Gráfelméleti alapfogalmak

Hajnal Péter

2021. tavasz

Vasúthálózat

Vasúthálózat

- Nagyon sok helyzetben egy alaphalmaz elemei között kitűntetett párok vannak.

Vasúthálózat

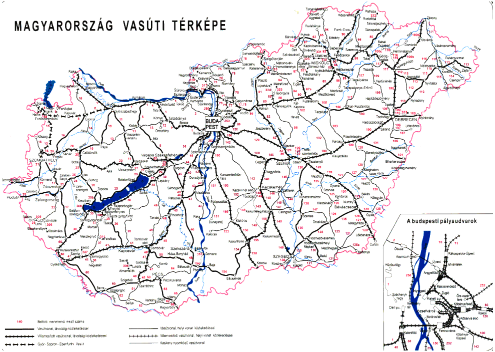
- Nagyon sok helyzetben egy alaphalmaz elemei között kitűntetett párok vannak. Nézzünk példákat.

Vasúthálózat

- Nagyon sok helyzetben egy alaphalmaz elemei között kitűntetett párok vannak. Nézzünk példákat.
- Egy úthálózat csomópontjai között bizonyosak közvetlen összeköttetéssel bírnak.

Vasúthálózat

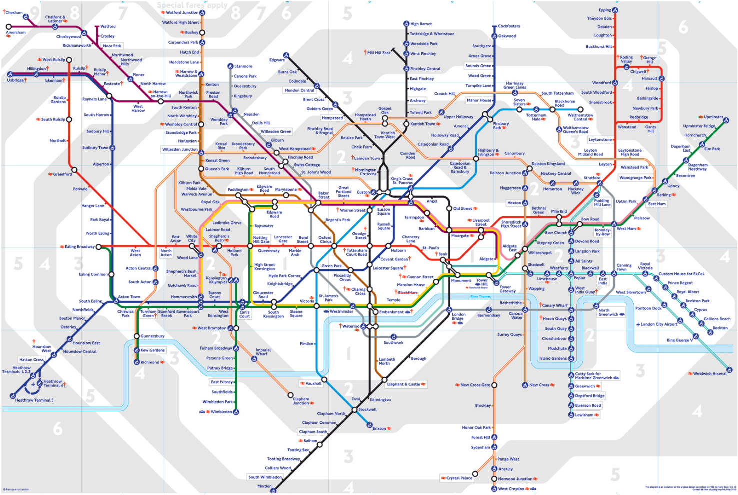
- Nagyon sok helyzetben egy alaphalmaz elemei között kitűntetett párok vannak. Nézzünk példákat.
- Egy úthálózat csomópontjai között bizonyosak közvetlen összeköttetéssel bírnak.



Magyarország vasúti térképe

London metrótérképe

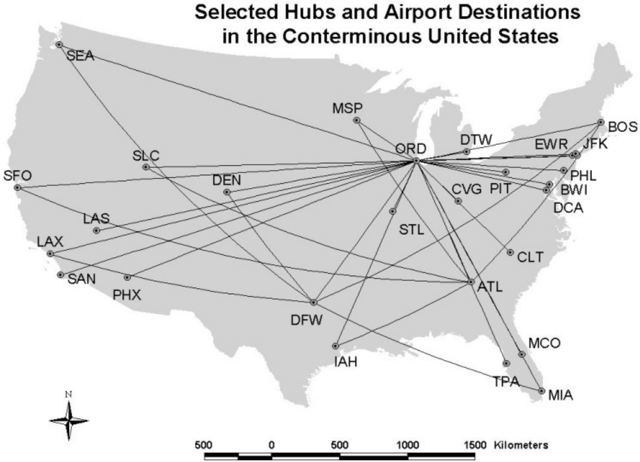
London metrótérképe



London metro térképe

Az USA repülő útvonalai

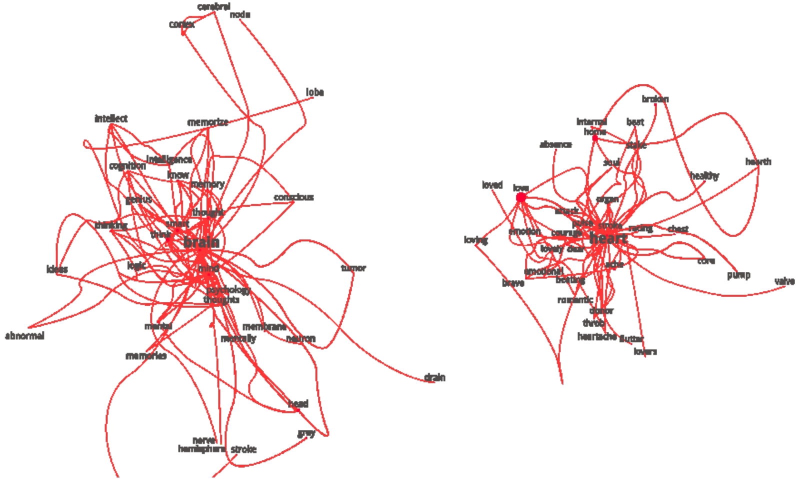
Az USA repülő útvonalai



Az USA jelentős légi útvonalainak térképe

Szóasszociációs kapcsolatok

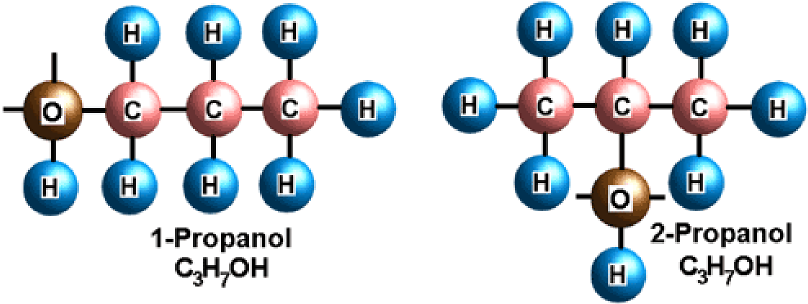
Szóasszociációs kapcsolatok



Az egyes szavakra a néhány leggyakrabban asszociált szavak kapcsolata

Molekulák

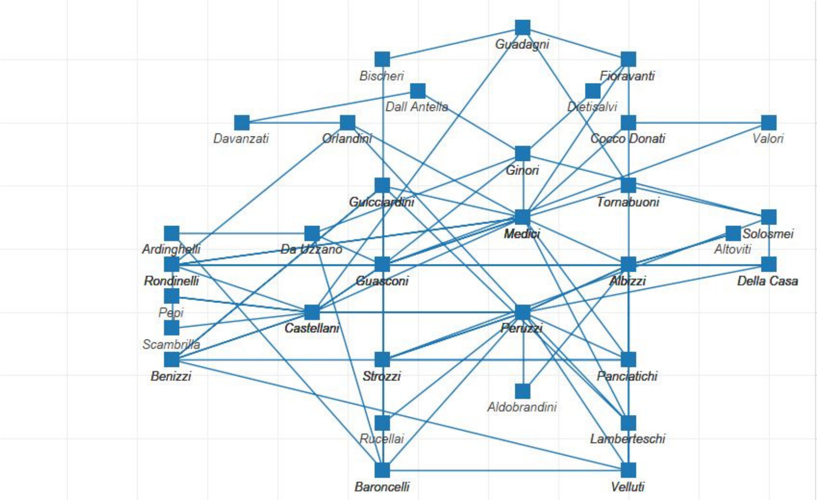
Molekulák



Egy molekulát alkotó elemek és körtük lévő kötések sokatmondó egy kémikus számára

Családok kapcsolati hálója

Családok kapcsolati hálója



A Medicik korában a nagy olasz családok közötti kapcsolati háló lerajzolása segít a kor megértésében.

Egyszerű gráfok: A definíció

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

- Néhány terminológia: $e = \{u, v\} \in E$ esetén azt mondjuk

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

- Néhány terminológia: $e = \{u, v\} \in E$ esetén azt mondjuk 'e összeköti u-t és v-t',

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

- Néhány terminológia: $e = \{u, v\} \in E$ esetén azt mondjuk 'e összeköti u-t és v-t', 'u és v az e él két végpontja',

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

• Néhány terminológia: $e = \{u, v\} \in E$ esetén azt mondjuk 'e összeköti u-t és v-t', 'u és v az e él két végpontja', 'u és v illeszkedik az e élre',

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

- Néhány terminológia: $e = \{u, v\} \in E$ esetén azt mondjuk 'e összeköti u-t és v-t', 'u és v az e él két végpontja', 'u és v illeszkedik az e élre', 'u és v szomszédos (az e él mentén)',

Egyszerű gráfok: A definíció

Definíció

Egy G egyszerű gráf egy V véges csúcshalmazból (V elemeire mint csúcsokra/pontokra hivatkozunk) és bizonyos éleknek nevezett csúcspárokból állnak. Az élek halmazát E-vel jelöljük. Azaz $E \subset \binom{V}{2}$.

- Néhány terminológia: $e = \{u, v\} \in E$ esetén azt mondjuk 'e összeköti u-t és v-t', 'u és v az e él két végpontja', 'u és v illeszkedik az e élre', 'u és v szomszédos (az e él mentén)', 'u a v csúcs egy szomszédja'.

Egyszerű gráfok lerajzolása

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Definíció

Egy gráf lerajzolásánál V elemeit/csúcsokat különböző síkbeli pontokkal azonosítjuk.

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Definíció

Egy gráf lerajzolásánál V elemeit/csúcsokat különböző síkbeli pontokkal azonosítjuk. Egy v csúcsnak megfelelő P_v pontot csúcspontnak nevezünk és kis karikával jelöljük.

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Definíció

Egy gráf lerajzolásánál V elemeit/csúcsokat különböző síkbeli pontokkal azonosítjuk. Egy v csúcsnak megfelelő P_v pontot csúcspontnak nevezünk és kis karikával jelöljük. Minden $e = \{u, v\}$ élt egy folyonos görbével reprezentálunk, ami két végpontjának megfelelő karikát köti össze.

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Definíció

Egy gráf lerajzolásánál V elemeit/csúcsokat különböző síkbeli pontokkal azonosítjuk. Egy v csúcsnak megfelelő P_v pontot csúcspontnak nevezünk és kis karikával jelöljük. Minden $e = \{u, v\}$ élt egy folyonos görbével reprezentálunk, ami két végpontjának megfelelő karikát köti össze. Az e élnek megfelelő γ_e görbe az e él élgörbéje.

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Definíció

Egy gráf lerajzolásánál V elemeit/csúcsokat különböző síkbeli pontokkal azonosítjuk. Egy v csúcsnak megfelelő P_v pontot csúcspontnak nevezünk és kis karikával jelöljük. Minden $e = \{u, v\}$ élt egy folyonos görbével reprezentálunk, ami két végpontjának megfelelő karikát köti össze. Az e élnek megfelelő γ_e görbe az e él élgörbéje.

Az ábra egyértelmű olvashatósága miatt feltesszük, hogy egy él élgörbéje csak két végpontjának megfelelő csúcsponton halad át,

Egyszerű gráfok lerajzolása

- Gráfok (ahogy nevük is mutatja) grafikusak, könnyen vizualizálhatók. Ha egy gráfot nem formálisan csúcsainak és az éleket alkotó csúcspároknak a felsorolásával akarjuk leírni, akkor lerajzoljuk.

Definíció

Egy gráf lerajzolásánál V elemeit/csúcsokat különböző síkbeli pontokkal azonosítjuk. Egy v csúcsnak megfelelő P_v pontot csúcspontnak nevezünk és kis karikával jelöljük. Minden $e = \{u, v\}$ élt egy folyonos görbével reprezentálunk, ami két végpontjának megfelelő karikát köti össze. Az e élnek megfelelő γ_e görbe az e él élgörbéje.

Az ábra egyértelmű olvashatósága miatt feltesszük, hogy egy él élgörbéje csak két végpontjának megfelelő csúcsponton halad át, továbbá két élgörbe csak véges sok ponrban találkozik és közös belső pontjaikban átmetszik egymást.

Egyszerű gráfok lerajzolása: Példa

Egyszerű gráfok lerajzolása: Példa

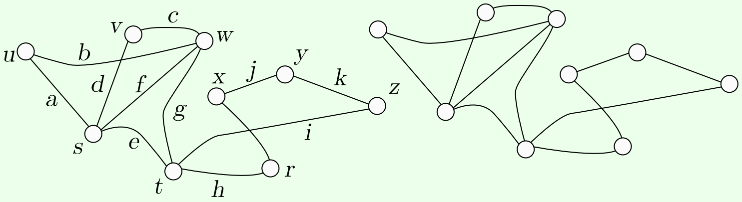
Példa

Egy kilenc pontú gráf lerajzolását adjuk meg:

Egyszerű gráfok lerajzolása: Példa

Példa

Egy kilenc pontú gráf lerajzolását adjuk meg:



Egy gráfot rajzoltunk le kétszer. A bal oldalon a karikák és élek mellé odaírtuk a „nevüket”. A jobb oldalon ugyanaz az ábra szerepel az elnevezések nélkül. Ezen az oldalon nem teljes a gráf leírása, de az összekötöttségek struktúrája jól látható. Sokszor csak ez az információ is elég, hogy egy a gráfra vonatkozó problémát megoldjuk.

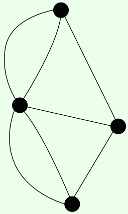
Szünet

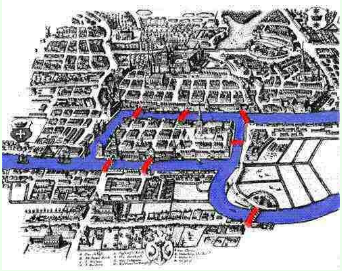
Általános gráf fogalma: Példa

Általános gráf fogalma: Példa

Példa

Egy úthálózatban két csomópont között többféle közvetlen elérhetőség is lehet.





Történetileg legfontosabb példa a XIX. századi Kőnigsberg városának középpontjában lévő szárazföldi egységek és a köztük fekvő hidak rendszere

Általános gráf fogalma: Példa

Általános gráf fogalma: Példa

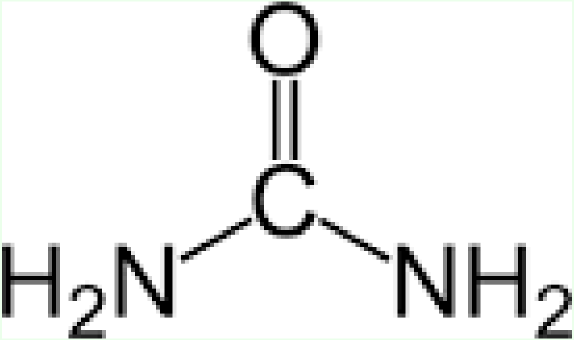
Példa

Egy molekulában két atom között többszörös kötés is előfordulhat.

Általános gráf fogalma: Példa

Példa

Egy molekulában két atom között többszörös kötés is előfordulhat.



A karbamid szerkezeti rajza

Általános gráf fogalma: Példa

Általános gráf fogalma: Példa

- Ha London metro hálózatának gráfjában két szomszédos csúcs/állomás összekötött akkor közvetlen metro összeköttetés van köztük.

Általános gráf fogalma: Példa

- Ha London metro hálózatának gráfjában két szomszédos csúcs/állomás összekötött akkor közvetlen metro összeköttetés van köztük.
- Néha azonban több vonal kocsijaival utazva is elérhetünk egyikből a másikba.

Általános gráf fogalma: Példa

- Ha London metro hálózatának gráfjában két szomszédos csúcs/állomás összekötött akkor közvetlen metro összeköttetés van köztük.
- Néha azonban több vonal kocsijaival utazva is elérhetünk egyikből a másikba.
- Ezen információ elveszik a „közvetlen elkérhetőség” egyszerű gráfjában.

Általános gráf fogalma: A definíció

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt.

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel", amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$).

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel", amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$). Illeszkedés esetén azt mondjuk, hogy az e élnek az u csúcs végpontja.

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel", amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$). Illeszkedés esetén azt mondjuk, hogy az e élnek az u csúcs végpontja.

A (V, E, I) egy gráf esetén, ha minden élnek két végpontja van.

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel”, amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$). Illeszkedés esetén azt mondjuk, hogy az e élnek az u csúcs végpontja.

A (V, E, I) egy gráf esetén, ha minden élnek két végpontja van. Ez a két végpont azonban egybe is eshet.

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel", amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$). Illeszkedés esetén azt mondjuk, hogy az e élnek az u csúcs végpontja.

A (V, E, I) egy gráf esetén, ha minden élnek két végpontja van. Ez a két végpont azonban egybe is eshet.

- A definíció lényege, hogy minden él esetén a végpontok száma 1 vagy 2.

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel”, amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$). Illeszkedés esetén azt mondjuk, hogy az e élnek az u csúcs végpontja.

A (V, E, I) egy gráf esetén, ha minden élnek két végpontja van. Ez a két végpont azonban egybe is eshet.

• A definíció lényege, hogy minden él esetén a végpontok száma 1 vagy 2. Ahogy másodfokú egyenlet gyökeinél is szokásos multiplicitással számolunk és egy élnek mindig két végpontot tulajdonítunk.

Általános gráf fogalma: A definíció

Definíció

Vegyünk egy véges V csúcshalmazt és egy véges E élhalmazt. Legyen I egy illeszkedési reláció, amely bizonyos csúcs-él párokat „kiemel”, amelyek illeszkednek ($I \subset V \times E$). Illeszkedés esetén azt mondjuk, hogy az e élnek az u csúcs végpontja.

A (V, E, I) egy gráf esetén, ha minden élnek két végpontja van. Ez a két végpont azonban egybe is eshet.

• A definíció lényege, hogy minden él esetén a végpontok száma 1 vagy 2. Ahogy másodfokú egyenlet gyökeinél is szokásos multiplicitással számolunk és egy élnek mindig két végpontot tulajdonítunk. Ha ez egy darab csúcs, akkor az él duplán/kétszeresen illeszkedik rá.

Hurokél, párhuzamos élpár

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Két él párhuzamos, ha ugyanazon két csúcsot kötik össze.

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Két él párhuzamos, ha ugyanazon két csúcsot kötik össze.

- Szokásos egy hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfot egyszerű gráfnak nevezni.

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Két él párhuzamos, ha ugyanazon két csúcsot kötik össze.

• Szokásos egy hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfot egyszerű gráfnak nevezni. A mi felépítésünk szerint ez nem teljesen jogos, hiszen egyszerű gráf éleinek leírásához nem használtunk illeszkedési relációt, ami viszont egy gráf definíciójának része.

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Két él párhuzamos, ha ugyanazon két csúcsot kötik össze.

- Szokásos egy hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfot egyszerű gráfnak nevezni. A mi felépítésünk szerint ez nem teljesen jogos, hiszen egyszerű gráf éleinek leírásához nem használtunk illeszkedési relációt, ami viszont egy gráf definíciójának része.

- Ennek ellenére a két fogalom (egyszerű gráfok, illetve hurokélek és párhuzamos élek nélküli gráfok) azonosíthatók.

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Két él párhuzamos, ha ugyanazon két csúcsot kötik össze.

- Szokásos egy hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfot egyszerű gráfnak nevezni. A mi felépítésünk szerint ez nem teljesen jogos, hiszen egyszerű gráf éleinek leírásához nem használtunk illeszkedési relációt, ami viszont egy gráf definíciójának része.

- Ennek ellenére a két fogalom (egyszerű gráfok, illetve hurokélek és párhuzamos élek nélküli gráfok) azonosíthatók.

- Valóban, egy hurokélek és párhuzamos élek nélküli gráf élei azonosíthatók két végpontjuk által alkotott részhalmazzal.

Hurokél, párhuzamos élpár

Definíció

Egy él hurokél, ha két végpontja egybesik.

Két él párhuzamos, ha ugyanazon két csúcsot kötik össze.

- Szokásos egy hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfot egyszerű gráfnak nevezni. A mi felépítésünk szerint ez nem teljesen jogos, hiszen egyszerű gráf éleinek leírásához nem használtunk illeszkedési relációt, ami viszont egy gráf definíciójának része.

- Ennek ellenére a két fogalom (egyszerű gráfok, illetve hurokélek és párhuzamos élek nélküli gráfok) azonosíthatók.

- Valóban, egy hurokélek és párhuzamos élek nélküli gráf élei azonosíthatók két végpontjuk által alkotott részhalmazzal. Illetve egy egyszerű gráf esetén bevezethető a $v\mathcal{I}e$ illeszkedés, ha $v \in e$ teljesül.

Gráfok lerajzolása

Gráfok lerajzolása

- Természetesen az egyszerű gráfoknál bevezetett nyelvezet most is használható.

Gráfok lerajzolása

- Természetesen az egyszerű gráfoknál bevezetett nyelvezet most is használható.
- A lerajzolás gráfok esetén is ugyanúgy megtehető.

Gráfok lerajzolása

- Természetesen az egyszerű gráfoknál bevezetett nyelvezet most is használható.
- A lerajzolás gráfok esetén is ugyanúgy megtehető. Sőt ez megmagyarázza a hurokél elnevezést.

Gráfok lerajzolása

- Természetesen az egyszerű gráfoknál bevezetett nyelvezet most is használható.

- A lerajzolás gráfok esetén is ugyanúgy megtehető. Sőt ez megmagyarázza a hurokél elnevezést. Egy hurokélnek olyan élgörbe felel meg, amely ugyanahhoz a „karikához” érkezik ahonnan elindult, azaz hurkot alkot.

Szünet

A fokszám fogalma

A fokszám fogalma

- A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

A fokszám fogalma

- A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. Ekkor v fokszáma (röviden foka)

$$2|\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ hurokél}\}| + |\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}|$$

A fokszám fogalma

- A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. Ekkor v fokszáma (röviden foka)

$$2|\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ hurokél}\}| + |\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}|$$

- Egy gráf lerajzolásánál a fokszám jól szemléltethető:

A fokszám fogalma

- A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. Ekkor v fokszáma (röviden foka)

$$2|\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ hurokél}\}| + |\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}|$$

- Egy gráf lerajzolásánál a fokszám jól szemléltethető: Nagyítóval nézzük meg egy csúcsot reprezentáló karika környékét.

A fokszám fogalma

- A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. Ekkor v fokszáma (röviden foka)

$$2|\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ hurokél}\}| + |\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}|$$

- Egy gráf lerajzolásánál a fokszám jól szemléltethető: Nagyítóval nézzük meg egy csúcsot reprezentáló karika környékét. A karikából induló/érkező görbék egy „napocskaszerű” ábrát adnak.

A fokszám fogalma

- A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. Ekkor v fokszáma (röviden foka)

$$2|\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ hurokél}\}| + |\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}|$$

- Egy gráf lerajzolásánál a fokszám jól szemléltethető: Nagyítóval nézzük meg egy csúcsot reprezentáló karika környékét. A karikából induló/érkező görbék egy „napocskaszerű” ábrát adnak. A napocska sugarainak száma az aktuális csúcs foka.

A fokszám fogalma

• A fokszám egy csúcsra illeszkedő éleket számolja meg a hurokélek kétszeres illeszkedését számba véve.

Definíció

Legyen G egy gráf és v egy csúcsa. Ekkor v fokszáma (röviden foka)

$$2|\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ hurokél}\}| + |\{e \in E : vIe \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}|$$

• Egy gráf lerajzolásánál a fokszám jól szemléltethető: Nagyítóval nézzük meg egy csúcsot reprezentáló karika környékét. A karikából induló/érkező görbék egy „napocskaszerű” ábrát adnak. A napocska sugarainak száma az aktuális csúcs foka. Minden a csúcsra illeszkedő hurokél két ágat, nem hurokél pedig egy ágat ad ehhez a számláláshoz.

Az első gráfelméleti tétel

Az első gráfelméleti tétel

Tétel

Tetszőleges gráfban az összes csúcs fokszámának összege az élszám kétszerese.

Az első gráfelméleti tétel

Tétel

Tetszőleges gráfban az összes csúcs fokszámának összege az élszám kétszerese.

Formulával:

$$\sum_{v:v\in V} d(v) = 2|E|.$$

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy-egy darab 1-est.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy-egy darab 1-est. Hány darab 1-est írtunk le? Másképpen: Adjuk össze a leírt 1-eseket.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy-egy darab 1-est. Hány darab 1-est írtunk le? Másképpen: Adjuk össze a leírt 1-eseket.
- Az 1-esek leírásának kétféle struktúrája van.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy-egy darab 1-est. Hány darab 1-est írtunk le? Másképpen: Adjuk össze a leírt 1-eseket.

- Az 1-esek leírásának kétféle struktúrája van. Egyrészt élek mellé írjuk őket, másrészt az élgörbék végeihez, azaz csúcsok köré írjuk őket.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy-egy darab 1-est. Hány darab 1-est írtunk le? Másképpen: Adjuk össze a leírt 1-eseket.

- Az 1-esek leírásának kétféle struktúrája van. Egyrészt élek mellé írjuk őket, másrészt az élgörbék végeihez, azaz csúcsok köré írjuk őket. A kétféle megközelítés kétféle választ ad.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás

- Rajzoljuk le a gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy-egy darab 1-est. Hány darab 1-est írtunk le? Másképpen: Adjuk össze a leírt 1-eseket.

- Az 1-esek leírásának kétféle struktúrája van. Egyrészt élek mellé írjuk őket, másrészt az élgörbék végeihez, azaz csúcsok köré írjuk őket. A kétféle megközelítés kétféle választ ad. A kettőnek meg kell egyezni.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

- Ha az élek szerint csoportosítjuk őket (az összeadásos nyelvezetet követve „zárójelezzük” őket), akkor minden élre két darab 1-est tartalmazó csoporthoz jutunk.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

- Ha az élek szerint csoportosítjuk őket (az összeadásos nyelvezetet követve „zárójelezzük” őket), akkor minden élre két darab 1-est tartalamzó csoporthoz jutunk. Az 1-esek száma $2|E|$.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

- Ha az élek szerint csoportosítjuk őket (az összeadásos nyelvezetet követve „zárójelezzük” őket), akkor minden élre két darab 1-est tartalamzó csoporthoz jutunk. Az 1-esek száma $2|E|$.
- Ha a csúcsok szerint csoportosítjuk az 1-eseket, akkor minden csoportban a megfelelő csúcs fokszáma adja az odakerülő 1-esek számát.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

- Ha az élek szerint csoportosítjuk őket (az összeadásos nyelvezetet követve „zárójelezzük” őket), akkor minden élre két darab 1-est tartalamzó csoporthoz jutunk. Az 1-esek száma $2|E|$.
- Ha a csúcsok szerint csoportosítjuk az 1-eseket, akkor minden csoportban a megfelelő csúcs fokszáma adja az odakerülő 1-esek számát. A teljes összeszámolás végeredmémnye a fokok összege lesz.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

- Ha az élek szerint csoportosítjuk őket (az összeadásos nyelvezetet követve „zárójelezzük" őket), akkor minden élre két darab 1-est tartalamzó csoporthoz jutunk. Az 1-esek száma $2|E|$.
- Ha a csúcsok szerint csoportosítjuk az 1-eseket, akkor minden csoportban a megfelelő csúcs fokszáma adja az odakerülő 1-esek számát. A teljes összeszámolás végeredménye a fokok összege lesz.
- A két számolás eredményének egyezősége éppen a bizonyítandót adja.

Az első gráfelméleti tétel: A bizonyítás (folytatás)

- Ha az élek szerint csoportosítjuk őket (az összeadásos nyelvezetet követve „zárójelezzük” őket), akkor minden élre két darab 1-est tartalmazó csoporthoz jutunk. Az 1-esek száma $2|E|$.
- Ha a csúcsok szerint csoportosítjuk az 1-eseket, akkor minden csoportban a megfelelő csúcs fokszáma adja az odakerülő 1-esek számát. A teljes összeszámolás végeredmémnye a fokok összege lesz.
- A két számolás eredményének egyezősége éppen a bizonyítandót adja.
- Nagyon röviden csúcs-él illeszkedéseket számoltuk össze kétféleképpen (tekintettel a multiplicitásra) és a kétféle eredményt összevettük.

Következmények

Következmények

Következmény

Tetszőleges gráfban az összes csúcs fokszámát összeadva páros számot kapunk.

Következmények

Következmény

Tetszőleges gráfban az összes csúcs fokszámát összeadva páros számot kapunk.

Következmény

Tetszőleges gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Következmények

Következmény

Tetszőleges gráfban az összes csúcs fokszámát összeadva páros számot kapunk.

Következmény

Tetszőleges gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Következmény

Ha egy gráfban van páratlan fokú csúcs, akkor lennie kell másiknak is.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!