	kicserélés ▼ főnév
	pénzforgalom ▼ főnév
	változás ▼ főnév
	változtatás ▼ főnév

Átrendezések: Miért?

• Látni fogjuk, hogy átrendezések illetve sorbaállítások vizsgálata más nyelvezethez vezet.

• Másrészt van egy óriási előnye az átrendezéseknek: két átrendezés egymásután végrehajtható (a matematikusok — megfelelő analógiák miatt — azt mondják szorozhatók).

• Tegyük fel, hogy egy π első átrendezésben $E \mapsto K$ és egy ρ második átrendezésben $K \mapsto Zs$. Azaz először a Kutya az Elefánt helyére kerül, majd a Zsiráf a Kutya helyére kerül.

• Akkor azt egy $E \mapsto Zs$ utasítással is kifejezhetjük.

• Azaz két átrendezés szorzata a megfelelő, őket leíró matematikai függvények/leképezések/bijekciók kompozíciója.

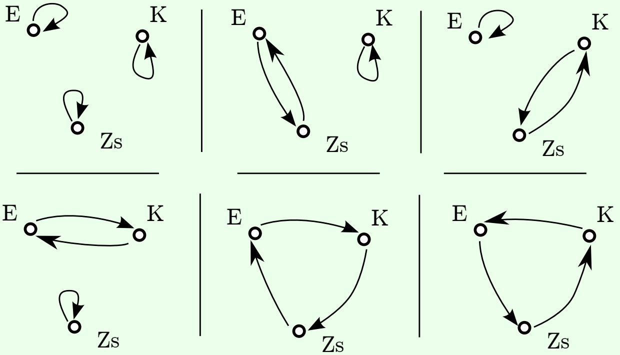
Átrendezések diagramja

Definíció

Legyen $\pi : H \to H$ egy átrendezés. π diagramja a következő ábra: H elemeit egy-egy karika jelképezi. Minden $h \mapsto h'$ hozzárendeléshez tartozik egy „nyíl”, amely h karikájából h' karikájához vezet.

Átrendezések láttatása

Példa



Legyen $H = \{E, K, Zs\}$. Az összes átrendezésük diagramjaik lerajzolásával.

- Talán meglepetés, hogy a három tárgy körökbeállításait látjuk magunk előtt. Ez nem véletlen.

Egy átrendezés diagramjának tulajdonságai és egy Tétel

- Ha H egy n elemű halmaz, akkor H egy tetszőleges átrendezését leíró diagram n karikát és n nyilat tartalmaz.
- Minden karikából egy nyíl halad ki.
- Minden karikába egy nyíl fut be.

Tétel

Ha n karika és köztük haladó n nyíl diagramja olyan, hogy

(1) minden karikából egy nyíl indul ki,

(2) minden karikába egy nyíl fut be,

akkor a diagram karikái csoportosíthatók úgy, hogy minden nyíl egy csoporton belül haladjon és a csoporton belüli nyílak egy körbe rendezzék a csoport elemeit.

A Tétel „magyarázata”

• A tételbeli csoportosítás egy csoportját és a köztük haladó nyilakat az átrendezés ciklusának nevezzük.

• Az ilyen átrendezéseket példaként fel is hozhattuk volna: Tárgyaink köralakú asztal mellett ülnek. „Mindenki a jobb szomszédja helyéré kerül” egy átrendezés.

• A tétel szerint ennek a példának a „több asztalos változata” egy univerzális példa: minden átrendezés esetén felismerhetők/beleláthatók az asztaltársaságok és az asztalok melletti ülésrend.

A Tétel bizonyítása: Egy ciklus felismerése

• Nézzünk a diagramra mint egy térképre, ahol a karikák a csomópontok, a nyílak egyirányú utcák.

• Egy csomópontból kezdjünk el utazni az egy irányú utcák szabályának betartásával. Mindegyik csomópontból egyetlen utca indul ki. Utunk egyértelmű és sose akad el.

• Valamikor csomópontot kell ismételnünk. Először ez szükségszerűen a kiinduló pont lesz. (Miért?)

• Ezzel egy ciklust azonosítottunk.

A Tétel bizonyítása: A befejezés

• Ha ez a teljes diagram, akkor készen vagyunk.

• Ha nem, akkor lesznek maradék karikák. Ezek és a ciklusban lévő karikák között nincs nyíl: A ciklus elszámolja a ciklus csúcspontjaiba befutó és onnan kifutó egyetlen nyílat.

• Így a maradék karikák függetlenül kezelhetők a megtalált ciklustól.

• Ugyanezzel az eljárással újabb ciklust találhatunk meg, egészen addig míg ki nem merítjük az összes csomópontot.

• Ekkor az összes karikát besoroltuk egy-egy ciklusba, amelyek csoportosítják pontjainkat.

A tétel

Tétel

Egy n elemű halmaznak $n!$ átrendezése van. Azaz H véges halmazra
$$S(H) = |H|!.$$

- Ezzel az óvodásokra vonatkozó feladatot is megoldottuk.

I. Bizonyítás (ismétlés)

- Rögzítsük le a H halmaz egy alapsorrendjét.
- Ekkor minden sorbarendezése H-nak egy átrendezése az alapsorrendnek.
- Ekkor az alapsorrend minden átrendezése egy sorbaállítása H-nak.
- Fent leírtunk egy bijekciót $S(H)$ és $\sigma(H)$ közt.
- Speciálisan $|S(H)| = |\sigma(H)|$.
- Tudjuk, hogy $|\sigma(H)| = n!$.

II. Bizonyítás (ismétlés)

- Megismételhetjük a sorbaállításoknál megismert gondolatmenetet:
- Legyen $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Egy átrendezés leírását n döntés meghozatalaként fogjuk fel:
- Mi legyen a képe h_1-nek? Mi legyen a képe h_1-nek? És így tovább.
- A gondolatmenet további leírása jó gyakorlás az érdeklődő hallgatónak.

III. Bizonyítás

- n óvodás körjátékot játszik. (Lásd bevezető feladat.) A lehetőségek számát jelölje a_n.

- Hogyan változik ez, ha egy új gyerek csatlakozik hozzájuk?

- Az új lehetőségek mind felfoghatók úgy, mint egy régi körjáték, amelybe az új gyerek „beszúrja magát”. Hányféleképpen teheti ezt meg?

- Választhat egy jobb szomszédot a régiek közül (n lehetőség), vagy alkothat külön kört (ekkor jobb szomszédja önmaga lesz).

- Végeredményben a bővített $n+1$ óvodás halmazából kell egy gyereket választani: $n+1$ lehetőség. Azaz $a_{n+1} = (n+1)a_n$.

- Az „unalmas” indukció zárja a bizonyítást.

Új? kérdések

Feladat

Hányféleképpen ültethető le 25 gyerek egy nézőtéren, ahol 5 sor mindegyikében 5 szék van?

• Először talán zavaró lehet, hogy egy 2-dimenziós pozíció halmaz és a gyerekek közt kell egy bijekciót találni.

• Utána remélhetőleg világos lesz, hogy ugyanaz a helyzet mint a sorbaállításnál (ahol 1-25 pozíciók és a gyerekek közt kerestünk bijekciót).

• Az is világos, hogy ugyanaz a helyzet mint az átrendezésnél (ahol a gyerekek és szintén a gyerekek közt kerestünk bijekciót).

• A válasz: 25!.

Új? kérdések (folytatás)

Feladat

Hányféleképpen helyezhető el 8 bástya a sakktáblán úgy, hogy ne páromként üssék egymást?

- Egy ötlet kel csak: Egy jó elhelyezéshez az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ oszlopokba kell egy-egy bástyát rakni úgy, hogy különböző sorokba ($\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) essenek.

- Azaz egy $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bijekciót keresünk. Hány bijekció lehetséges?

- A válasz 8!.

A Tétel

Tétel

Legyen H, H' két n-elemű halmaz. Ekkor

$$\Big|\{\varphi : H \to H' |\ \varphi \text{ bijekció}\}\Big| = n!.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!