Kombinatorikus alapelvek

Hajnal Péter

2021. tavasz

A kurzusról

- A kombinatorika kurzus két részből áll:

(1) összeszámlálási problémák,

(2) gráfelmélet.

- A gyakorlat és előadás „EGYBEKREDITÁLT”. Mindkét részben a teljesítményt 0-50-es skálán értékelem. A két értékelés összege adja a kurzus pontszámát, amit jeggyé kovertálok (lásd coospace).

Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy v természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter. Például: hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

• Itt egy H_n halmazsorozatról van szó és ennek elemei elemszámára kérdezünk rá. Az elemszám n-től függ. A válasz egy sorozat, mégpedig természetes számok egy sorozata.

• Sokszor több paraméter is lehet. Például: hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

• A válasz két paraméter esetén természetes számok egy két dimenziós serege/táblázata.

Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy H halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban H-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

• Ez kis halmazok esetén egy KONKRÉT, nagyon hasznos feladat. Fontos, hogy a listázásnak legyen egy alapelve. Ezzel lehet kiküszöbölni a listázási feladat két buktatóját: egy elemet kihagyunk, illetve egy elemet többször is felírunk.

Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

• Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).

• Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen. Az ötös lottó kihűzott számötöseit összegyűjtő halmaz listázása értelmetlen feladat. Az elemszám meghatározása egy jó középiskolai gyakorlat.

• Megjegyezzük, hogy az óriási lista ellenére az elemszám tízes számrendszerben felírva csupán nyolc számjegy.

• Egy paraméteres összeszámlálási problémát mindig érdemes úgy kezdeni, hogy kis paraméter értékekre listázzuk a halmazok elemeit. Így a feladat KONKRÉT, megfoghatóvá válik.

Összeszámlálási problémák: Alapelvek

• Három alapelvet ismertetünk.

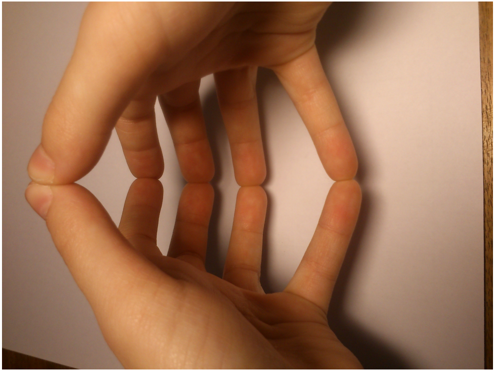
• Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza.

• Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat.

• Mindig feltesszük, hogy VÉGES halmazokkal dolgozunk, de erről később még szó lesz.

Bijektív alapelv

- A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



- A képen egy kislány teszi össze bal, iletve jobb kezének ujjait. Ő már tud számolni, de ennélkül is látja (ahogy a számolni nem tudók is), hogy bal és jobb kezén ugyanannyi új van.

Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

- Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy. Párok alakulnak ki a két fajta figurák között. Ismét számolás nélkül tudhatjuk, hogy a két fajtából ugyanannyi darabunk van.

Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

- Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak. Tehát ugyanannyi balos cipő van a képen mint jobbos. A pontos számuk meghatározása egy számolás, összetettebb mint az egy pillanat alatt látható „azonos elemszámúság”.

Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja

- Ez alapján mindenki számolás nélkül tudja, hogy a csoportban ugyanannyi fiú van mint lány.

Bijektív alapelv: Formalizálás

HA két halmaz elemeit párokba tudjuk állítani,
AKKOR a két halmaz azonos elemszámú.

Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”. Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos; egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj.

- A és B halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli.

- Az is nyilvánvaló, hogy a párom párja én vagyok. Matematikai irásmóddal, ha $x \in A$, akkor x párjának ($\varphi(x) \in B$-nek) párja ($\psi(\varphi(x)) \in A$) x, azaz $\psi(\varphi(x)) = x$ bármi legyen is az $x \in A$ elem. Illetve hasonlóan ha $y \in B$, akkor y párjának ($\psi(y) \in A$-nak) párja ($\varphi(\psi(y)) \in B$) y, azaz $\varphi(\psi(y)) = y$ minden $y \in B$ elemre.

Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ egy párbaállító leképezés A-ból B-be, illetve ψ egy párbaállító leképezés B-ből A-be.

- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz φ meghatározza ψ-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító?

- Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lányhoz kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként.

- Ezen két tulajdonsággal szokták leírni a párbaállító leképezéseket.

- Ha „valamit” mindenki számára egyértelműen leírunk, akkor azt mondjuk hogy ezt a „valamit” definiáljuk. A leírás a „valami” definíciója.

Bijektív alapelv: A definíció

Definíció

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a φ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk φ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk φ leképezés *ráképezés*, idegen szóval szürjekció.

• Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az A és B halmazok közt ha injektív és szüjektív is, idegen szóval *bijektív*. Azaz a leképzések párbállító tulajdonságának egy másik neve a bijekció. Nyelvet tanultunk, a matematika nyelvét.

Bijektív alapelv: Újraformalizálás

HA az A és B halmazok között létezik bijekció,
AKKOR $|A| = |B|$, a két halmaz azonos elemszámú.

Jelölés

Ha A és B halmazok párbaállíthatók, azaz van köztük bijekció, akkor azt írjuk, hogy

$$A \sim B.$$

Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először φ-t, majd ψ-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az x helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így x-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a φ függvény által felvett értékeken ψ értelmezett.

- Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$.

- Ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$, ahol A, B, C három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes. Az amikor először φ-t, majd ψ-t alkalmazzuk. Azaz ekkor $\psi \circ \varphi$ egy jól definiált leképezés.

Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik A-n, a másik B-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez h-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a H-n értelmezett *identitás* függvény, jele id_H.
- Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is identitás. DE $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \mathrm{id}_B$.
- Ha két függvénynek ilyen viszonya van, akkor azt mondjuk, hogy egymás inverzei.

Definíció

$\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$ leképzések egymás inverzei, ha $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$.

Bijekciók: Az alaptétel

• A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

Tétel

$\varphi : A \to B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképzés.

• Két halmaz között leírt leképzésről gyakran úgy a legegyszerűbb belátni, hogy bijekció, hogy megadjuk inverzét. Azaz leírjuk, hogy x párja ismeretében, hogyan mondható meg, hogy mely x elemről van szó.

Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

- Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható.

- Egy „rejtvénytípust” definiálunk. A rejtvényben adott B egy tetszőleges eleme.

- A rejtvényt egy játékos fejti, aki számára ϕ ismert, azaz tudja, hogyan, milyen szabály szerint kell egy A-beli elemhez a képét hozzárendelni. A játékosnak azt kell kitalálnia, hogy mely A-beli elem képe b.

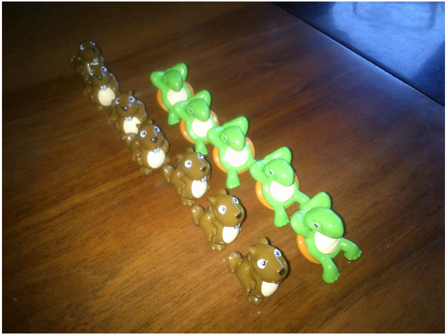
- Ha ez a rejtvénytípus olyan, hogy minden esetben van megoldása és az egyértelmű, az pontosan azt jelenti, hogy ϕ párbaállító leképezés.

Egy kérdés

- Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az A és B halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés.

Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképzésünk egy-egyértelmű (ráképezést nem tudjuk)?

- Az alábbi képen két fajta Kinder játékokat raktunk egymás mellé.



Egy kérdés: A válasz

• A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök T halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok M halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

Tétel

Legyenek A és B véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.

• A figyelmes hallgató észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek. Mi is ez? Miért is van szükségünk erre a feltételre?

A válasz-Tétel feltételei

- Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

- Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

- A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

- Ennek ellenére a negatív egészékhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon pár nélküli pozitív egész. Például ha x párja $-x+1$, akkor a negatív számok egyikének sem lesz párja az 1. Ha pedig az x negatív egész párjának $-2x$-et nevezzük ki, akkor minden páratlan pozitív egész olyan lesz, mint a korábbi képünkön az utolsó két mókus.

Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.

- Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

- Akkor jó lenne tisztázni, hogy mik a véges halmazok?

- Néhány példa véges halmazra:

$$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \ldots$$

Véges halmazok

Jelölés: Standard véges halmazok

Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges természetes szám. Legyen

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$, $[9] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Definíció

Egy H halmaz véges, ha elemei párba állíthatók egy standard véges halmaz elemeivel.

Vissza az óvodába

• Azt is mondhatjuk, hogy egy H halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

• A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt. Azaz bijekciót létesítettünk ujjaink és egy standard véges halmaz között. Ismét egy óvodás tanulmányt formalizáltunk a matematika nyelvén.

Elemszám

Definíció

Ha H elemei és $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy H egy n elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

Lemma

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért? Indirekten bizonyítunk. Felthetjük, hogy $n < m$. Miért? Tudjuk, hogy létezik $\varphi : [n] \to [m]$ bijekció. Ez ellentmond a skatulyaelvnek.

Szünet

Összegzési alapelv

- Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

- A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv. Számoljuk meg az áfonyát: 5 darab. Ribizli: 4 darab, fekete ribizli: 3 darab. Összesen $5 + 4 + 3$ erdei gyümölcs van a képen.

Összegzési alapelv (folytatás)

- A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

- Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

Definíció

Két halmazra azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs közös elemük.

Ha több halmazunk van úgy, hogy mindegyik elemük csak egyetlen egyhez tartozik hozzá, azaz bármelyik kettő diszjunkt, akkor azt mondjuk, hogy halmazaink *páronként diszjunktak*

Összegzési alapelv: Formalizmus

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

• Formulával:

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunktak, akkor $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| \ldots + |A_k|$.

• Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor összeszámolandó elemeinket két (A és B) közös elem nélküli halmazba osztjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

• Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján az összeadás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

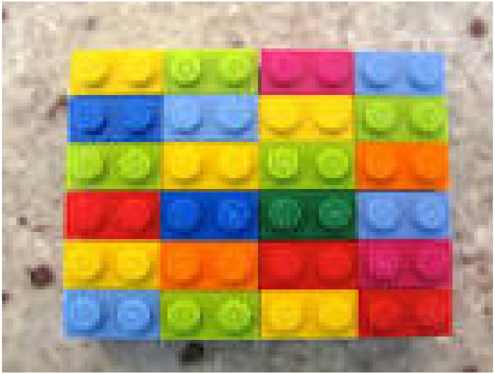
- Hányat is? Az első sorban négy, a másodikban is, a harmadikban is. Összesen $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le.
- Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet.
- A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó. Hasonlóan, ha csak a helyet írjuk le, nem tudjuk melyik muffinról is beszélünk. Ezek csak egy „komponensek” az összeszámolandó objektumok leírásában.

Szorzási alapelv (folytatás)

- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?



- 6 sor mindegyikében 4 pozíció. A (sor, pozíció) párokra a lehetőségek száma $6 \cdot 4 = 24$, ami a szükséges/látott lego darabok száma .

Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

- Hány hallgató számára van ülőhely a teremben? A válasz nyilvánvaló: $4 \cdot 10 = 40$.

Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga kollégiumi szobájának ablákából kinézve az alábbi képet látja:

- Hány ablakot lát? A ház öt szintes és mindegyiken nyolc ablak van (egy kicsi és hét nagy). Összesen $5 \cdot 8 = 40$ ablakot lát Olga, ha kinéz az ablakán.

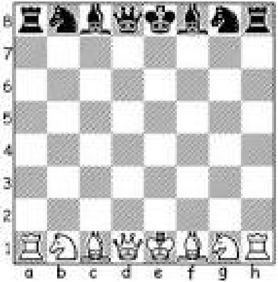
Szorzási alapelv (folytatás)

- Hány mező van a sakktáblán?

- A mezők 8 sorba és 8 oszlopba vannak rendezve. A mezők pontosan azonosíthatók, ha megadjuk melyik sorban és melyik oszlopban van a leírandó mezőnk.

Szorzási alapelv (folytatás)

- A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva a, b, c, d, e, f, g, h „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:



- Egy mező például az $a1$: az első mező a legalsó sorban. Vagy $e3$: az ötödik mező az alúlról számított harmadik sorban.

- A mezők ugyanannyian vannak mint a betű-szám párok, ahol a betű az angol ábécé első nyolc betűje köül kerül ki és a szám a pozitív egészek első nyolc elemének egyike.

Szorzási alapelv: Jelölés

• Az ilyen párok halmaza a kétféle lehetőséget adó halmazok Descartes-szorzata, vagy egyszerűen (halmazelméleti) szorzata.

• A fenti „koordináta-rendszer" párjai az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazt alkotják. Ahogy a sík geometria koordináta párjainak halmazára a jelölés $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, röviden $\mathbb{R}^2$.

Definíció

A és B halmazok Descartes szorzata $A \times B$ pontosan az (a, b) párokat tartalmazza, ahola $a \in A$ és $b \in B$ tetszőleges elemek.

Szorzási alapelv

- A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében. Például három tényezős Descartes-szorzat hármasokat, három hosszú koordinátasorokat tartalmaz, ahol a megfelelő koordináták a megfelelő halmazból jönnek.

Definíció

Az A_1, A_2, ..., A_k halmazok $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ Descartes-szorzata $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ elem k-asokat tartalmaz, ahol az i-edik elem/koordináta/komponens az i-edik halmazból kerül ki, azaz $a_i \in A_i$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ indexre.

Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

- Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámolandó objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság). Mindegyik egymástól függetlenül három értéket vehet fel. A válasz $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

> Halmazok szorzatának elemszáma
> a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

- Formulával:

> Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok esetén
> $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$

- Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor két (A és B) tényezőnk van:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

- Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján a szorzás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

- Az összegzási alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat A-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja A_i, ahol az i értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. Szerepelt egy összeg is, amely általános tagja az $|A_i|$ elemszám, ahol az i értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”.

- A középiskolai $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k / \ |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$ jelölésből ki kell találni a sémát, az általános tagot és az indexek futását.

Jelölések (folytatás)

- Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|, \quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

- A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k / \ |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

$$\prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i, \quad \prod_{i=1}^{k} A_i, \quad \prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|, \quad \prod_{i=1}^{k} |A_i|.$$

- Σ az összeg/szumma görög nevének kezdőbetűje. Π a szorzat/produktum görög nevének kezdőbetűje.

Szünet

Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

• Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen. Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak?

• Ez az egyszerű kérdés nem állít komoly feladat elé. Vesszük a „kedvenc" négy elemű halmazunkat, mondjuk a $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazt.

• Ennek részhalmazai:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Az alapkérdés (folytatás)

• A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk: Először az üres halmazt (az egyetlen 0 elemszámú részhalmazt) írtuk le, majd az egy elemű részhalmazokat, amelyeket a két eleműek, majd a három és végül a négy eleműek követtek. Az azonos elemszámú részhalmazok közül a 1-et tartalmazókkal kezdtünk, ezek sorrendejét a a második legkisebb (ha azok is megegyeztek akkor a harmadik legkisebb) elemek határozták meg: amelyik részhalmaznál kisebb volt értéke az került előbbre.

• Ez a rendező elv nemcsak munkánk megszervezésében volt segítségünkre. Ez adott alapot arra, hogy meggyőződéssel állíthassuk listánk teljes és minden részhalmazt egyszer sorol fel. Tehát a kérdésre a válasz az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak tizenhat részhalmaza van.

Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk.

- Vehettük volna a

$$\{\text{tavasz}, \text{nyár}, \text{ősz}, \text{tél}\},$$

vagy

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

halmazt, illetve sok más négy elemű halmazt.

- Mindig ugyanazt az eredményt kaptuk volna? Jól van kitűzve alapkérdésünk?

A Tétel

• Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni? Hogy tudjuk a következő tételt igazolni?

Tétel

Legyen A és B két azonos elemszámú, azaz párba állítható halmaz. Ekkor részhalmazai által alkotott $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ halmazok is azonos elemszámúak, azaz párbaállíthatók.

Formálisan

$$A \sim B \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B).$$

A Bizonyítás

- Legyen ψ egy párbaállító leképezés A és B között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, ϕ-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok B egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá R-hez.
- Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$.
- Belátjuk, hogy az így leírt ϕ leképézés párbaállító leképezés.
- Valóban ha $S \in \mathcal{P}(B)$ adott, akkor az a fejtőrő, hogy „melyik A-beli részhalmaz párja S?” egyértelműen megoldható.
- Össze kell gyűjteni az S-beli elemek ϕ inverzénél vett képeit. Igazából ez a szabály megadja a ψ inverzét.

Részhalmazok kódolása

- Egy H véges/n elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

- $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden i-re ($i = 1, 2, \ldots, n$) megadjuk, hogy a h_i elem benne van-e vagy nem. Egy h_i-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége”, egy bit információ.

- Egy bit információ lehetséges értékeit általában $0/1$ értékekkel kódolják. Esetünkben a h_i-hez tartalmazó k_i információ legyen 1, ha $h_i \in R$ és legyen 0, ha $h_i \notin R$.

- Formulával

$$k_i = \begin{cases} 0, & h_i \notin R \\ 1, & h_i \in R. \end{cases}$$

- Egy $H \to \{0, 1\}$ függvénnyel írtuk le a részhalmazt.

Karakterisztikus függvény

Példa

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
0	0	1	0	1	1

függvény a $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazát írja le.

- A fenti függvény az R részhalmaz (H feletti) karakterisztikus függvénye. Jelölése $\chi_R(x) : H \to \{0, 1\}$.

Karakterisztikus vektor

• Ha a H halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy n hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
• Egy az R részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

Példa (folytatás)

Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

• Az tudja a részhalmazt kiolvasni/dekódolni, aki tudja, hogy a második komponens/a második bit a $h_2 \notin H$-re vonatkozó információ (és így tovább).
• H egy n elemű halmaz volt, így részhalmazainak karakterisztikus vektorai n hosszú bitsorozatok, azaz $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}$ egy eleme, ahol n darab $\{0,1\}$ tényező van. Ezen Descartes-szozat rövid jelölése $\{0,1\}^n$.

Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.
- A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény" (adott $v \in \{0,1\}^n$ vektorhoz keressünk R részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus vektora) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{0,1\}^n$ halmaz között $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.
- Első alapelvünk alapján $\mathcal{P}(H)$ és $\{0,1\}^n$ elemszáma ugyanaz (párbaállítottak mint a sétáló óvodások).
- A szorzási alapelv alapján $\{0,1\}^n$ elemszáma

$$|\{0,1\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot \ldots \cdot |\{0,1\}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

A következő tételt kaptuk.

Tétel

Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Megjegyzések

• A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott n tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett. „Minden tárgy esetén el kell dönteni, hogy kiválasszuk vagy nem. Az n döntés mindegyikére két lehetőségünk van és a válaszaink függetlenek. A válasz $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. "

• A középiskolás érvelés minden szava fontos. Az egyetemi érvelés expliciten hívatkozik azokra az elvekre, amik a bizonyítász „mozgatják".

• A következő feladat talán tisztázzá a formalizmus előnyét.

Páros elemszámú részhalmazok száma

Feladat

Adott egy n elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

- Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. n fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?

- Most is n döntést kell meghozniuk. Mindegyik két kimenetelű: az adott gyümölcsöt elviszik vagy nem. Mégse 2^n a válasz.

- Miért?

Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.
- Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg. Ezek a csomagolás feltételét nem ronthatják el.
- Az utolsó döntés azonban „kényszerített”. Pontosan az egyik kimenetel lesz jó arra, hogy a páros nagyságú gyümölcs-csomagot kialakítsa.
- A fenti érvelés alapján a válasz 2^{n-1}.

Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés

- A fentiekkel analóg egyetemi érvelésben egy $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$ leképezést definiálunk, ahol $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ a H halmaz páros elemszámú részhalmazait összegyűjtő halmaz.
- Egy $R \in \mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ halmazhoz, azaz H egy páros elemszámú R részhalmazához hozzárendeljük $H \setminus \{h_n\}$-nak $R \setminus \{h_n\}$ részhalmazának karakterisztikus vektorát.
- Ez a hozzárendelés bijekció, azaz a megfelelő rejtvény egyértelműen megoldható: Adott $n-1$ hosszú bitsorozatból kell kiolvasni egy páros elemszámú részhalmazt.

Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg h_n-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.

- A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze. Ezen inverz léte igazolja a definiált függvény bijektív mivoltát.

- Az értelmezési tartomány és értékkészlet azonos elemszámú. Az értékkészlet a szorzási alapelv alapján 2^{n-1} elemű. Így a feltett kérdésre a válasz 2^{n-1}.

Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.

- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók. Majd algebrai átalakításokkal manimulálhatók. Máskor teljes indukcióval támadható egy bizonyítandó kombinatorikus állítás.

- Gyakran kombinatorikus azonosságok bal és jobb oldala egy-egy halmaz elemszáma, így a bizonyítandó két halmaz elemszámának azonosságát állítja. A kombinatorikus gondolkozáshoz az áll legközelebb, hogy ezt kombinatorikus alapelvek alapján igazoljuk.

- A kombinatorikus alapelvek felismerése tudásunkat biztosabbá teszi.

Kombinatorikus érvelések: Mikor adunk össze, mikor szorzunk?

- Ha látjuk, hogy az összeszámolandó objektumokat csoportosítjuk, a csoportokat külön-külön megszámoljuk, akkor a „részeredmények” mögött összeszámolandó objektumok vannak. A teljes szám a részeredmények összege lesz (amennyiben csoportjaink diszjunktak).

- Ha az összeszámolandó objetumokat komponensekre bontjuk és a komponensekre adódó lehetőségeket számoljuk ki, akkor a részeredmények mögött nem objektumok állnak, hanem ezeknek csak „töredékei”. Ezekből a „töredékekből” áll össze egy objektum. Ha a különböző töredékek szabadon összerakhatók, azaz a töredékek választásai függetlenek (azaz az objektumok halmaza egy Descartes-szorzat), akkor a részeredmények szorzata adja meg a választ.

Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a H halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.

- A kombinatorikus alapelvekre támaszkodó bizonyítások a lényeget mutatják meg. Látjuk mi miatt igaz az állítás.

- Gyakran a megoldás módszerét átlátva nem merül fel a kérdés: „Hogyan találta ezt ki valaki?" Gyakran mi magunk is kitalálhatunk hasonló érveléssel belátható új azonosságokat.

Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

- A kérdést már megválaszoltuk, tudjuk a választ. Ennek ellenére kezdjük el más vonalon gondolkozni.

Definíció

Legyen r_n egy n-elemű halmaz részhalmazainak száma.

- Listázással könnyen látható, hogy

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 8, \quad r_4 = 16.$$

- A „séma" jól látható. Ahogy eggyel megnöveljük az alaphalmaz méretét a részhalmazok száma megduplázódik.

Egy új érvelés

Tétel

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_{n+1} = 2r_n.$$

- A bizonyítás egyszerű:

$$\mathcal{P}([n+1]) = \{R \subset [n+1] : n+1 \notin R\} \dot\cup \{R \subset [n+1] : n+1 \in R\}.$$

Az unió mindkét tagja párbaállítható $\mathcal{P}([n])$ elemeivel.

- A fenti tétel eredménye és az $r_0 = 1$ információ egyértelműen leírja a sorozatot.

Tétel

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_n = 2^n.$$

Szünet

Miért működik a matematika?

• A matematika ellentmondásmentességét nem említjük, de jó tudni, hogy az alábbi nyilvánvaló alapelv ennek egy következménye.

HA egy kérdést két módon is, logikailag helyesen válaszolunk meg, AKKOR a két válasz megegyezik.

Egy példakérdés

Példakérdés

Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? (Az összeadás kommutativitása, asszociativitása miatt a kérdésnek van értelme.)

- A válaszra egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük.
- Egy másik megoldás, hogy mindegyik oszlopban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/oszlopösszegeket összegezzük.
- Nyilván mindkét eredmény az összes szám összegét adja ki. Azaz egy táblázatban a sorösszegek összege megegyezik az oszlopösszegek összegével.

A példakérdés formálisan

- Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban (n darab sor és k darab oszlop) az i-edik sorban és j-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

- Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető.
- Az ártatlannak tűnő megállapítás meglepően mély állításokat igazol.
- Egy speciális esete a fentieknek, amikor egy összeszámlálási feladatot kétféleképpen oldunk meg. A két eredménynek ugyanannak kell lennie. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy *kettős összeszámlálást* végzünk.

Példafeladat

Feladat

Vegyük az $1, 2, \ldots, n$ számok összes/n! darab sorbaállítását. Mindegyik esetén számoljuk meg, hány olyan i elem van, amely az i-edik helyen áll (azaz $\pi(i) = i$, az ilyen elemeket a π sorbaállítás fixpontjainak nevezzük). Azaz minden sorbaállításhoz vegyük fixpontjainak számát. Igazoljuk, hogy az átlagos fixpont-szám éppen 1.

Példa

Az $1, 2, 3$ számoknak $3! = 6$ sorbállítása van: 123, 132, 213, 231, 312, 321. A fixpontok száma rendre: 3, 1, 1, 0, 0, 1. Az átlag valóban éppen $(3 + 1 + 1 + 1)/6 = 1$.

Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az π sorbaállításnak megfelelő sor és az i elem oszlopának találkozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz i fixpont. Különben álljon 0.

- Mennyi a táblázatban szereplő számok összege? Másképpen: Hány olyan (π, i) pár van, amelyre $\pi(i) = i$?

- Minden sorban a megfelelő sorbaállítás fixpontjainak számát adja az összegzés. A sorösszegek összege éppen az összes fixpontszám, az átlagos fixpontszám $n!$-szorosa.

Példafeladat: Megoldás (folytatás)

• Az első oszlop elemeit összegezve azokat a π sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$.

• Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi/$n-1$ darab elemet ennyiféleképpen álíthatjuk sorba.

• Ugyanez az összeg lesz az öszes többi oszlopban is. Így az oszlopösszegek összege $n \cdot (n-1)! = n!$.

• A két eredmény összevetéséből adódik az állítás.

Szünet

Közepek

- Adott n valós szám $v: v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek". A számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy számaink pozitívak. A mértani közép

$$G(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n},$$

a harmonikus közép

$$H(v) = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}},$$

négyzetes közép

$$Q(v) = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}}.$$

Az alaptétel

Alaptétel

Pozitív v_i számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.
- Egy speciális részét kiemelem:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

- Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke. Igazolása például indirekten történhet.
- Tegyük fel, hogy $A(v) \leq \max(v)$ nem teljesül, azaz mindegyik v_i kisebb mint $A(v)$. Az így kapott n egyenlőtlenség összege ellentmondás (azonos irányban álló szigorú egyenlőtlenségek összegezhetők).

A skatulyaelv: Előkészületek

• A kombinatorikában a következő speciális eset nagyon fontos lesz.

• Adott t tárgyunk és s skatulyánk. A t tárgyat osszuk szét a skatulyák között.

• Az i-edik skatulyába került tárgyak száma legyen v_i. (Tehát v_i egy 0 és t közötti egész szám. Ha $v_i = 0$, akkor egy tárgyat se raktunk az i-edik skatulyába. Ha $v_i = t$, akkor mindegyik tárgyat az i-edik skatulyába raktuk.)

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_s}{s} = \frac{t}{s},$$

az átlagos skatulya-terheltség.

A Skatulyaelv

- A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

HA t tárgyat s skatulyába osztunk szét,
AKKOR lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{t}{s}$ tárgy esik,
és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{t}{s}$ tárgy esik.

- A skatulya-elv fenti nagyon általános megfogalmazását gyakran speciális esetekben alkalmazzuk.
- Érdemes néhány speciális esetet külön megfogalmazni.

Skatulyaelv: Speciális esetek

Tétel

Ha $n+1$ tárgyat n skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.

Tétel

Ha $\ell n+1$ tárgyat n skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amelybe legalább $\ell+1$ tárgyat is tartalmaz.

Tétel

Ha $n-1$ tárgyat n skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely üres marad.

Az állításaink megint „triviálisak". Mégis ügyes alkalmazással mély/nehéz eredményeket lehet elérni.

Dirichlet egy tétele

Dirichlet-tétel

Legyen α irracionális szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok p, q egész szám, amelyekre

$$|p\alpha - q| < \frac{1}{p}, \text{ azaz } \left|\alpha - \frac{q}{p}\right| \leq \frac{1}{p^2}.$$

Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen N egy tetszőleges pozitív egész.
- Vegyük az $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{(N-1) \cdot \alpha\}, \{N \cdot \alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0, 1]$ intervallumban.
- Ekkor N különböző(!) számot kapunk a $(0, 1) =]0, 1[$ intervallumban (miért?).
- Ezek balról jobbra tekintve (ez nem szükségszerűen ugyanaz a sorrend mint ahogy kezdetben felsoroltuk őket) az intervallumunkat $N + 1$ részszakaszra osztják.
- Az átlagos hossza a szakaszoknak $\frac{1}{N+1}$. Így lesz olyan két egymásutáni pont/szám amely legfeljebb $\frac{1}{N+1}$ közel van egymáshoz.
- Azaz
$$0 < \{k_1 \cdot \alpha\} - \{k_2 \cdot \alpha\} \leq \frac{1}{N+1},$$
(esetleg $0 < 1 - \{k_2 \cdot \alpha\} \leq 1/(N+1)$).

Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas ℓ_1, ℓ_2 egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

- Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$. Ekkor nyilván $p \neq 0$ és $|p| \leq N$.
- Speciálisan

$$0 < p \cdot \alpha - q \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{|p|}.$$

- Azaz találtunk egy jó (p, q) párt (másikat mint a triviális $(0, 0)$).

Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő (p, q) párhoz egy tetszőleges N pozitív egész választásan alapult.
- Ha már találtunk valahány jó (p, q) párt, akkor vegyük

$$\delta(p, q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát.

- Válasszunk olyan N-et, hogy ennél a minimumnál kisebb legyen $\frac{1}{N+1}$.
- A fenti eljárást ezzel a N-nel megismételve biztos újabb (eddig meg nem talált) (p, q) párt találunk. (Miért?)
- Ez igazolja az állítást.

Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha n skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb n tárgy helyezhető el.
- Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást: Egy legfeljebb n területű alakzatba 1 területű alakzatokat helyezünk átfedés nélkül. Ekkor legfeljebb n „számára van hely”.
- Ezekután természetes kimondani a következő tételt:

Tétel

Egy adott A területű alakzatba $A_1, A_2, \ldots, A_k$ területű alakzatokat pakolunk. Ha $A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \ell \cdot A$, akkor bárhogy végezzük is a pakolást, lesz olyan pont alakzatunkban, amelyet legalább $\ell + 1$ bepakolt alakzat lefed.

Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

- A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása csak nagyon speciális esetekben történik meg a középiskolában. Legtöbb speciális esetben alakzataink „szépek”. Például körök, háromszögek, téglalapok.

- Ekkor a fenti tétel/elv középiskolás szemmel is jól érthető és nyilvánvaló.

- Geometriai eredmények nyerhetők kombinatorikus gondolatokkal.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!