Gráfok színezése

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021. tavasz

A színezés fogalma

A színezés fogalma

- Gráfok csúcsai és élei is színezhetők. Mi most csak csúcs-színezésekkel foglalkozunk.

Definíció

Egy csúcs-színezés a gráf csúcsaihoz rendel színeket, azaz egy

$$c : V(G) \to P,$$

függvény, ahol P egy színhalmaz/paletta.

A színezés fogalma

- Gráfok csúcsai és élei is színezhetők. Mi most csak csúcs-színezésekkel foglalkozunk.

Definíció

Egy csúcs-színezés a gráf csúcsaihoz rendel színeket, azaz egy

$$c : V(G) \to P,$$

függvény, ahol P egy színhalmaz/paletta.

- P lehet $\{\text{piros}, \text{kék}\}$ (ekkor vagy más két elemű paletta esetén 2-színezésről beszélünk).

A színezés fogalma

- Gráfok csúcsai és élei is színezhetők. Mi most csak csúcs-színezésekkel foglalkozunk.

Definíció

Egy csúcs-színezés a gráf csúcsaihoz rendel színeket, azaz egy

$$c : V(G) \to P,$$

függvény, ahol P egy színhalmaz/paletta.

- P lehet $\{\text{piros}, \text{kék}\}$ (ekkor vagy más két elemű paletta esetén 2-színezésről beszélünk).
- Általában k-színezés azt jelenti, hogy színeink k elemű palettából kerülnek ki.

A színezés fogalma

- Gráfok csúcsai és élei is színezhetők. Mi most csak csúcs-színezésekkel foglalkozunk.

Definíció

Egy csúcs-színezés a gráf csúcsaihoz rendel színeket, azaz egy

$$c : V(G) \to P,$$

függvény, ahol P egy színhalmaz/paletta.

- P lehet $\{\text{piros}, \text{kék}\}$ (ekkor vagy más két elemű paletta esetén 2-színezésről beszélünk).
- Általában k-színezés azt jelenti, hogy színeink k elemű palettából kerülnek ki.
- Gyakori a $P = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ választás.

A jószínezés fogalma

A jószínezés fogalma

Definíció

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$.

A jószínezés fogalma

Definíció

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$.

• Ha gráfunkban van hurokél, akkor az erre vonatkozó feltétel szerint két végpontja különböző színt kell hogy kapjon.

A jószínezés fogalma

Definíció

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$.

- Ha gráfunkban van hurokél, akkor az erre vonatkozó feltétel szerint két végpontja különböző színt kell hogy kapjon. De két végpontja ugyanazon csúcs, azaz a feltétel nem teljesíthető, nincs jó színezése gráfunknak.

A jószínezés fogalma

Definíció

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$.

• Ha gráfunkban van hurokél, akkor az erre vonatkozó feltétel szerint két végpontja különböző színt kell hogy kapjon. De két végpontja ugyanazon csúcs, azaz a feltétel nem teljesíthető, nincs jó színezése gráfunknak.

• Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden csúcsnak különböző színt adva egy jó színezéshez jtunk.

A jószínezés fogalma

Definíció

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$.

• Ha gráfunkban van hurokél, akkor az erre vonatkozó feltétel szerint két végpontja különböző színt kell hogy kapjon. De két végpontja ugyanazon csúcs, azaz a feltétel nem teljesíthető, nincs jó színezése gráfunknak.

• Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden csúcsnak különböző színt adva egy jó színezéshez jtunk.

Megállapodás

A továbbiakban gráf színezésről beszélve mindig jó csúcs-színezésre gondolunk és feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.

A jószínezés fogalma

Definíció

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$.

• Ha gráfunkban van hurokél, akkor az erre vonatkozó feltétel szerint két végpontja különböző színt kell hogy kapjon. De két végpontja ugyanazon csúcs, azaz a feltétel nem teljesíthető, nincs jó színezése gráfunknak.

• Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden csúcsnak különböző színt adva egy jó színezéshez jtunk.

Megállapodás

A továbbiakban gráf színezésről beszélve mindig jó csúcs-színezésre gondolunk és feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.

A hurokélek és párhuzamos élek kizárása természetes.

Optimalizálás

Definíció

$$\chi(G) = \min\{|P| : \ G \text{ jól színezhető a } P \text{ palettával}\},$$

a G gráf kromatikus száma (χ olvasata „khí”).

Optimalizálás

Definíció

$$\chi(G) = \min\{|P| : \ G \text{ jól színezhető a } P \text{ palettával}\},$$

a G gráf kromatikus száma (χ olvasata „khí”).

- Nyilván

$$1 \leq \chi(G) \leq |V(G)|.$$

Optimalizálás

Definíció

$$\chi(G) = \min\{|P| : \ G \text{ jól színezhető a } P \text{ palettával}\},$$

a G gráf kromatikus száma (χ olvasata „khí”).

- Nyilván
$$1 \leq \chi(G) \leq |V(G)|.$$
- $\chi(G) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha G-nek nincs éle ($E(G) = \emptyset$).

Optimalizálás

Definíció

$$\chi(G) = \min\{|P| : \ G \text{ jól színezhető a } P \text{ palettával}\},$$

a G gráf kromatikus száma (χ olvasata „khí”).

- Nyilván
$$1 \leq \chi(G) \leq |V(G)|.$$
- $\chi(G) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha G-nek nincs éle ($E(G) = \emptyset$).
- $\chi(G) = |V(G)|$ akkor és csak akkor teljesül, ha G teljes gráf ($E(G) = \binom{|V(G)|}{2}$).

Példák

Példák

Példa: C_n az n pontú körgráf ($n \geq 3$).

Példák

Példa: C_n az n pontú körgráf ($n \geq 3$).

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ páros,} \\ 3, & \text{if } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példák

Példa: C_n az n pontú körgráf ($n \geq 3$).

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ páros,} \\ 3, & \text{if } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa: H_3 a kockagráf (8 csúcs, 12 él).

Példák

Példa: C_n az n pontú körgráf ($n \geq 3$).

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ páros,} \\ 3, & \text{if } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa: H_3 a kockagráf (8 csúcs, 12 él).

$$\chi(H_3) = 2.$$

Példák

Példa: C_n az n pontú körgráf ($n \geq 3$).

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ páros}, \\ 3, & \text{if } n \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Példa: H_3 a kockagráf (8 csúcs, 12 él).

$$\chi(H_3) = 2.$$

Példa: W_{n+1}, az $n+1$ csúcsú kerékgráf ($n \geq 3$).

Példák

Példa: C_n az n pontú körgráf ($n \geq 3$).

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ páros,} \\ 3, & \text{if } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa: H_3 a kockagráf (8 csúcs, 12 él).

$$\chi(H_3) = 2.$$

Példa: W_{n+1}, az $n+1$ csúcsú kerékgráf ($n \geq 3$).

$$\chi(W_{n+1}) = \begin{cases} 3, & \text{if } n \text{ páros,} \\ 4, & \text{if } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

További példák

További példák

Példa: T fa

További példák

Példa: T fa (nem üresgráf, azaz $|V| \geq 2$).

További példák

Példa: T fa (nem üresgráf, azaz $|V| \geq 2$).

$$\chi(T) = 2.$$

További példák

Példa: T fa (nem üresgráf, azaz $|V| \geq 2$).

$$\chi(T) = 2.$$

Építsük fel T-t ághajtásokkal. Építés közben színezzünk.

További példák

Példa: T fa (nem üresgráf, azaz $|V| \geq 2$).

$$\chi(T) = 2.$$

Építsük fel T-t ághajtásokkal. Építés közben színezzünk.

Példa: P Petersen-gráf.

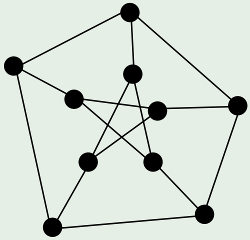
További példák

Példa: T fa (nem üresgráf, azaz $|V| \geq 2$).

$$\chi(T) = 2.$$

Építsük fel T-t ághajtásokkal. Építés közben színezzünk.

Példa: P Petersen-gráf.



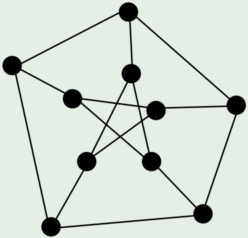
További példák

Példa: T fa (nem üresgráf, azaz $|V| \geq 2$).

$$\chi(T) = 2.$$

Építsük fel T-t ághajtásokkal. Építés közben színezzünk.

Példa: P Petersen-gráf.



$$\chi(P) = 3.$$

2-színezhető gráfok

2-színezhető gráfok

- Láttuk, hogy egy páratlan hosszú kör színezéséhez kell három szín.

2-színezhető gráfok

- Láttuk, hogy egy páratlan hosszú kör színezéséhez kell három szín.
- Természetesen, ha gráfunkban részgráfként ott van egy pártalan kör, akkor már ez megakadályozza, hogy két színnel jól színezhessünk.

2-színezhető gráfok

- Láttuk, hogy egy páratlan hosszú kör színezéséhez kell három szín.
- Természetesen, ha gráfunkban részgráfként ott van egy pártalan kör, akkor már ez megakadályozza, hogy két színnel jól színezhessünk.
- Nem is nyilvánvaló, hogy ez az észrevétel megfordítható.

2-színezhető gráfok

- Láttuk, hogy egy páratlan hosszú kör színezéséhez kell három szín.
- Természetesen, ha gráfunkban részgráfként ott van egy pártalan kör, akkor már ez megakadályozza, hogy két színnel jól színezhessünk.
- Nem is nyilvánvaló, hogy ez az észrevétel megfordítható.

Tétel

Egy gráf akkor és csak akkor színezhető ki jól két színnel, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Bizonyítás

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.
- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.

- A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”.

Bizonyítás

• Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

• A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

• Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

• Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.

• A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”. Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.
- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.
- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.
- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.
- A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”. Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott.
- Legyen $e = uv \in E(G) - E(T)$.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.

- A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”. Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

- Legyen $e = uv \in E(G) - E(T)$. T-ben van (egyetlen egy) uv út.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.

- A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”. Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

- Legyen $e = uv \in E(G) - E(T)$. T-ben van (egyetlen egy) uv út. Ezt e egy körré zárja be, amelyről tudjuk, hogy páros hosszú.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.
- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.
- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.
- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.
- A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”. Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott.
- Legyen $e = uv \in E(G) - E(T)$. T-ben van (egyetlen egy) uv út. Ezt e egy körré zárja be, amelyről tudjuk, hogy páros hosszú. Tehát a T-be eső uv út páratlan hosszú, ráadásul jól van színezve. A jó színezés két szín eseten az út menti szín-alternálást jelenti.

Bizonyítás

- Egy két színezhető gráfban nem lehet páratlan hosszú kör.

- A másik irány a problémás: páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

- Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt.

- Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája. T-nek van jó két színezése $c : V(G) \to \{\text{piros, kék}\}$.

- A probléma,hogy csak T éleire „ügyeltünk”. Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott.

- Legyen $e = uv \in E(G) - E(T)$. T-ben van (egyetlen egy) uv út. Ezt e egy körré zárja be, amelyről tudjuk, hogy páros hosszú. Tehát a T-be eső uv út páratlan hosszú, ráadásul jól van színezve. A jó színezés két szín eseten az út menti szín-alternálást jelenti. Páratlan út esetén u és v színének különbözősége könnyen adódik.

Páros gráfok

Páros gráfok

- Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen.

Páros gráfok

- Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen.
- Másrészt úgyis fogalmazhatunk, hogy minden köre páros legyen (ebbe belefér az is, hogy ne legyen köre).

Páros gráfok

- Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen.
- Másrészt úgyis fogalmazhatunk, hogy minden köre páros legyen (ebbe belefér az is, hogy ne legyen köre).
- A második jellemzés alapján az ilyen gráfokat páros gráfoknak nevezzük.

Páros gráfok

- Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen.

- Másrészt úgyis fogalmazhatunk, hogy minden köre páros legyen (ebbe belefér az is, hogy ne legyen köre).

- A második jellemzés alapján az ilyen gráfokat páros gráfoknak nevezzük.

- Az angol terminilógia „bipartite”, tükörfordítása kétrészes. Ez a szóhasználat inkább az első jellemzést követi.

Páros gráfok

- Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen.
- Másrészt úgyis fogalmazhatunk, hogy minden köre páros legyen (ebbe belefér az is, hogy ne legyen köre).
- A második jellemzés alapján az ilyen gráfokat páros gráfoknak nevezzük.
- Az angol terminilógia „bipartite”, tükörfordítása kétrészes. Ez a szóhasználat inkább az első jellemzést követi.

Definíció

G gráf páros, ha csúcsai A és F kategóriákba sorolhatók úgy, hogy minden él egyik végpontja A-beli, másik F-beli legyen.

Páros gráfok

- Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen.
- Másrészt úgyis fogalmazhatunk, hogy minden köre páros legyen (ebbe belefér az is, hogy ne legyen köre).
- A második jellemzés alapján az ilyen gráfokat páros gráfoknak nevezzük.
- Az angol terminilógia „bipartite”, tükörfordítása kétrészes. Ez a szóhasználat inkább az első jellemzést követi.

Definíció

G gráf páros, ha csúcsai A és F kategóriákba sorolhatók úgy, hogy minden él egyik végpontja A-beli, másik F-beli legyen.

- Speciálisan egy páros gráf nem tartalmazhat hurokélt.

3-színezhető gráfok

3-színezhető gráfok

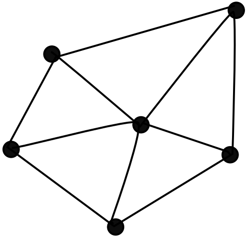
- Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget.

3-színezhető gráfok

- Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget.
- Ez az állítás azonban nem fordítható meg.

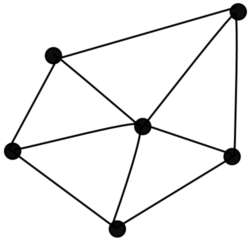
3-színezhető gráfok

- Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget.
- Ez az állítás azonban nem fordítható meg.



3-színezhető gráfok

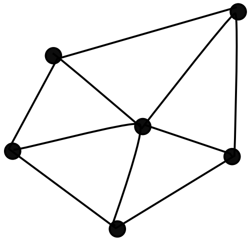
- Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget.
- Ez az állítás azonban nem fordítható meg.



- Nem is ismert a fenti tételhez hasonló, „szép” jelemzése a három színnel színezhető gráfoknak.

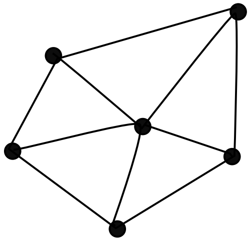
3-színezhető gráfok

- Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget.
- Ez az állítás azonban nem fordítható meg.



- Nem is ismert a fenti tételhez hasonló, „szép” jelemzése a három színnel színezhető gráfoknak. A szakértők azt sejtik, hogy ilyen nincs is. Persze egy ilyen állítás akkor válik matematikai sejtéssé, ha pontosan definiáljuk a benne szereplő fogalmakat.

- Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget.
- Ez az állítás azonban nem fordítható meg.



- Nem is ismert a fenti tételhez hasonló, „szép” jelemzése a három színnel színezhető gráfoknak. A szakértők azt sejtik, hogy ilyen nincs is. Persze egy ilyen állítás akkor válik matematikai sejtéssé, ha pontosan definiáljuk a benne szereplő fogalmakat. Ez messze meghaladja ezen kurzus kereteit.

Mohó színezés

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére.

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

(1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait: $\pi : v_1, v_2, \ldots . v_n$.

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

(1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait: $\pi : v_1, v_2, \ldots .v_n$. Ez lesz a csúcsok színezési sorrendje

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

(1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait: $\pi : v_1, v_2, \ldots . v_n$. Ez lesz a csúcsok színezési sorrendje

(2) Az i-edik színezési lépésben v_i-nek színt adunk ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

(1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait: $\pi : v_1, v_2, \ldots . v_n$. Ez lesz a csúcsok színezési sorrendje

(2) Az i-edik színezési lépésben v_i-nek színt adunk ($i = 1, 2, \ldots, n$). v_i színezésénél v_i korábbi (kisebb indexszel rendelkező) szomszédai már színt kaptak.

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

(1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait: $\pi : v_1, v_2, \ldots . v_n$. Ez lesz a csúcsok színezési sorrendje

(2) Az i-edik színezési lépésben v_i-nek színt adunk ($i = 1, 2, \ldots, n$). v_i színezésénél v_i korábbi (kisebb indexszel rendelkező) szomszédai már színt kaptak. Legyen T a színezett szomszédok színeinek halmaza, ezeket nem adhatjuk v_i színének (amennyiben a régi színeket megtartjuk).

Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

(1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait: $\pi : v_1, v_2, \ldots . v_n$. Ez lesz a csúcsok színezési sorrendje

(2) Az i-edik színezési lépésben v_i-nek színt adunk $(i = 1, 2, \ldots, n)$. v_i színezésénél v_i korábbi (kisebb indexszel rendelkező) szomszédai már színt kaptak. Legyen T a színezett szomszédok színeinek halmaza, ezeket nem adhatjuk v_i színének (amennyiben a régi színeket megtartjuk). Legyen v_i színe $P - T$ (nem tiltott színek halmazának) első/legkisebb eleme.

A mohó színezés színigénye

A mohó színezés színigénye

Jelölés

Legyen $\chi_{\text{mohó},\pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

A mohó színezés színigénye

Jelölés

Legyen $\chi_{\text{mohó},\pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

Példa

Az alábbiakban egy fát láthatunk (tehát kromatikus száma 2).

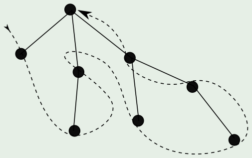
A mohó színezés színigénye

Jelölés

Legyen $\chi_{\text{mohó},\pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

Példa

Az alábbiakban egy fát láthatunk (tehát kromatikus száma 2).



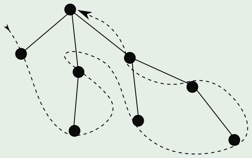
A mohó színezés színigénye

Jelölés

Legyen $\chi_{\text{mohó},\pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

Példa

Az alábbiakban egy fát láthatunk (tehát kromatikus száma 2).



A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat.

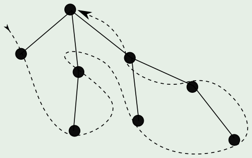
A mohó színezés színigénye

Jelölés

Legyen $\chi_{\text{mohó},\pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

Példa

Az alábbiakban egy fát láthatunk (tehát kromatikus száma 2).



A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat. Ezt követve végezzük el mohó színezést.

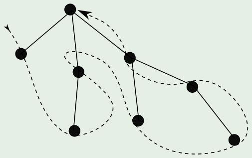
A mohó színezés színigénye

Jelölés

Legyen $\chi_{\text{mohó},\pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

Példa

Az alábbiakban egy fát láthatunk (tehát kromatikus száma 2).



A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat. Ezt követve végezzük el mohó színezést. Hány színre volt szükségünk?

A mohó színezés színigénye II.

A mohó színezés színigénye II.

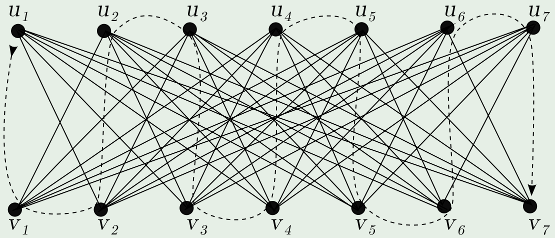
Példa

Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, \ldots\}$ csúcshalmazon.

A mohó színezés színigénye II.

Példa

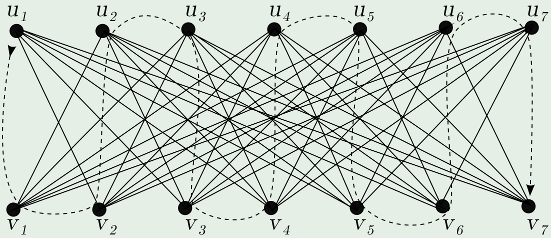
Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, \ldots\}$ csúcshalmazon.



A mohó színezés színigénye II.

Példa

Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, \ldots\}$ csúcshalmazon.

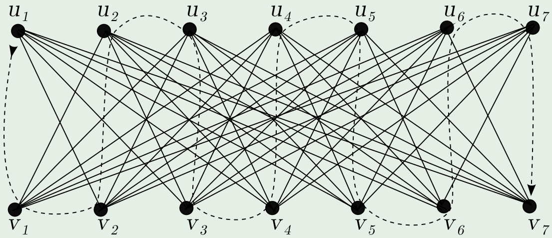


Egy u_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $i \neq j$.

A mohó színezés színigénye II.

Példa

Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, \ldots\}$ csúcshalmazon.

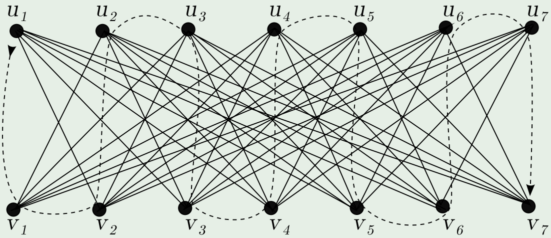


Egy u_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $i \neq j$. A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat (index szerint növekvő rendezés).

A mohó színezés színigénye II.

Példa

Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, \ldots\}$ csúcshalmazon.

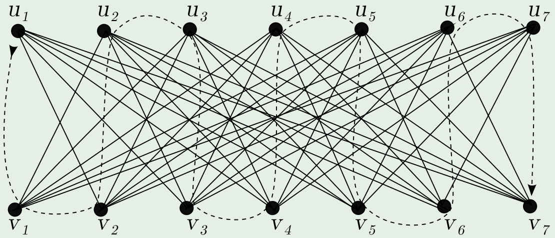


Egy u_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $i \neq j$. A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat (index szerint növekvő rendezés). Ezt követve végezzük el mohó színezést.

A mohó színezés színigénye II.

Példa

Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{v_1, v_2, \ldots\}$ csúcshalmazon.



Egy u_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $i \neq j$. A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat (index szerint növekvő rendezés). Ezt követve végezzük el mohó színezést.

Hány színre volt szükségünk?

A mohó színezés színigényére vonatkozó tétel

A mohó színezés színigényére vonatkozó tétel

Tétel

Tetszőleges π csúcs sorrend esetén

$$\chi_{\text{mohó},\pi}(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

A mohó színezés színigényére vonatkozó tétel

Tétel

Tetszőleges π csúcs sorrend esetén

$$\chi_{\text{mohó},\pi}(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G) = \max_{v \in V d(v)}$, a G gráf maximális fokszáma.

A mohó színezés színigényére vonatkozó tétel

Tétel

Tetszőleges π csúcs sorrend esetén

$$\chi_{\text{mohó},\pi}(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G) = \max_{v \in V d(v)}$, a G gráf maximális fokszáma.

• Minden színezési lépésnél egy csúcsnak a korábbi (már színezett) szomszédai által kapott színek lesznek tiltottak.

A mohó színezés színigényére vonatkozó tétel

Tétel

Tetszőleges π csúcs sorrend esetén

$$\chi_{\text{mohó},\pi}(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G) = \max_{v \in V d(v)}$, a G gráf maximális fokszáma.

- Minden színezési lépésnél egy csúcsnak a korábbi (már színezett) szomszédai által kapott színek lesznek tiltottak.
- A tiltott színek száma biztos nem haladja meg $\Delta(G)$-t.

A mohó színezés színigényére vonatkozó tétel

Tétel

Tetszőleges π csúcs sorrend esetén

$$\chi_{\text{mohó},\pi}(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G) = \max_{v \in V d(v)}$, a G gráf maximális fokszáma.

• Minden színezési lépésnél egy csúcsnak a korábbi (már színezett) szomszédai által kapott színek lesznek tiltottak.

• A tiltott színek száma biztos nem haladja meg $\Delta(G)$-t.

• Azaz a mohó algoritmus sose lép ki a $\{1, 2, \ldots, \Delta(G), \Delta(G) + 1\}$ színhalmazból.

Brooks tétele

Brooks tétele

- Megjegyezzük, hogy a teljes gráfok és a páratlan hosszú körök mutatják, hogy a tétel állítása éles.

Brooks tétele

- Megjegyezzük, hogy a teljes gráfok és a páratlan hosszú körök mutatják, hogy a tétel állítása éles.
- Bizonyítás nélkül megemlítjük az alábbi kicsinynek tűnő javítást, de távolról sem triviális tételt.

Brooks tétele

- Megjegyezzük, hogy a teljes gráfok és a páratlan hosszú körök mutatják, hogy a tétel állítása éles.

- Bizonyítás nélkül megemlítjük az alábbi kicsinynek tűnő javítást, de távolról sem triviális tételt.

Tétel (Brooks)

Legyen G egy összefüggő gráf, amely nem teljes és nem páratlan hosszú kör. Ekkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Szünet

Klikkek

Klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban gráfok színezésével.

Klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban gráfok színezésével.

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt *klikknek* nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

Klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban gráfok színezésével.

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt *klikknek* nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

- $\emptyset$ és az összes egy elemű csúcshalmaz klikk.

Klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban gráfok színezésével.

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt *klikknek* nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

• $\emptyset$ és az összes egy elemű csúcshalmaz klikk. Bármély nem-hurokél él két végpontja egy két-elemű klikket alkot.

Klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban gráfok színezésével.

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt *klikknek* nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

• $\emptyset$ és az összes egy elemű csúcshalmaz klikk. Bármély nem-hurokél él két végpontja egy két-elemű klikket alkot.

• Egy tetszőleges $c : V(G) \to P$ jó színezésnek tetszőleges K klikk csúcsait különbözőre kell színeznie.

Klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban gráfok színezésével.

Definíció

Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt *klikknek* nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

• $\emptyset$ és az összes egy elemű csúcshalmaz klikk. Bármély nem-hurokél él két végpontja egy két-elemű klikket alkot.

• Egy tetszőleges $c : V(G) \to P$ jó színezésnek tetszőleges K klikk csúcsait különbözőre kell színeznie.

Észrevétel

Speciálisan egy tetszőleges $c : V(G) \to P$ jó színezés és tetszőleges K klikk esetén

$$|P| \geq |K|.$$

Egy természetes kérdés

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.
- Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}.$$

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.
- Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}.$$

- A fenti egyenlőtlenség egy megfogalmazása: Ha gráfunkban van „nagy” klikk, akkor a jó színezéshez „sok” szín kell.

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.
- Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}.$$

- A fenti egyenlőtlenség egy megfogalmazása: Ha gráfunkban van „nagy” klikk, akkor a jó színezéshez „sok” szín kell.
- Fordítva igaz-e?

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.
- Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}.$$

- A fenti egyenlőtlenség egy megfogalmazása: Ha gráfunkban van „nagy” klikk, akkor a jó színezéshez „sok” szín kell.
- Fordítva igaz-e? Ha a kromatikus szám nagy, akkor lennie kell a gráfban nagy klikknek?

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.
- Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}.$$

- A fenti egyenlőtlenség egy megfogalmazása: Ha gráfunkban van „nagy” klikk, akkor a jó színezéshez „sok” szín kell.
- Fordítva igaz-e? Ha a kromatikus szám nagy, akkor lennie kell a gráfban nagy klikknek?
- Ha a kromatikus szám legalább 2, akkor lennie kell benne élnek, ami egy két-elemű klikket ad. Ezen triviális megjegyzésen túl a fenti kérdésként felvetett megfordítás NEM igaz.

Egy természetes kérdés

- Az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb kilkkre alkalmazzuk.
- Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}.$$

- A fenti egyenlőtlenség egy megfogalmazása: Ha gráfunkban van „nagy” klikk, akkor a jó színezéshez „sok” szín kell.
- Fordítva igaz-e? Ha a kromatikus szám nagy, akkor lennie kell a gráfban nagy klikknek?
- Ha a kromatikus szám legalább 2, akkor lennie kell benne élnek, ami egy két-elemű klikket ad. Ezen triviális megjegyzésen túl a fenti kérdésként felvetett megfordítás NEM igaz. NAGYON nem igaz.

A tétel

Tétel

Van olyan G_n gráfsorozat, hogy

(i) $\chi(G_n) \to \infty$, ha n tart a végtelenbe,

(ii) G_n-ben nincs háromszög, azaz három-elemű klikk, azaz $\omega(G_n) \leq 2$.

A tétel

Tétel

Van olyan G_n gráfsorozat, hogy

(i) $\chi(G_n) \to \infty$, ha n tart a végtelenbe,

(ii) G_n-ben nincs háromszög, azaz három-elemű klikk, azaz $\omega(G_n) \leq 2$.

- A bizonyítás konstruktív lesz.

A tétel

Tétel

Van olyan G_n gráfsorozat, hogy

(i) $\chi(G_n) \to \infty$, ha n tart a végtelenbe,

(ii) G_n-ben nincs háromszög, azaz három-elemű klikk, azaz $\omega(G_n) \leq 2$.

- A bizonyítás konstruktív lesz.

- Leírunk egy konkrét gráfsorozatot és ellenőrizzük a tételbeli tulajdonságukat.

A tétel

Tétel

Van olyan G_n gráfsorozat, hogy

(i) $\chi(G_n) \to \infty$, ha n tart a végtelenbe,

(ii) G_n-ben nincs háromszög, azaz három-elemű klikk, azaz $\omega(G_n) \leq 2$.

- A bizonyítás konstruktív lesz.
- Leírunk egy konkrét gráfsorozatot és ellenőrizzük a tételbeli tulajdonságukat.
- Több ilyen konstrukció is ismert. Kettőt ismertetünk.

I. Konstrukció (Mycielsky)

I. Konstrukció (Mycielsky)

- Rekurzív módon/indukció segítségével írunk le egy G_n gráfsorozatot.

I. Konstrukció (Mycielsky)

- Rekurzív módon/indukció segítségével írunk le egy G_n gráfsorozatot.
- G_2 legyen egy két pontú teljes gráf, amely kromatikus száma 2,

I. Konstrukció (Mycielsky)

- Rekurzív módon/indukció segítségével írunk le egy G_n gráfsorozatot.

- G_2 legyen egy két pontú teljes gráf, amely kromatikus száma 2, míg nem tartalmaz három elemű klikket (mivel nincs is három csúcsa).

I. Konstrukció (Mycielsky)

- Rekurzív módon/indukció segítségével írunk le egy G_n gráfsorozatot.
- G_2 legyen egy két pontú teljes gráf, amely kromatikus száma 2, míg nem tartalmaz három elemű klikket (mivel nincs is három csúcsa).
- Tegyük fel, hogy már definiáltuk G_{n-1}-et és ennek kromatikus száma $n-1$, továbbá nem tartalmaz három elemű klikket.

I. Konstrukció (Mycielsky)

- Rekurzív módon/indukció segítségével írunk le egy G_n gráfsorozatot.
- G_2 legyen egy két pontú teljes gráf, amely kromatikus száma 2, míg nem tartalmaz három elemű klikket (mivel nincs is három csúcsa).
- Tegyük fel, hogy már definiáltuk G_{n-1}-et és ennek kromatikus száma $n-1$, továbbá nem tartalmaz három elemű klikket.
- Ennek segítségével írunk le G_n gráfot, amely kromatikus száma eggyel nagyobb lesz (tehát értéke n), de továbbra sem tartalmaz háromszöget.

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért”.

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért”. A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért". A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért”. A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért”. A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

(i) G_{n-1} élei,

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért". A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

(i) G_{n-1} élei,

(ii) az új csúcsok között ne vezessen él,

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért". A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

(i) G_{n-1} élei,

(ii) az új csúcsok között ne vezessen él, de minden v' csúcsot kössünk össze a v csúcs szomszédaival,

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért". A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

(i) G_{n-1} élei,

(ii) az új csúcsok között ne vezessen él, de minden v' csúcsot kössünk össze a v csúcs szomszédaival,

(iii) z-t pontosan a v' új csúcsokkal kötünk össze.

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért". A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

(i) G_{n-1} élei,

(ii) az új csúcsok között ne vezessen él, de minden v' csúcsot kössünk össze a v csúcs szomszédaival,

(iii) z-t pontosan a v' új csúcsokkal kötünk össze.

Az így kapott gráf lesz G_n.

Mycielsky rekurzió

G_n csúcsai:

(i) vegyük $V(G_{n-1})$ elemeit,

(ii) minden $v \in V(G_{n-1})$ csúcs mellé vegyünk fel egy új v' „ikertestvért”. A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk.

(iii) végül adjunk eddigi csúcsainkhoz egy z zárócsúcsot.

G_n élei:

(i) G_{n-1} élei,

(ii) az új csúcsok között ne vezessen él, de minden v' csúcsot kössünk össze a v csúcs szomszédaival,

(iii) z-t pontosan a v' új csúcsokkal kötünk össze.

Az így kapott gráf lesz G_n.

Észrevétel

A G_n-re történő ugrás során nem keletkezhet háromszög.

A bizonyítás

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám.

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás:

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet.

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű.

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű.

- Valóban, tegyük fel, hogy G_n-t jól kiszínezzük a $P = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ színnel (indirekt feltevés).

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű.

- Valóban, tegyük fel, hogy G_n-t jól kiszínezzük a $P = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ színnel (indirekt feltevés).

- z színe legyen $n-1$, az utolsó szín.

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű.

- Valóban, tegyük fel, hogy G_n-t jól kiszínezzük a $P = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ színnel (indirekt feltevés).

- z színe legyen $n-1$, az utolsó szín.

- Belátjuk, hogy a G_n színezése közben kiszínezett G_{n-1} jól átszínezhető úgy, hogy a benne előforduló $n-1$ színek eltűnjenek (azaz csak az $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ palettát használjuk).

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű.

- Valóban, tegyük fel, hogy G_n-t jól kiszínezzük a $P = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ színnel (indirekt feltevés).

- z színe legyen $n-1$, az utolsó szín.

- Belátjuk, hogy a G_n színezése közben kiszínezett G_{n-1} jól átszínezhető úgy, hogy a benne előforduló $n-1$ színek eltűnjenek (azaz csak az $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ palettát használjuk).

- Ez ellentmond, annak, hogy G_{n-1} kromatikus száma $n-1$.

A bizonyítás

- Azt állítjuk, hogy a G_n-re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. A bizonyítás: Teljes indukció.

- Nyilván a kormatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű.

- Valóban, tegyük fel, hogy G_n-t jól kiszínezzük a $P = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ színnel (indirekt feltevés).

- z színe legyen $n-1$, az utolsó szín.

- Belátjuk, hogy a G_n színezése közben kiszínezett G_{n-1} jól átszínezhető úgy, hogy a benne előforduló $n-1$ színek eltűnjenek (azaz csak az $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ palettát használjuk).

- Ez ellentmond, annak, hogy G_{n-1} kromatikus száma $n-1$. Az indirekt indoklás teljes lesz.

Mycielsky átszínezés

Mycielsky átszínezés

- Minden $1, 2, ..., n-2$ színt meghagyunk.

Mycielsky átszínezés

- Minden $1, 2, ..., n-2$ színt meghagyunk. Az $n-1$ színt kapott v csúcsok színét lecseréljük v' ikertestvére színére.

Mycielsky átszínezés

- Minden $1, 2, ..., n-2$ színt meghagyunk. Az $n-1$ színt kapott v csúcsok színét lecseréljük v' ikertestvére színére. Ez a szín nem lehet $n-1$, hiszen v' összekötött z-vel.

Mycielsky átszínezés

• Minden $1, 2, ..., n-2$ színt meghagyunk. Az $n-1$ színt kapott v csúcsok színét lecseréljük v' ikertestvére színére. Ez a szín nem lehet $n-1$, hiszen v' összekötött z-vel.

• Másrészt jó színezéshez jutunk, hisz egy független ponthalmaz (az $n-1$ színű pontok egy halmaza) elemeit festettük át, köztük a jó színezés semmilyen feltételt nem ír elő.

Mycielsky átszínezés

- Minden $1, 2, ..., n-2$ színt meghagyunk. Az $n-1$ színt kapott v csúcsok színét lecseréljük v' ikertestvére színére. Ez a szín nem lehet $n-1$, hiszen v' összekötött z-vel.

- Másrészt jó színezéshez jutunk, hisz egy független ponthalmaz (az $n-1$ színű pontok egy halmaza) elemeit festettük át, köztük a jó színezés semmilyen feltételt nem ír elő.

- Míg az átszínezett pontoknak a régi színekkel sem lesz konfliktusa, hisz v mellé a v' színe „stimmelni" fog: v' színe egy jó színezésből jött, ahol v' összekötött v G_{n-1}-beli szomszédaival.

2. Konstrukció

2. Konstrukció

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot.

2. Konstrukció

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk.

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk.

A gráfsorozat

A fenti $\binom{N}{2}$ darab kör alkotja gráfunk csúcshalmazát. Két csúcsunk/kör szomszédos, ha kívülről érintkeznek.

2. Konstrukció

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk.

A gráfsorozat

A fenti $\binom{N}{2}$ darab kör alkotja gráfunk csúcshalmazát. Két csúcsunk/kör szomszédos, ha kívülről érintkeznek.

Észrevétel

A fenti gráfsorozat gráfjaiban nincs háromszög.

2. Konstrukció

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk.

A gráfsorozat

A fenti $\binom{N}{2}$ darab kör alkotja gráfunk csúcshalmazát. Két csúcsunk/kör szomszédos, ha kívülről érintkeznek.

Észrevétel

A fenti gráfsorozat gráfjaiban nincs háromszög.

Az észrevétel geometriai megfogalmazása:

2. Konstrukció

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk.

A gráfsorozat

A fenti $\binom{N}{2}$ darab kör alkotja gráfunk csúcshalmazát. Két csúcsunk/kör szomszédos, ha kívülről érintkeznek.

Észrevétel

A fenti gráfsorozat gráfjaiban nincs háromszög.

Az észrevétel geometriai megfogalmazása: ha három kör középpontja egy egyenesre esik, akkor nem lehetnek páronként kívülről érintkezők.

2. Konstrukció

Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk.

A gráfsorozat

A fenti $\binom{N}{2}$ darab kör alkotja gráfunk csúcshalmazát. Két csúcsunk/kör szomszédos, ha kívülről érintkeznek.

Észrevétel

A fenti gráfsorozat gráfjaiban nincs háromszög.

Az észrevétel geometriai megfogalmazása: ha három kör középpontja egy egyenesre esik, akkor nem lehetnek páronként kívülről érintkezők.

Tétel

Ha $N > 2^k$, akkor gráfunk nem színezhető ki jól k színnel.

Bizonyítás

Bizonyítás

- Indirekten bizonyítunk.

Bizonyítás

- Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése.

Bizonyítás

- Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése.
- Célunk az, hogy belássuk ez a színezés nem lehet jó.

Bizonyítás

• Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése.

• Célunk az, hogy belássuk ez a színezés nem lehet jó.

• Az egyenesen felvett kiinduló ponthalmazunk mindegyik P eleméhez rendeljük hozzá azon színek halmazát, amelyeket azon körök kaptak, amelyek egyenesre eső átmérőjére P mint bal oldali végpont illeszzkedik.

Bizonyítás

- Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése.

- Célunk az, hogy belássuk ez a színezés nem lehet jó.

- Az egyenesen felvett kiinduló ponthalmazunk mindegyik P eleméhez rendeljük hozzá azon színek halmazát, amelyeket azon körök kaptak, amelyek egyenesre eső átmérőjére P mint bal oldali végpont illeszzkedik.

- Az $N(> 2)$ egyenesen lévő pont mindegyikéhez a k elemű paletta egy részhalmazát rendeltük.

Bizonyítás

- Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése.
- Célunk az, hogy belássuk ez a színezés nem lehet jó.
- Az egyenesen felvett kiinduló ponthalmazunk mindegyik P eleméhez rendeljük hozzá azon színek halmazát, amelyeket azon körök kaptak, amelyek egyenesre eső átmérőjére P mint bal oldali végpont illeszzkedik.
- Az $N(>2)$ egyenesen lévő pont mindegyikéhez a k elemű paletta egy részhalmazát rendeltük.
- Ez 2^k lehetőséget enged meg a színhalmazokra. N választása miatt lesz két pont P és Q, amelyhez ugyanaz a szín tartozik.

Bizonyítás

• Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése.

• Célunk az, hogy belássuk ez a színezés nem lehet jó.

• Az egyenesen felvett kiinduló ponthalmazunk mindegyik P eleméhez rendeljük hozzá azon színek halmazát, amelyeket azon körök kaptak, amelyek egyenesre eső átmérőjére P mint bal oldali végpont illeszzkedik.

• Az $N(> 2)$ egyenesen lévő pont mindegyikéhez a k elemű paletta egy részhalmazát rendeltük.

• Ez 2^k lehetőséget enged meg a színhalmazokra. N választása miatt lesz két pont P és Q, amelyhez ugyanaz a szín tartozik. **Skatulya-elv!**

Bizonyítás (befejezés)

Bizonyítás (befejezés)

- Tegyük fel, hogy egyenesünkön balról jobbra haladva először P, majd Q következik. Azaz a PQ szakasz bal oldali végpontja P.

Bizonyítás (befejezés)

• Tegyük fel, hogy egyenesünkön balról jobbra haladva először P, majd Q következik. Azaz a PQ szakasz bal oldali végpontja P.

• Azaz a P-hez rendelt színhalmaz elemei között ott van a PQ-ra mint átmérőre rajzolt $\mathcal{C}$ kör színe.

Bizonyítás (befejezés)

- Tegyük fel, hogy egyenesünkön balról jobbra haladva először P, majd Q következik. Azaz a PQ szakasz bal oldali végpontja P.

- Azaz a P-hez rendelt színhalmaz elemei között ott van a PQ-ra mint átmérőre rajzolt $\mathcal{C}$ kör színe.

- Ennek a színnek elő kell fordulnia a Q-hoz rendelt színhalmazban is.

Bizonyítás (befejezés)

- Tegyük fel, hogy egyenesünkön balról jobbra haladva először P, majd Q következik. Azaz a PQ szakasz bal oldali végpontja P.

- Azaz a P-hez rendelt színhalmaz elemei között ott van a PQ-ra mint átmérőre rajzolt $\mathcal{C}$ kör színe.

- Ennek a színnek elő kell fordulnia a Q-hoz rendelt színhalmazban is.

- Ez egy megfelelő kör létezését kívánja, ami azonos színű $\mathcal{C}$ -vel, amit kívülről érint.

Bizonyítás (befejezés)

- Tegyük fel, hogy egyenesünkön balról jobbra haladva először P, majd Q következik. Azaz a PQ szakasz bal oldali végpontja P.
- Azaz a P-hez rendelt színhalmaz elemei között ott van a PQ-ra mint átmérőre rajzolt $\mathcal{C}$ kör színe.
- Ennek a színnek elő kell fordulnia a Q-hoz rendelt színhalmazban is.
- Ez egy megfelelő kör létezését kívánja, ami azonos színű $\mathcal{C}$ -vel, amit kívülről érint.
- Tehát a kiinduló c színezés nem lehet jó színezés.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!