# Kombinatorikus alapelvek

Hajnal Péter

2021. tavasz

# A kurzusról

# A kurzusról

- A kombinatorika kurzus két részből áll:

(1) összeszámlálási problémák,

(2) gráfelmélet.

# A kurzusról

- A kombinatorika kurzus két részből áll:

(1) összeszámlálási problémák,

(2) gráfelmélet.

- A gyakorlat és előadás „EGYBEKREDITÁLT”.

# A kurzusról

- A kombinatorika kurzus két részből áll:

(1) összeszámlálási problémák,

(2) gráfelmélet.

- A gyakorlat és előadás „EGYBEKREDITÁLT”. Mindkét részben a teljesítményt 0-50-es skálán értékelem.

# A kurzusról

- A kombinatorika kurzus két részből áll:

(1) összeszámlálási problémák,

(2) gráfelmélet.

- A gyakorlat és előadás „EGYBEKREDITÁLT”. Mindkét részben a teljesítményt 0-50-es skálán értékelem. A két értékelés összege adja a kurzus pontszámát, amit jeggyé kovertálok (lásd coospace).

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz:

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám.

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter.

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter. Például: hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter. Például: hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

• Itt egy $H_n$ halmazsorozatról van szó és ennek elemei elemszámára kérdezünk rá. Az elemszám $n$-től függ. A válasz egy sorozat, mégpedig természetes számok egy sorozata.

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter. Például: hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

• Itt egy $H_n$ halmazsorozatról van szó és ennek elemei elemszámára kérdezünk rá. Az elemszám $n$-től függ. A válasz egy sorozat, mégpedig természetes számok egy sorozata.

• Sokszor több paraméter is lehet.

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter. Például: hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

• Itt egy $H_n$ halmazsorozatról van szó és ennek elemei elemszámára kérdezünk rá. Az elemszám $n$-től függ. A válasz egy sorozat, mégpedig természetes számok egy sorozata.

• Sokszor több paraméter is lehet. Például: hány $k$ elemű részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

# Összeszámlálási problémák alapkérdése

Határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van?

A válasz: Egy $v$ természetes szám. $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

• Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepelhet egy paraméter. Például: hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

• Itt egy $H_n$ halmazsorozatról van szó és ennek elemei elemszámára kérdezünk rá. Az elemszám $n$-től függ. A válasz egy sorozat, mégpedig természetes számok egy sorozata.

• Sokszor több paraméter is lehet. Például: hány $k$ elemű részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

• A válasz két paraméter esetén természetes számok egy két dimenziós serege/táblázata.

# Összeszámlálási problémák: Listázás

# Összeszámlálási problémák: Listázás

- Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

# Összeszámlálási problémák: Listázás

- Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

- Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

# Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

# Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

• Ez kis halmazok esetén egy KONKRÉT, nagyon hasznos feladat.

# Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

• Ez kis halmazok esetén egy KONKRÉT, nagyon hasznos feladat. Fontos, hogy a listázásnak legyen egy alapelve.

# Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

• Ez kis halmazok esetén egy KONKRÉT, nagyon hasznos feladat. Fontos, hogy a listázásnak legyen egy alapelve. Ezzel lehet kiküszöbölni a listázási feladat két buktatóját:

# Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

• Ez kis halmazok esetén egy KONKRÉT, nagyon hasznos feladat. Fontos, hogy a listázásnak legyen egy alapelve. Ezzel lehet kiküszöbölni a listázási feladat két buktatóját: egy elemet kihagyunk,

# Összeszámlálási problémák: Listázás

• Természetesen egy $H$ halmaz elemszáma nagyon fontos információkat hordoz a halmazról. Mégis csak egy matematikai paraméter.

• Mindenki emlékszik, hogy középiskolás osztályának mennyi volt az osztálylétszáma. Ez az egy szám elárul valamit középiskolás osztályunkról (a korábban $H$-val jelölt halmazra egy példa), de igen keveset. Jóval több tudás, ha elsoroljuk a tanulók neveit.

Egy adott véges halmaz elemeinek felsorolását a halmaz *listázásának* nevezzük.

• Ez kis halmazok esetén egy KONKRÉT, nagyon hasznos feladat. Fontos, hogy a listázásnak legyen egy alapelve. Ezzel lehet kiküszöbölni a listázási feladat két buktatóját: egy elemet kihagyunk, illetve egy elemet többször is felírunk.

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

- Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

- Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).
- Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen.

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

- Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).

- Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen. Az ötös lottó kihúzott számötöseit összegyűjtő halmaz listázása értelmetlen feladat.

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

- Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).

- Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen. Az ötös lottó kihűzott számötöseit összegyűjtő halmaz listázása értelmetlen feladat. Az elemszám meghatározása egy jó középiskolai gyakorlat.

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

- Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).

- Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen. Az ötös lottó kihűzott számötöseit összegyűjtő halmaz listázása értelmetlen feladat. Az elemszám meghatározása egy jó középiskolai gyakorlat.

- Megjegyezzük, hogy az óriási lista ellenére az elemszám tízes számrendszerben felírva csupán nyolc számjegy.

# Összeszámlálási problémák: Listázás (folytatás)

- Ha a listát felírjuk, akkor az elemszám meghatározása egy egyszerű számolás (amennyiben a lita teljes és senkit sem ismétlünk).

- Nagy halmazok esetén a listázás lehetetlen. Az ötös lottó kihűzott számötöseit összegyűjtő halmaz listázása értelmetlen feladat. Az elemszám meghatározása egy jó középiskolai gyakorlat.

- Megjegyezzük, hogy az óriási lista ellenére az elemszám tízes számrendszerben felírva csupán nyolc számjegy.

- Egy paraméteres összeszámlálási problémát mindig érdemes úgy kezdeni, hogy kis paraméter értékekre listázzuk a halmazok elemeit. Így a feladat KONKRÉT, megfoghatóvá válik.

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

- Három alapelvet ismertetünk.

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

- Három alapelvet ismertetünk.

- Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza.

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

- Három alapelvet ismertetünk.
- Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza.
- Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz.

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

- Három alapelvet ismertetünk.
- Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza.
- Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat.

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

- Három alapelvet ismertetünk.

- Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza.

- Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat.

- Mindig feltesszük, hogy VÉGES halmazokkal dolgozunk,

# Összeszámlálási problémák: Alapelvek

• Három alapelvet ismertetünk.

• Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza.

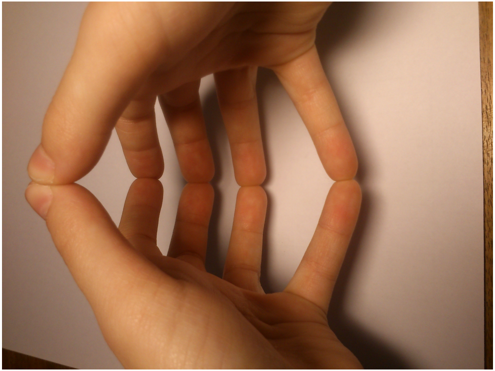
• Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat.

• Mindig feltesszük, hogy VÉGES halmazokkal dolgozunk, de erről később még szó lesz.

# Bijektív alapelv

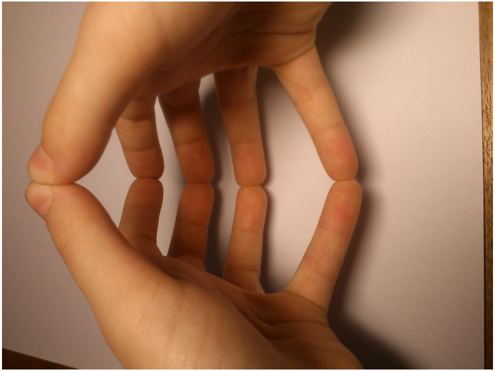
# Bijektív alapelv

- A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



# Bijektív alapelv

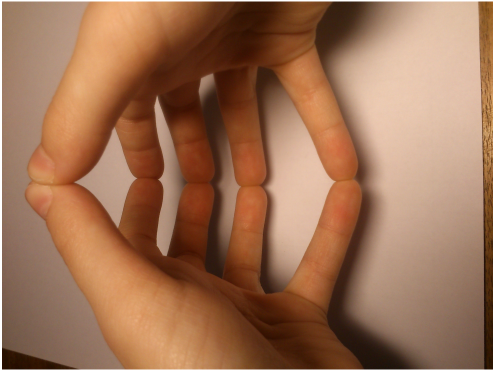
- A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



- A képen egy kislány teszi össze bal, iletve jobb kezének ujjait.

# Bijektív alapelv

- A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



- A képen egy kislány teszi össze bal, iletve jobb kezének ujjait. Ő már tud számolni, de ennélkül is látja (ahogy a számolni nem tudók is), hogy bal és jobb kezén ugyanannyi új van.

# Bijektív alapelv (folytatás)

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

- Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

- Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy. Párok alakulnak ki a két fajta figurák között.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.

- Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy. Párok alakulnak ki a két fajta figurák között. Ismét számolás nélkül tudhatjuk, hogy a két fajtából ugyanannyi darabunk van.

# Bijektív alapelv (folytatás)

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

- Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

- Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak. Tehát ugyanannyi balos cipő van a képen mint jobbos.

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

- Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak. Tehát ugyanannyi balos cipő van a képen mint jobbos. A pontos számuk meghatározása egy számolás, összetettebb mint az egy pillanat alatt látható „azonos elemszámúság”.

# Bijektív alapelv (folytatás)

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja

# Bijektív alapelv (folytatás)

- A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja

- Ez alapján mindenki számolás nélkül tudja, hogy a csoportban ugyanannyi fiú van mint lány.

# Bijektív alapelv: Formalizálás

# Bijektív alapelv: Formalizálás

HA két halmaz elemeit párokba tudjuk állítani,
AKKOR a két halmaz azonos elemszámú.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?". Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?
- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?". Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.
- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú;

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”. Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos;

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”. Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos; egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?". Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos; egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj.

- $A$ és $B$ halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?". Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos; egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj.

- $A$ és $B$ halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?". Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos; egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj.

- $A$ és $B$ halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli.

- Az is nyilvánvaló, hogy a párom párja én vagyok. Matematikai irásmóddal, ha $x \in A$, akkor $x$ párjának ($\varphi(x) \in B$-nek) párja ($\psi(\varphi(x)) \in A$) $x$, azaz $\psi(\varphi(x)) = x$ bármi legyen is az $x \in A$ elem.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása

- Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk?

- Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?". Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja.

- Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú; egy balos cipőnek jobbos; egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj.

- $A$ és $B$ halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli.

- Az is nyilvánvaló, hogy a párom párja én vagyok. Matematikai irásmóddal, ha $x \in A$, akkor $x$ párjának ($\varphi(x) \in B$-nek) párja ($\psi(\varphi(x)) \in A$) $x$, azaz $\psi(\varphi(x)) = x$ bármi legyen is az $x \in A$ elem. Illetve hasonlóan ha $y \in B$, akkor $y$ párjának ($\psi(y) \in A$-nak) párja ($\varphi(\psi(y)) \in B$) $y$, azaz $\varphi(\psi(y)) = y$ minden $y \in B$ elemre.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be,

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.
- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.
- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.

- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.
- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.
- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.

- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító?

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.
- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.
- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító?
- Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.
- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.
- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító?
- Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lányhoz kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.
- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.
- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító?
- Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lányhoz kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként.
- Ezen két tulajdonsággal szokták leírni a párbaállító leképezéseket.

# Bijektív alapelv: Formalizálás pontosítása (folytatás)

- Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ egy párbaállító leképezés $A$-ból $B$-be, illetve $\psi$ egy párbaállító leképezés $B$-ből $A$-be.

- Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz $\varphi$ meghatározza $\psi$-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

- Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító?

- Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lányhoz kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként.

- Ezen két tulajdonsággal szokták leírni a párbaállító leképezéseket.

- Ha „valamit” mindenki számára egyértelműen leírunk, akkor azt mondjuk hogy ezt a „valamit” definiáljuk. A leírás a „valami” definíciója.

# Bijektív alapelv: A definíció

# Bijektív alapelv: A definíció

## Definíció

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

- A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk $\varphi$ leképezés *ráképezés*,

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk $\varphi$ leképezés *ráképezés*, idegen szóval szürjekció.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk $\varphi$ leképezés *ráképezés*, idegen szóval szürjekció.

• Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az $A$ és $B$ halmazok közt ha injektív és szüjektív is,

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk $\varphi$ leképezés *ráképezés*, idegen szóval szürjekció.

• Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az $A$ és $B$ halmazok közt ha injektív és szüjektív is, idegen szóval *bijektív*.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk $\varphi$ leképezés *ráképezés*, idegen szóval szürjekció.

• Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az $A$ és $B$ halmazok közt ha injektív és szüjektív is, idegen szóval *bijektív*. Azaz a leképzések párbállító tulajdonságának egy másik neve a bijekció.

# Bijektív alapelv: A definíció

**Definíció**

Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemere $\varphi(a) = b$.

• A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi$ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés, idegen szóval injekció. Néha csak azt írjuk $\varphi$ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk $\varphi$ leképezés *ráképezés*, idegen szóval szürjekció.

• Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az $A$ és $B$ halmazok közt ha injektív és szüjektív is, idegen szóval *bijektív*. Azaz a leképzések párbállító tulajdonságának egy másik neve a bijekció. Nyelvet tanultunk, a matematika nyelvét.

# Bijektív alapelv: Újraformalizálás

# Bijektív alapelv: Újraformalizálás

HA az $A$ és $B$ halmazok között létezik bijekció,

AKKOR $|A| = |B|$, a két halmaz azonos elemszámú.

# Bijektív alapelv: Újraformalizálás

HA az $A$ és $B$ halmazok között létezik bijekció,
AKKOR $|A| = |B|$, a két halmaz azonos elemszámú.

**Jelölés**

Ha $A$ és $B$ halmazok párbaállíthatók, azaz van köztük bijekció, akkor azt írjuk, hogy

$$A \sim B.$$

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi” függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.
- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.
- Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.

- Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

• $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

• Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.

• Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.
- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.
- Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$.
- Ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$, ahol $A, B, C$ három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.
- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.
- Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$.
- Ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$, ahol $A, B, C$ három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes. Az amikor először $\varphi$-t, majd $\psi$-t alkalmazzuk.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója

- $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először $\varphi$-t, majd $\psi$-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az $x$ helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így $x$-et először a „közelebbi" függvénybe helyettesítjük,majd az eredményt a távolabbiba.

- Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a $\varphi$ függvény által felvett értékeken $\psi$ értelmezett.

- Speciálisan akkor beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$.

- Ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$, ahol $A, B, C$ három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes. Az amikor először $\varphi$-t, majd $\psi$-t alkalmazzuk. Azaz ekkor $\psi \circ \varphi$ egy jól definiált leképezés.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik $A$-n, a másik $B$-n értelmezett.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik $A$-n, a másik $B$-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez $h$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a $H$-n értelmezett *identitás* függvény, jele $\mathrm{id}_H$.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik $A$-n, a másik $B$-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez $h$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a $H$-n értelmezett *identitás* függvény, jele $\mathrm{id}_H$.
- Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is identitás.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik $A$-n, a másik $B$-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez $h$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a $H$-n értelmezett *identitás* függvény, jele $\mathrm{id}_H$.
- Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is identitás. DE $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \mathrm{id}_B$.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik $A$-n, a másik $B$-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez $h$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a $H$-n értelmezett *identitás* függvény, jele $\mathrm{id}_H$.
- Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is identitás. DE $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \mathrm{id}_B$.
- Ha két függvénynek ilyen viszonya van, akkor azt mondjuk, hogy egymás inverzei.

# Bijekciók: Függvények kompozíciója (folytatás)

- Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli.
- A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik $A$-n, a másik $B$-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez $h$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a $H$-n értelmezett *identitás* függvény, jele $\mathrm{id}_H$.
- Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is identitás. DE $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \mathrm{id}_B$.
- Ha két függvénynek ilyen viszonya van, akkor azt mondjuk, hogy egymás inverzei.

**Definíció**

$\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$ leképzések egymás inverzei, ha $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$.

# Bijekciók: Az alaptétel

# Bijekciók: Az alaptétel

- A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz.

# Bijekciók: Az alaptétel

- A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt".

# Bijekciók: Az alaptétel

- A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

**Tétel**

$\varphi : A \to B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképzés.

# Bijekciók: Az alaptétel

- A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

**Tétel**

$\varphi : A \to B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképzés.

- Két halmaz között leírt leképzésről gyakran úgy a legegyszerűbb belátni, hogy bijekció, hogy megadjuk inverzét.

# Bijekciók: Az alaptétel

• A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

**Tétel**

$\varphi : A \to B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképzés.

• Két halmaz között leírt leképzésről gyakran úgy a legegyszerűbb belátni, hogy bijekció, hogy megadjuk inverzét. Azaz leírjuk, hogy $x$ párja ismeretében, hogyan mondható meg, hogy mely $x$ elemről van szó.

# Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

# Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

- Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható.

# Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

- Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható.
- Egy „rejtvénytípust” definiálunk. A rejtvényben adott $B$ egy tetszőleges eleme.

# Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

- Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható.

- Egy „rejtvénytípust” definiálunk. A rejtvényben adott $B$ egy tetszőleges eleme.

- A rejtvényt egy játékos fejti, aki számára $\phi$ ismert, azaz tudja, hogyan, milyen szabály szerint kell egy $A$-beli elemhez a képét hozzárendelni.

# Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

- Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható.

- Egy „rejtvénytípust” definiálunk. A rejtvényben adott $B$ egy tetszőleges eleme.

- A rejtvényt egy játékos fejti, aki számára $\phi$ ismert, azaz tudja, hogyan, milyen szabály szerint kell egy $A$-beli elemhez a képét hozzárendelni. A játékosnak azt kell kitalálnia, hogy mely $A$-beli elem képe $b$.

# Bijekciók: A „rejtvény” nyelvezet

- Érdemes kiemelnünk, hogy egy $\phi : A \to B$ leképezés párbaálító volta a következőképpen is megfogalmazható.

- Egy „rejtvénytípust” definiálunk. A rejtvényben adott $B$ egy tetszőleges eleme.

- A rejtvényt egy játékos fejti, aki számára $\phi$ ismert, azaz tudja, hogyan, milyen szabály szerint kell egy $A$-beli elemhez a képét hozzárendelni. A játékosnak azt kell kitalálnia, hogy mely $A$-beli elem képe $b$.

- Ha ez a rejtvénytípus olyan, hogy minden esetben van megoldása és az egyértelmű, az pontosan azt jelenti, hogy $\phi$ párbaállító leképezés.

# Egy kérdés

# Egy kérdés

- Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az $A$ és $B$ halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés.

# Egy kérdés

- Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az $A$ és $B$ halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés.

Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképzésünk egy-egyértelmű (ráképezést nem tudjuk)?

# Egy kérdés

- Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az $A$ és $B$ halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés.

Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképzésünk egy-egyértelmű (ráképezést nem tudjuk)?

- Az alábbi képen két fajta Kinder játékokat raktunk egymás mellé.

# Egy kérdés

- Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az $A$ és $B$ halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés.

Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképzésünk egy-egyértelmű (ráképezést nem tudjuk)?

- Az alábbi képen két fajta Kinder játékokat raktunk egymás mellé.

# Egy kérdés: A válasz

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába.

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés.

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk.

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van" leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív.

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

**Tétel**

Legyenek $A$ és $B$ véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van" leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

**Tétel**

Legyenek $A$ és $B$ véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.

- A figyelmes hallgató észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek.

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

**Tétel**

Legyenek $A$ és $B$ véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.

- A figyelmes hallgató észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek. Mi is ez?

# Egy kérdés: A válasz

- A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök $T$ halmazából a kép definiál egy „párja/mellette van” leképezést a mókusok $M$ halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többben).

**Tétel**

Legyenek $A$ és $B$ véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.

- A figyelmes hallgató észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek. Mi is ez? Miért is van szükségünk erre a feltételre?

# A válasz-Tétel feltételei

# A válasz-Tétel feltételei

- Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

# A válasz-Tétel feltételei

• Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

• Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

# A válasz-Tétel feltételei

- Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

- Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

- A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között).

# A válasz-Tétel feltételei

• Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

• Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

• A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat.

# A válasz-Tétel feltételei

• Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

• Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

• A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

# A válasz-Tétel feltételei

- Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

- Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

- A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

- Ennek ellenére a negatív egészékhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon pár nélküli pozitív egész.

# A válasz-Tétel feltételei

- Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

- Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

- A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

- Ennek ellenére a negatív egészékhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon pár nélküli pozitív egész. Például ha $x$ párja $-x+1$, akkor a negatív számok egyikének sem lesz párja az 1.

# A válasz-Tétel feltételei

- Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül.

- Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz.

- A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

- Ennek ellenére a negatív egészékhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon pár nélküli pozitív egész. Például ha $x$ párja $-x+1$, akkor a negatív számok egyikének sem lesz párja az 1. Ha pedig az $x$ negatív egész párjának $-2x$-et nevezzük ki, akkor minden páratlan pozitív egész olyan lesz, mint a korábbi képünkön az utolsó két mókus.

# Végtelen halmazok

# Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát".

# Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.
- Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek.

# Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.
- Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani.

# Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.

- Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre.

# Végtelen halmazok

• Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.

• Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

# Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.

- Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

- Akkor jó lenne tisztázni, hogy mik a véges halmazok?

# Végtelen halmazok

- Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”.

- Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

- Akkor jó lenne tisztázni, hogy mik a véges halmazok?

- Néhány példa véges halmazra:

$$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \ldots$$

# Véges halmazok

# Véges halmazok

**Jelölés: Standard véges halmazok**

Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges természetes szám. Legyen

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

# Véges halmazok

**Jelölés: Standard véges halmazok**

Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges természetes szám. Legyen

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$, $[9] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

# Véges halmazok

## Jelölés: Standard véges halmazok

Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges természetes szám. Legyen

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$, $[9] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

## Definíció

Egy $H$ halmaz véges, ha elemei párba állíthatók egy standard véges halmaz elemeivel.

# Vissza az óvodába

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.
- A bal kezünkön véges sok ujj van.

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

- A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt.

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

- A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk?

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

- A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt.

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

- A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt. Azaz bijekciót létesítettünk ujjaink és egy standard véges halmaz között.

# Vissza az óvodába

- Azt is mondhatjuk, hogy egy $H$ halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

- A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt. Azaz bijekciót létesítettünk ujjaink és egy standard véges halmaz között. Ismét egy óvodás tanulmányt formalizáltunk a matematika nyelvén.

# Elemszám

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

- A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes.

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

- A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$.

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért?

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért? Indirekten bizonyítunk.

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért? Indirekten bizonyítunk. Felthetjük, hogy $n < m$.

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért? Indirekten bizonyítunk. Felthetjük, hogy $n < m$. Miért?

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért? Indirekten bizonyítunk. Felthetjük, hogy $n < m$. Miért? Tudjuk, hogy létezik $\varphi : [n] \to [m]$ bijekció.

# Elemszám

**Definíció**

Ha $H$ elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állíthatjuk, akkor azt mondjuk, hogy $H$ egy $n$ elemű halmaz.

• A kifinomult mtematikai érzék azt mondja, hogy a fenti szóhasználaz veszélyes. Lehet, hogy máshogy számolva az ujjainkat 6-ot kapjunk?

**Lemma**

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $A \sim [n]$ és $A \sim [m]$. Ekkor

$$n = m.$$

A feltételekből adódik, hogy $[n] \sim [m]$. Miért? Indirekten bizonyítunk. Felthetjük, hogy $n < m$. Miért? Tudjuk, hogy létezik $\varphi : [n] \to [m]$ bijekció. Ez ellentmond a skatulyaelvnek.

# Szünet

# Összegzési alapelv

# Összegzési alapelv

- Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

# Összegzési alapelv

- Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

# Összegzési alapelv

- Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

- A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv.

# Összegzési alapelv

- Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

- A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv. Számoljuk meg az áfonyát: 5 darab. Ribizli: 4 darab, fekete ribizli: 3 darab.

# Összegzési alapelv

- Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

- A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv. Számoljuk meg az áfonyát: 5 darab. Ribizli: 4 darab, fekete ribizli: 3 darab. Összesen $5 + 4 + 3$ erdei gyümölcs van a képen.

# Összegzési alapelv (folytatás)

# Összegzési alapelv (folytatás)

- A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk.

# Összegzési alapelv (folytatás)

- A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

# Összegzési alapelv (folytatás)

• A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

• Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

# Összegzési alapelv (folytatás)

- A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

- Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

**Definíció**

Két halmazra azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs közös elemük.

# Összegzési alapelv (folytatás)

- A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

- Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

**Definíció**

Két halmazra azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs közös elemük.

Ha több halmazunk van úgy, hogy mindegyik elemük csak egyetlen egyhez tartozik hozzá, azaz bármelyik kettő diszjunkt, akkor azt mondjuk, hogy halmazaink *páronként diszjunktak*

# Összegzési alapelv: Formalizmus

# Összegzési alapelv: Formalizmus

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

# Összegzési alapelv: Formalizmus

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

- Formulával:

# Összegzési alapelv: Formalizmus

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

- Formulával:

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunktak, akkor $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| \ldots + |A_k|$.

# Összegzési alapelv: Formalizmus

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

- Formulával:

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunktak, akkor $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| \ldots + |A_k|$.

- Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor összeszámolandó elemeinket két ($A$ és $B$) közös elem nélküli halmazba osztjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

# Összegzési alapelv: Formalizmus

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

- Formulával:

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ páronként diszjunktak, akkor $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| \ldots + |A_k|$.

- Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor összeszámolandó elemeinket két ($A$ és $B$) közös elem nélküli halmazba osztjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

- Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján az összeadás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

# Szorzási alapelv

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját.

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt.

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

- Hányat is?

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

- Hányat is? Az első sorban négy, a másodikban is, a harmadikban is.

# Szorzási alapelv

- Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

- Hányat is? Az első sorban négy, a másodikban is, a harmadikban is. Összesen $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket?

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le.
- Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le.
- Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet.
- A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le.
- Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet.
- A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó. Hasonlóan, ha csak a helyet írjuk le, nem tudjuk melyik muffinról is beszélünk.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.)
- A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye.
- A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le.
- Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet.
- A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó. Hasonlóan, ha csak a helyet írjuk le, nem tudjuk melyik muffinról is beszélünk. Ezek csak egy „komponensek” az összeszámolandó objektumok leírásában.

# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten.

# Szorzási alapelv (folytatás)

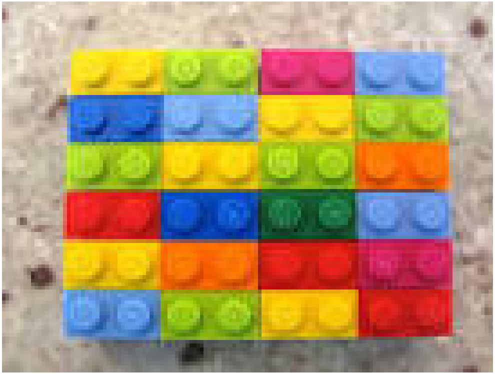
- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?

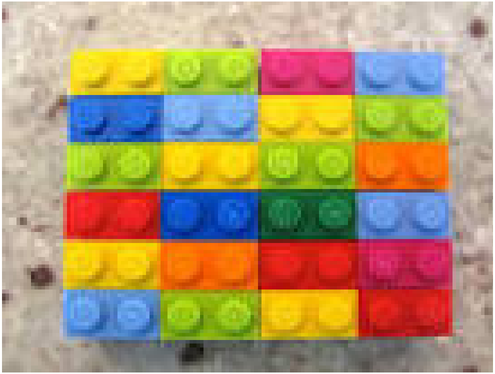
# Szorzási alapelv (folytatás)

- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?



# Szorzási alapelv (folytatás)

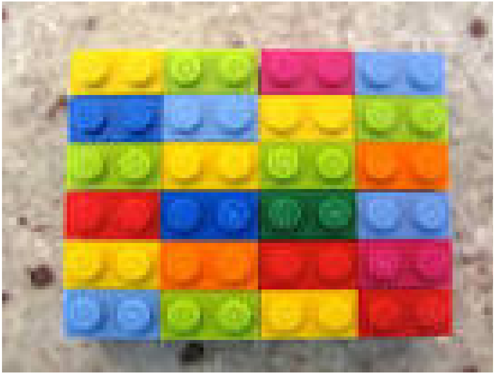
- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?



- 6 sor mindegyikében 4 pozíció.

# Szorzási alapelv (folytatás)

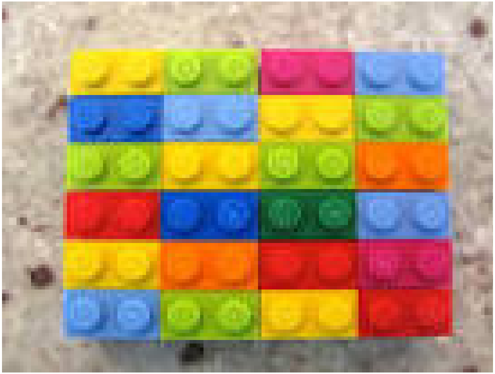
- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?



- 6 sor mindegyikében 4 pozíció. A (sor, pozíció) párokra a lehetőségek száma $6 \cdot 4 = 24$,

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Kisfiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehette ezt meg?



- 6 sor mindegyikében 4 pozíció. A (sor, pozíció) párokra a lehetőségek száma $6 \cdot 4 = 24$, ami a szükséges/látott lego darabok száma .

# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga egyetemre jár.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

- Hány hallgató számára van ülőhely a teremben?

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

- Hány hallgató számára van ülőhely a teremben? A válasz nyilvánvaló: $4 \cdot 10 = 40$.

# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga kollégiumi szobájának ablakából kinézve az alábbi képet látja:

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga kollégiumi szobájának ablákából kinézve az alábbi képet látja:

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga kollégiumi szobájának ablakából kinézve az alábbi képet látja:

- Hány ablakot lát?

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga kollégiumi szobájának ablakából kinézve az alábbi képet látja:

- Hány ablakot lát? A ház öt szintes és mindegyiken nyolc ablak van (egy kicsi és hét nagy).

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Olga kollégiumi szobájának ablákából kinézve az alábbi képet látja:

- Hány ablakot lát? A ház öt szintes és mindegyiken nyolc ablak van (egy kicsi és hét nagy). Összesen $5 \cdot 8 = 40$ ablakot lát Olga, ha kinéz az ablakán.

# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Hány mező van a sakktáblán?

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Hány mező van a sakktáblán?

- A mezők 8 sorba és 8 oszlopba vannak rendezve. A mezők pontosan azonosíthatók, ha megadjuk melyik sorban és melyik oszlopban van a leírandó mezőnk.

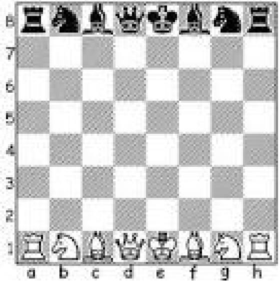
# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva $a, b, c, d, e, f, g, h$ „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:

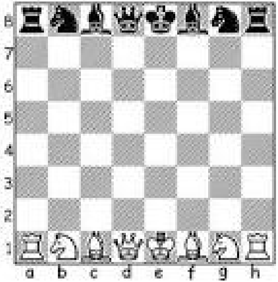
# Szorzási alapelv (folytatás)

- A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva $a, b, c, d, e, f, g, h$ „neveket", a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket" kapnak:



# Szorzási alapelv (folytatás)

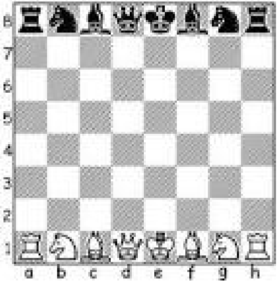
- A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva $a, b, c, d, e, f, g, h$ „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:




- Egy mező például az $a1$: az első mező a legalsó sorban. Vagy $e3$: az ötödik mező az alúlról számított harmadik sorban.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva $a, b, c, d, e, f, g, h$ „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:




- Egy mező például az $a1$: az első mező a legalsó sorban. Vagy $e3$: az ötödik mező az alúlról számított harmadik sorban.

- A mezők ugyanannyian vannak mint a betű-szám párok, ahol a betű az angol ábécé első nyolc betűje köül kerül ki és a szám a pozitív egészek első nyolc elemének egyike.

# Szorzási alapelv: Jelölés

# Szorzási alapelv: Jelölés

- Az ilyen párok halmaza a kétféle lehetőséget adó halmazok Descartes-szorzata, vagy egyszerűen (halmazelméleti) szorzata.

# Szorzási alapelv: Jelölés

- Az ilyen párok halmaza a kétféle lehetőséget adó halmazok Descartes-szorzata, vagy egyszerűen (halmazelméleti) szorzata.

- A fenti „koordináta-rendszer” párjai az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazt alkotják. Ahogy a sík geometria koordináta párjainak halmazára a jelölés $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, röviden $\mathbb{R}^2$.

# Szorzási alapelv: Jelölés

- Az ilyen párok halmaza a kétféle lehetőséget adó halmazok Descartes-szorzata, vagy egyszerűen (halmazelméleti) szorzata.

- A fenti „koordináta-rendszer” párjai az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazt alkotják. Ahogy a sík geometria koordináta párjainak halmazára a jelölés $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, röviden $\mathbb{R}^2$.

## Definíció

$A$ és $B$ halmazok Descartes szorzata $A \times B$ pontosan az $(a, b)$ párokat tartalmazza, ahola $a \in A$ és $b \in B$ tetszőleges elemek.

# Szorzási alapelv

# Szorzási alapelv

- A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében.

# Szorzási alapelv

- A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében. Például három tényezős Descartes-szorzat hármasokat, három hosszú koordinátasorokat tartalmaz, ahol a megfelelő koordináták a megfelelő halmazból jönnek.

# Szorzási alapelv

- A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében. Például három tényezős Descartes-szorzat hármasokat, három hosszú koordinátasorokat tartalmaz, ahol a megfelelő koordináták a megfelelő halmazból jönnek.

**Definíció**

Az $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$ halmazok $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ Descartes-szorzata $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ elem $k$-asokat tartalmaz, ahol az $i$-edik elem/koordináta/komponens az $i$-edik halmazból kerül ki, azaz $a_i \in A_i$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ indexre.

# Szorzási alapelv (folytatás)

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

- Hány doboza volt?

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

- Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámolandó objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság).

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

- Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámolandó objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság). Mindegyik egymástól függetlenül három értéket vehet fel.

# Szorzási alapelv (folytatás)

- Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

- Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámolandó objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság). Mindegyik egymástól függetlenül három értéket vehet fel. A válasz $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

# Szorzási alapelv

# Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

# Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

> Halmazok szorzatának elemszáma
> a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

# Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

> Halmazok szorzatának elemszáma
> a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

- Formulával:

# Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

> Halmazok szorzatának elemszáma
> a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

- Formulával:

> Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok esetén
> $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$.

# Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

> Halmazok szorzatának elemszáma
> a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

- Formulával:

> Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok esetén
> $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$

- Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor két ($A$ és $B$) tényezőnk van:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

# Szorzási alapelv

- Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

> Halmazok szorzatának elemszáma
> a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

- Formulával:

> Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok esetén
> $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$.

- Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor két ($A$ és $B$) tényezőnk van:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

- Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján a szorzás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

# Jelölések

# Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

# Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.
- Az összegzási alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt.

# Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

- Az összegzási alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat $A$-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére.

# Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

- Az összegzási alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat $A$-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja $A_i$, ahol az $i$ értékei az $1, 2, \dots, k$ sorozaton „futnak át”.

# Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

- Az összegzási alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat $A$-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja $A_i$, ahol az $i$ értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. Szerepelt egy összeg is, amely általános tagja az $|A_i|$ elemszám, ahol az $i$ értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”.

# Jelölések

- Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

- Az összegzási alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat $A$-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja $A_i$, ahol az $i$ értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. Szerepelt egy összeg is, amely általános tagja az $|A_i|$ elemszám, ahol az $i$ értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”.

- A középiskolai $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k / \ |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$ jelölésből ki kell találni a sémát, az általános tagot és az indexek futását.

# Jelölések (folytatás)

# Jelölések (folytatás)

- Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i,\quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i,\quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i,\quad \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|,\quad \sum_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|,\quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

# Jelölések (folytatás)

- Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i,\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{k} A_i,\ \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|,\ \sum_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|,\ \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

- A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k / \ |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

# Jelölések (folytatás)

- Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|, \quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

- A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k / \ |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

$$\prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i, \quad \prod_{i=1}^{k} A_i, \quad \prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|, \quad \prod_{i=1}^{k} |A_i|.$$

# Jelölések (folytatás)

- Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i,\quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i,\quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i,\quad \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|,\quad \sum_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|,\quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

- A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k / \ |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

$$\prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i,\quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i,\quad \prod_{i=1}^{k} A_i,\quad \prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|,\quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|,\quad \prod_{i=1}^{k} |A_i|.$$

- $\Sigma$ az összeg/szumma görög nevének kezdőbetűje. $\Pi$ a szorzat/produktum görög nevének kezdőbetűje.

# Szünet

# Egy alapkérdés

# Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

# Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen.

# Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen. Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak?

# Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen. Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak?
- Ez az egyszerű kérdés nem állít komoly feladat elé.

# Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen. Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak?

- Ez az egyszerű kérdés nem állít komoly feladat elé. Vesszük a „kedvenc” négy elemű halmazunkat, mondjuk a $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazt.

# Egy alapkérdés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- Érdemes egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen. Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak?

- Ez az egyszerű kérdés nem állít komoly feladat elé. Vesszük a „kedvenc” négy elemű halmazunkat, mondjuk a $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazt.

- Ennek részhalmazai:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

# Az alapkérdés (folytatás)

# Az alapkérdés (folytatás)

- A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk:

# Az alapkérdés (folytatás)

- A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk: Először az üres halmazt (az egyetlen 0 elemszámú részhalmazt) írtuk le, majd az egy elemű részhalmazokat, amelyeket a két eleműek, majd a három és végül a négy eleműek követtek.

# Az alapkérdés (folytatás)

- A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk: Először az üres halmazt (az egyetlen 0 elemszámú részhalmazt) írtuk le, majd az egy elemű részhalmazokat, amelyeket a két eleműek, majd a három és végül a négy eleműek követtek. Az azonos elemszámú részhalmazok közül a 1-et tartalmazókkal kezdtünk, ezek sorrendejét a a második legkisebb (ha azok is megegyeztek akkor a harmadik legkisebb) elemek határozták meg: amelyik részhalmaznál kisebb volt értéke az került előbbre.

# Az alapkérdés (folytatás)

- A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk: Először az üres halmazt (az egyetlen 0 elemszámú részhalmazt) írtuk le, majd az egy elemű részhalmazokat, amelyeket a két eleműek, majd a három és végül a négy eleműek követtek. Az azonos elemszámú részhalmazok közül a 1-et tartalmazókkal kezdtünk, ezek sorrendejét a a második legkisebb (ha azok is megegyeztek akkor a harmadik legkisebb) elemek határozták meg: amelyik részhalmaznál kisebb volt értéke az került előbbre.

- Ez a rendező elv nemcsak munkánk megszervezésében volt segítségünkre. Ez adott alapot arra, hogy meggyőződéssel állíthassuk listánk teljes és minden részhalmazt egyszer sorol fel. Tehát a kérdésre a válasz az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak tizenhat részhalmaza van.

# Az alapkérdés (folytatás)

# Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt.

# Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

lett volna.

# Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk.

# Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk.

- Vehettük volna a

$$\{\text{tavasz}, \text{nyár}, \text{ősz}, \text{tél}\},$$

vagy

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

halmazt, illetve sok más négy elemű halmazt.

# Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk.

- Vehettük volna a

$$\{\text{tavasz}, \text{nyár}, \text{ősz}, \text{tél}\},$$

vagy

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

halmazt, illetve sok más négy elemű halmazt.

- Mindig ugyanazt az eredményt kaptuk volna?

# Az alapkérdés (folytatás)

- Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk.

- Vehettük volna a

$$\{\text{tavasz}, \text{nyár}, \text{ősz}, \text{tél}\},$$

vagy

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$$

halmazt, illetve sok más négy elemű halmazt.

- Mindig ugyanazt az eredményt kaptuk volna? Jól van kitűzve alapkérdésünk?

# A Tétel

# A Tétel

- Természetesen igen.

# A Tétel

- Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van.

# A Tétel

- Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni?

# A Tétel

- Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni? Hogy tudjuk a következő tételt igazolni?

# A Tétel

- Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni? Hogy tudjuk a következő tételt igazolni?

**Tétel**

Legyen $A$ és $B$ két azonos elemszámú, azaz párba állítható halmaz. Ekkor részhalmazai által alkotott $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ halmazok is azonos elemszámúak, azaz párbaállíthatók.

# A Tétel

- Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni? Hogy tudjuk a következő tételt igazolni?

**Tétel**

Legyen $A$ és $B$ két azonos elemszámú, azaz párba állítható halmaz. Ekkor részhalmazai által alkotott $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ halmazok is azonos elemszámúak, azaz párbaállíthatók.

Formálisan

# A Tétel

• Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy azonos elemszámú halmazoknak ugyanannyi részhalmazuk van. Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni? Hogy tudjuk a következő tételt igazolni?

**Tétel**

Legyen $A$ és $B$ két azonos elemszámú, azaz párba állítható halmaz. Ekkor részhalmazai által alkotott $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ halmazok is azonos elemszámúak, azaz párbaállíthatók.

Formálisan

$$A \sim B \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B).$$

# A Bizonyítás

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t:

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá $R$-hez.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá $R$-hez.
- Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá $R$-hez.
- Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$.
- Belátjuk, hogy az így leírt $\phi$ leképézés párbaállító leképezés.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá $R$-hez.
- Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$.
- Belátjuk, hogy az így leírt $\phi$ leképézés párbaállító leképezés.
- Valóban ha $S \in \mathcal{P}(B)$ adott, akkor az a fejtőrő, hogy „melyik $A$-beli részhalmaz párja $S$?” egyértelműen megoldható.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja" a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá $R$-hez.
- Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$.
- Belátjuk, hogy az így leírt $\phi$ leképézés párbaállító leképezés.
- Valóban ha $S \in \mathcal{P}(B)$ adott, akkor az a fejtőrő, hogy „melyik $A$-beli részhalmaz párja $S$?" egyértelműen megoldható.
- Össze kell gyűjteni az $S$-beli elemek $\phi$ inverzénél vett képeit.

# A Bizonyítás

- Legyen $\psi$ egy párbaállító leképezés $A$ és $B$ között, amely „bizonyítja” a két halmaz azonos elemszámúságát.
- Megadunk $\mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(B)$ között egy párbaállító leképezést, $\phi$-t: $R \subset A$ minden elemének van egy párja. Ezek a párok $B$ egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá $R$-hez.
- Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$.
- Belátjuk, hogy az így leírt $\phi$ leképézés párbaállító leképezés.
- Valóban ha $S \in \mathcal{P}(B)$ adott, akkor az a fejtőrő, hogy „melyik $A$-beli részhalmaz párja $S$?” egyértelműen megoldható.
- Össze kell gyűjteni az $S$-beli elemek $\phi$ inverzénél vett képeit. Igazából ez a szabály megadja a $\psi$ inverzét.

# Részhalmazok kódolása

# Részhalmazok kódolása

- Egy $H$ véges/$n$ elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

# Részhalmazok kódolása

- Egy $H$ véges/$n$ elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$.

- $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden $i$-re ($i = 1, 2, \dots, n$) megadjuk, hogy a $h_i$ elem benne van-e vagy nem. Egy $h_i$-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége”, egy bit információ.

# Részhalmazok kódolása

- Egy $H$ véges/$n$ elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

- $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden $i$-re ($i = 1, 2, \ldots, n$) megadjuk, hogy a $h_i$ elem benne van-e vagy nem. Egy $h_i$-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége”, egy bit információ.

- Egy bit információ lehetséges értékeit általában 0/1 értékekkel kódolják.

# Részhalmazok kódolása

- Egy $H$ véges/$n$ elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

- $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden $i$-re ($i = 1, 2, \ldots, n$) megadjuk, hogy a $h_i$ elem benne van-e vagy nem. Egy $h_i$-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége”, egy bit információ.

- Egy bit információ lehetséges értékeit általában 0/1 értékekkel kódolják. Esetünkben a $h_i$-hez tartalmazó $k_i$ információ legyen 1, ha $h_i \in R$ és legyen 0, ha $h_i \notin R$.

# Részhalmazok kódolása

- Egy $H$ véges/$n$ elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

- $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden $i$-re ($i = 1, 2, \ldots, n$) megadjuk, hogy a $h_i$ elem benne van-e vagy nem. Egy $h_i$-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége”, egy bit információ.

- Egy bit információ lehetséges értékeit általában $0/1$ értékekkel kódolják. Esetünkben a $h_i$-hez tartalmazó $k_i$ információ legyen 1, ha $h_i \in R$ és legyen 0, ha $h_i \notin R$.

- Formulával

$$k_i = \begin{cases} 0, & h_i \notin R \\ 1, & h_i \in R. \end{cases}$$

# Részhalmazok kódolása

- Egy $H$ véges/$n$ elemű halmaz, azaz $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$.
- $R \subset H$ részhalmazát kódolhatjuk a következő módon: Minden $i$-re ($i = 1, 2, \dots, n$) megadjuk, hogy a $h_i$ elem benne van-e vagy nem. Egy $h_i$-hez tartozó információ az információelmélet „alapegysége", egy bit információ.
- Egy bit információ lehetséges értékeit általában 0/1 értékekkel kódolják. Esetünkben a $h_i$-hez tartalmazó $k_i$ információ legyen 1, ha $h_i \in R$ és legyen 0, ha $h_i \notin R$.
- Formulával

$$k_i = \begin{cases} 0, & h_i \notin R \\ 1, & h_i \in R. \end{cases}$$

- Egy $H \to \{0, 1\}$ függvénnyel írtuk le a részhalmazt.

# Karakterisztikus függvény

# Karakterisztikus függvény

## Példa

| $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

függvény a $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazát írja le.

# Karakterisztikus függvény

**Példa**

| $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

függvény a $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazát írja le.

- A fenti függvény az $R$ részhalmaz ($H$ feletti) karakterisztikus függvénye.

# Karakterisztikus függvény

**Példa**

| $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

függvény a $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazát írja le.

- A fenti függvény az $R$ részhalmaz ($H$ feletti) karakterisztikus függvénye. Jelölése $\chi_R(x) : H \to \{0, 1\}$.

# Karakterisztikus vektor

# Karakterisztikus vektor

- Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával,

# Karakterisztikus vektor

- Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.

# Karakterisztikus vektor

• Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
• Egy az $R$ részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

# Karakterisztikus vektor

- Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
- Egy az $R$ részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

**Példa (folytatás)**

Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

# Karakterisztikus vektor

• Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
• Egy az $R$ részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

**Példa (folytatás)**

Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

• Az tudja a részhalmazt kiolvasni/dekódolni, aki tudja, hogy a második komponens/a második bit a $h_2 \notin H$-re vonatkozó információ (és így tovább).

# Karakterisztikus vektor

• Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
• Egy az $R$ részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

**Példa (folytatás)**

Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

• Az tudja a részhalmazt kiolvasni/dekódolni, aki tudja, hogy a második komponens/a második bit a $h_2 \notin H$-re vonatkozó információ (és így tovább).
• $H$ egy $n$ elemű halmaz volt, így részhalmazainak karakterisztikus vektorai $n$ hosszú bitsorozatok,

# Karakterisztikus vektor

- Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
- Egy az $R$ részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

**Példa (folytatás)**

Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

- Az tudja a részhalmazt kiolvasni/dekódolni, aki tudja, hogy a második komponens/a második bit a $h_2 \notin H$-re vonatkozó információ (és így tovább).
- $H$ egy $n$ elemű halmaz volt, így részhalmazainak karakterisztikus vektorai $n$ hosszú bitsorozatok, azaz $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$ egy eleme, ahol $n$ darab $\{0, 1\}$ tényező van.

# Karakterisztikus vektor

• Ha a $H$ halmaz elemeinek $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sorrendje mindenki számára ismert, akkor a függvény leírható táblázatának második sorával, egy $n$ hosszú szám-/bitsorozattal, vektorral.
• Egy az $R$ részhalmaz $\overrightarrow{\chi}_R$ karakterisztikus vektora.

**Példa (folytatás)**

Az előző példánkban szereplő $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ halmaz $\{h_3, h_5, h_6\}$ részhalmazának karakterisztikus vektora

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

• Az tudja a részhalmazt kiolvasni/dekódolni, aki tudja, hogy a második komponens/a második bit a $h_2 \notin H$-re vonatkozó információ (és így tovább).
• $H$ egy $n$ elemű halmaz volt, így részhalmazainak karakterisztikus vektorai $n$ hosszú bitsorozatok, azaz $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$ egy eleme, ahol $n$ darab $\{0, 1\}$ tényező van. Ezen Descartes-szozat rövid jelölése $\{0, 1\}^n$.

# Az összegzés: Tétel

# Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.

# Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.

- A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény" (adott $v \in \{0,1\}^n$ vektorhoz keressünk $R$ részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus vektora) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{0,1\}^n$ halmaz között $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.

# Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.

- A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény" (adott $v \in \{0,1\}^n$ vektorhoz keressünk $R$ részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus vektora) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{0,1\}^n$ halmaz között $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.

- Első alapelvünk alapján $\mathcal{P}(H)$ és $\{0,1\}^n$ elemszáma ugyanaz (párbaállítottak mint a sétáló óvodások).

# Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.
- A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény” (adott $v \in \{0,1\}^n$ vektorhoz keressünk $R$ részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus vektora) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{0,1\}^n$ halmaz között $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.
- Első alapelvünk alapján $\mathcal{P}(H)$ és $\{0,1\}^n$ elemszáma ugyanaz (párbaállítottak mint a sétáló óvodások).
- A szorzási alapelv alapján $\{0,1\}^n$ elemszáma

$$|\{0,1\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot \ldots \cdot |\{0,1\}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

# Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.

- A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény” (adott $v \in \{0,1\}^n$ vektorhoz keressünk $R$ részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus vektora) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{0,1\}^n$ halmaz között $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.

- Első alapelvünk alapján $\mathcal{P}(H)$ és $\{0,1\}^n$ elemszáma ugyanaz (párbaállítottak mint a sétáló óvodások).

- A szorzási alapelv alapján $\{0,1\}^n$ elemszáma

$$|\{0,1\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot \ldots \cdot |\{0,1\}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

A következő tételt kaptuk.

# Az összegzés: Tétel

- Amit leírtunk egy $\mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$, $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ leképezés.

- A fenti példából az is kiolvasható, hogy a hozzárendeléshez tartozó „rejvény” (adott $v \in \{0,1\}^n$ vektorhoz keressünk $R$ részhalmazt, amelynek ez a karakterisztikus vektora) egyértelműen megoldható. Azaz $\mathcal{P}(H)$ és az $\{0,1\}^n$ halmaz között $R \mapsto \overrightarrow{\chi}_R$ egy párbaállító leképezés/bijekció.

- Első alapelvünk alapján $\mathcal{P}(H)$ és $\{0,1\}^n$ elemszáma ugyanaz (párbaállítottak mint a sétáló óvodások).

- A szorzási alapelv alapján $\{0,1\}^n$ elemszáma

$$|\{0,1\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot \ldots \cdot |\{0,1\}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

A következő tételt kaptuk.

**Tétel**

Egy $n$ elemű halmaznak $2^n$ részhalmaza van.

# Megjegyzések

# Megjegyzések

- A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet.

# Megjegyzések

- A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

# Megjegyzések

- A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott $n$ tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

# Megjegyzések

• A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott $n$ tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett.

# Megjegyzések

- A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott $n$ tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett. „Minden tárgy esetén el kell dönteni, hogy kiválasszuk vagy nem. Az $n$ döntés mindegyikére két lehetőségünk van és a válaszaink függetlenek. A válasz $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. "

# Megjegyzések

- A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott $n$ tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett. „Minden tárgy esetén el kell dönteni, hogy kiválasszuk vagy nem. Az $n$ döntés mindegyikére két lehetőségünk van és a válaszaink függetlenek. A válasz $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. "

- A középiskolás érvelés minden szava fontos.

# Megjegyzések

• A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott $n$ tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett. „Minden tárgy esetén el kell dönteni, hogy kiválasszuk vagy nem. Az $n$ döntés mindegyikére két lehetőségünk van és a válaszaink függetlenek. A válasz $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. "

• A középiskolás érvelés minden szava fontos. Az egyetemi érvelés expliciten hívatkozik azokra az elvekre, amik a bizonyítász „mozgatják".

# Megjegyzések

- A bizonyítás hosszúnak, technikainak, átláthatatlannak tűnhet. Pedig középiskolás anyagról van szó.

Ott pesze a kérdés így hangozhatott: „Adott $n$ tárgy. Néhányat (esetleg mindent, esetleg egyet se) ki kell választanunk. Hány lehetőségünk van?"

Egy lehetséges középiskolai érvelés a következő lehetett. „Minden tárgy esetén el kell dönteni, hogy kiválasszuk vagy nem. Az $n$ döntés mindegyikére két lehetőségünk van és a válaszaink függetlenek. A válasz $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. "

- A középiskolás érvelés minden szava fontos. Az egyetemi érvelés expliciten hívatkozik azokra az elvekre, amik a bizonyítász „mozgatják".

- A következő feladat talán tisztázzá a formalizmus előnyét.

# Páros elemszámú részhalmazok száma

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

- Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt.

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

• Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. $n$ fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

- Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. $n$ fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?
- Most is $n$ döntést kell meghozniuk.

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

- Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. $n$ fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?

- Most is $n$ döntést kell meghozniuk. Mindegyik két kimenetelű: az adott gyümölcsöt elviszik vagy nem.

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

- Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. $n$ fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?

- Most is $n$ döntést kell meghozniuk. Mindegyik két kimenetelű: az adott gyümölcsöt elviszik vagy nem. Mégse $2^n$ a válasz.

# Páros elemszámú részhalmazok száma

**Feladat**

Adott egy $n$ elemű halmaz. Hány páros elemszámú részhalmaza van?

- Kezdetben érdemes egy középiskolás nyelven is megkérdezni ezt. Andi és Béla kirándulni megy. $n$ fajta gyümölcsből szeretnénk összeállítani egy csomagot. Mivel ketten vannak páros sok gyümölcsöt visznek el. Hány lehetőségük van?
- Most is $n$ döntést kell meghozniuk. Mindegyik két kimenetelű: az adott gyümölcsöt elviszik vagy nem. Mégse $2^n$ a válasz.
- Miért?

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.
- Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.
- Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg. Ezek a csomagolás feltételét nem ronthatják el.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.
- Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg. Ezek a csomagolás feltételét nem ronthatják el.
- Az utolsó döntés azonban „kényszerített”.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.

- Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg. Ezek a csomagolás feltételét nem ronthatják el.

- Az utolsó döntés azonban „kényszerített”. Pontosan az egyik kimenetel lesz jó arra, hogy a páros nagyságú gyümölcs-csomagot kialakítsa.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Megoldás

- A döntéseink nem függetlenek.
- Az első $n-1$ döntést függetlenül hozhatjuk meg. Ezek a csomagolás feltételét nem ronthatják el.
- Az utolsó döntés azonban „kényszerített”. Pontosan az egyik kimenetel lesz jó arra, hogy a páros nagyságú gyümölcs-csomagot kialakítsa.
- A fenti érvelés alapján a válasz $2^{n-1}$.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés

- A fentiekkel analóg egyetemi érvelésben egy $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$ leképezést definiálunk, ahol $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ a $H$ halmaz páros elemszámú részhalmazait összegyűjtő halmaz.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés

- A fentiekkel analóg egyetemi érvelésben egy $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$ leképezést definiálunk, ahol $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ a $H$ halmaz páros elemszámú részhalmazait összegyűjtő halmaz.
- Egy $R \in \mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ halmazhoz, azaz $H$ egy páros elemszámú $R$ részhalmazához hozzárendeljük $H \setminus \{h_n\}$-nak $R \setminus \{h_n\}$ részhalmazának karakterisztikus vektorát.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés

- A fentiekkel analóg egyetemi érvelésben egy $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$ leképezést definiálunk, ahol $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ a $H$ halmaz páros elemszámú részhalmazait összegyűjtő halmaz.
- Egy $R \in \mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ halmazhoz, azaz $H$ egy páros elemszámú $R$ részhalmazához hozzárendeljük $H \setminus \{h_n\}$-nak $R \setminus \{h_n\}$ részhalmazának karakterisztikus vektorát.
- Ez a hozzárendelés bijekció, azaz a megfelelő rejtvény egyértelműen megoldható:

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés

- A fentiekkel analóg egyetemi érvelésben egy $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$ leképezést definiálunk, ahol $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ a $H$ halmaz páros elemszámú részhalmazait összegyűjtő halmaz.
- Egy $R \in \mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ halmazhoz, azaz $H$ egy páros elemszámú $R$ részhalmazához hozzárendeljük $H \setminus \{h_n\}$-nak $R \setminus \{h_n\}$ részhalmazának karakterisztikus vektorát.
- Ez a hozzárendelés bijekció, azaz a megfelelő rejtvény egyértelműen megoldható: Adott $n-1$ hosszú bitsorozatból kell kiolvasni egy páros elemszámú részhalmazt.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.
- A rejtvény egyértelműen megoldható.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.
- A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.

- A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze. Ezen inverz léte igazolja a definiált függvény bijektív mivoltát.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.

- A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze. Ezen inverz léte igazolja a definiált függvény bijektív mivoltát.

- Az értelmezési tartomány és értékkészlet azonos elemszámú.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

- Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.

- A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze. Ezen inverz léte igazolja a definiált függvény bijektív mivoltát.

- Az értelmezési tartomány és értékkészlet azonos elemszámú. Az értékkészlet a szorzási alapelv alapján $2^{n-1}$ elemű.

# Páros elemszámú részhalmazok száma: Kibontott érvelés (folytatás)

• Az $n-1$ bit pontosan leírja $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ elemek viszonyát a kitalálandó részhalmazhoz, míg $h_n$-ről nem mond semmit. De ez a hiányzó információ egyértelműen meghatározható abból, hogy páros elemszámú halmazt keresünk.

• A rejtvény egyértelműen megoldható. A kérdéshez rendelt egyértelmű megoldás a fenti kódoló függvény inverze. Ezen inverz léte igazolja a definiált függvény bijektív mivoltát.

• Az értelmezési tartomány és értékkészlet azonos elemszámú. Az értékkészlet a szorzási alapelv alapján $2^{n-1}$ elemű. Így a feltett kérdésre a válasz $2^{n-1}$.

# Kombinatorikus érvelések

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.
- Vannak alternatívák.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.
- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.
- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók. Majd algebrai átalakításokkal manimulálhatók.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.

- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók. Majd algebrai átalakításokkal manimulálhatók. Máskor teljes indukcióval támadható egy bizonyítandó kombinatorikus állítás.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.
- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók. Majd algebrai átalakításokkal manimulálhatók. Máskor teljes indukcióval támadható egy bizonyítandó kombinatorikus állítás.
- Gyakran kombinatorikus azonosságok bal és jobb oldala egy-egy halmaz elemszáma, így a bizonyítandó két halmaz elemszámának azonosságát állítja.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.

- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók. Majd algebrai átalakításokkal manimulálhatók. Máskor teljes indukcióval támadható egy bizonyítandó kombinatorikus állítás.

- Gyakran kombinatorikus azonosságok bal és jobb oldala egy-egy halmaz elemszáma, így a bizonyítandó két halmaz elemszámának azonosságát állítja. A kombinatorikus gondolkozáshoz az áll legközelebb, hogy ezt kombinatorikus alapelvek alapján igazoljuk.

# Kombinatorikus érvelések

- A fenti érvelések kombinatorikus alapelveken alapultak.

- Vannak alternatívák. Vannak képletek, amelyek alapképletekként megtanulhatók. Majd algebrai átalakításokkal manimulálhatók. Máskor teljes indukcióval támadható egy bizonyítandó kombinatorikus állítás.

- Gyakran kombinatorikus azonosságok bal és jobb oldala egy-egy halmaz elemszáma, így a bizonyítandó két halmaz elemszámának azonosságát állítja. A kombinatorikus gondolkozáshoz az áll legközelebb, hogy ezt kombinatorikus alapelvek alapján igazoljuk.

- A kombinatorikus alapelvek felismerése tudásunkat biztosabbá teszi.

# Kombinatorikus érvelések: Mikor adunk össze, mikor szorzunk?

# Kombinatorikus érvelések: Mikor adunk össze, mikor szorzunk?

- Ha látjuk, hogy az összeszámolandó objektumokat csoportosítjuk, a csoportokat külön-külön megszámoljuk, akkor a „részeredmények” mögött összeszámolandó objektumok vannak.

# Kombinatorikus érvelések: Mikor adunk össze, mikor szorzunk?

- Ha látjuk, hogy az összeszámolandó objektumokat csoportosítjuk, a csoportokat külön-külön megszámoljuk, akkor a „részeredmények” mögött összeszámolandó objektumok vannak. A teljes szám a részeredmények összege lesz (amennyiben csoportjaink diszjunktak).

# Kombinatorikus érvelések: Mikor adunk össze, mikor szorzunk?

- Ha látjuk, hogy az összeszámolandó objektumokat csoportosítjuk, a csoportokat külön-külön megszámoljuk, akkor a „részeredmények” mögött összeszámolandó objektumok vannak. A teljes szám a részeredmények összege lesz (amennyiben csoportjaink diszjunktak).

- Ha az összeszámolandó objetumokat komponensekre bontjuk és a komponensekre adódó lehetőségeket számoljuk ki, akkor a részeredmények mögött nem objektumok állnak, hanem ezeknek csak „töredékei”. Ezekből a „töredékekből” áll össze egy objektum.

# Kombinatorikus érvelések: Mikor adunk össze, mikor szorzunk?

- Ha látjuk, hogy az összeszámolandó objektumokat csoportosítjuk, a csoportokat külön-külön megszámoljuk, akkor a „részeredmények" mögött összeszámolandó objektumok vannak. A teljes szám a részeredmények összege lesz (amennyiben csoportjaink diszjunktak).

- Ha az összeszámolandó objetumokat komponensekre bontjuk és a komponensekre adódó lehetőségeket számoljuk ki, akkor a részeredmények mögött nem objektumok állnak, hanem ezeknek csak „töredékei". Ezekből a „töredékekből" áll össze egy objektum. Ha a különböző töredékek szabadon összerakhatók, azaz a töredékek választásai függetlenek (azaz az objektumok halmaza egy Descartes-szorzat), akkor a részeredmények szorzata adja meg a választ.

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi.

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a $H$ halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a $H$ halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.
- A kombinatorikus alapelvekre támaszkodó bizonyítások a lényeget mutatják meg.

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a $H$ halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.

- A kombinatorikus alapelvekre támaszkodó bizonyítások a lényeget mutatják meg. Látjuk mi miatt igaz az állítás.

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a $H$ halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.
- A kombinatorikus alapelvekre támaszkodó bizonyítások a lényeget mutatják meg. Látjuk mi miatt igaz az állítás.
- Gyakran a megoldás módszerét átlátva nem merül fel a kérdés: „Hogyan találta ezt ki valaki?”

# Kombinatorikus érvelések: A haszon

- Ezen gondolatok tisztánlátása a bonyolultabb feladatokat is kezelhetővé teszi. Azt is megjegyezzük, hogy a $H$ halmaz jó csoportokra bontása, illetve Descartes-szorzatként való tekintése gyakran nem nyilvánvaló.

- A kombinatorikus alapelvekre támaszkodó bizonyítások a lényeget mutatják meg. Látjuk mi miatt igaz az állítás.

- Gyakran a megoldás módszerét átlátva nem merül fel a kérdés: „Hogyan találta ezt ki valaki?” Gyakran mi magunk is kitalálhatunk hasonló érveléssel belátható új azonosságokat.

# Egy új érvelés

# Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

# Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- A kérdést már megválaszoltuk, tudjuk a választ.

# Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- A kérdést már megválaszoltuk, tudjuk a választ. Ennek ellenére kezdjük el más vonalon gondolkozni.

# Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- A kérdést már megválaszoltuk, tudjuk a választ. Ennek ellenére kezdjük el más vonalon gondolkozni.

**Definíció**

Legyen $r_n$ egy $n$-elemű halmaz részhalmazainak száma.

# Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- A kérdést már megválaszoltuk, tudjuk a választ. Ennek ellenére kezdjük el más vonalon gondolkozni.

**Definíció**

Legyen $r_n$ egy $n$-elemű halmaz részhalmazainak száma.

- Listázással könnyen látható, hogy

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 8, \quad r_4 = 16.$$

# Egy új érvelés

Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

- A kérdést már megválaszoltuk, tudjuk a választ. Ennek ellenére kezdjük el más vonalon gondolkozni.

**Definíció**

Legyen $r_n$ egy $n$-elemű halmaz részhalmazainak száma.

- Listázással könnyen látható, hogy

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 8, \quad r_4 = 16.$$

- A „séma” jól látható. Ahogy eggyel megnöveljük az alaphalmaz méretét a részhalmazok száma megduplázódik.

# Egy új érvelés

# Egy új érvelés

**Tétel**

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_{n+1} = 2r_n.$$

# Egy új érvelés

**Tétel**

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_{n+1} = 2r_n.$$

- A bizonyítás egyszerű:

$$\mathcal{P}([n+1]) = \{R \subset [n+1] : n+1 \notin R\} \dot\cup \{R \subset [n+1] : n+1 \in R\}.$$

# Egy új érvelés

**Tétel**

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$r_{n+1} = 2r_n.$$

- A bizonyítás egyszerű:

$$\mathcal{P}([n+1]) = \{R \subset [n+1] : n+1 \notin R\} \dot{\cup} \{R \subset [n+1] : n+1 \in R\}.$$

Az unió mindkét tagja párbaállítható $\mathcal{P}([n])$ elemeivel.

# Egy új érvelés

**Tétel**

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_{n+1} = 2r_n.$$

- A bizonyítás egyszerű:

$$\mathcal{P}([n+1]) = \{R \subset [n+1] : n+1 \notin R\} \dot{\cup} \{R \subset [n+1] : n+1 \in R\}.$$

Az unió mindkét tagja párbaállítható $\mathcal{P}([n])$ elemeivel.

- A fenti tétel eredménye és az $r_0 = 1$ információ egyértelműen leírja a sorozatot.

# Egy új érvelés

**Tétel**

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$r_{n+1} = 2r_n.$$

- A bizonyítás egyszerű:

$$\mathcal{P}([n+1]) = \{R \subset [n+1] : n+1 \notin R\} \dot\cup \{R \subset [n+1] : n+1 \in R\}.$$

Az unió mindkét tagja párbaállítható $\mathcal{P}([n])$ elemeivel.

- A fenti tétel eredménye és az $r_0 = 1$ információ egyértelműen leírja a sorozatot.

**Tétel**

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$r_n = 2^n.$$

# Szünet

# Miért működik a matematika?

# Miért működik a matematika?

• A matematika ellentmondásmentességét nem említjük, de jó tudni, hogy az alábbi nyilvánvaló alapelv ennek egy következménye.

HA egy kérdést két módon is, logikailag helyesen válaszolunk meg, AKKOR a két válasz megegyezik.

# Egy példakérdés

# Egy példakérdés

**Példakérdés**

Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? (Az összeadás kommutativitása, asszociativitása miatt a kérdésnek van értelme.)

# Egy példakérdés

**Példakérdés**

Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? (Az összeadás kommutativitása, asszociativitása miatt a kérdésnek van értelme.)

- A válaszra egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük.

# Egy példakérdés

**Példakérdés**

Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? (Az összeadás kommutativitása, asszociativitása miatt a kérdésnek van értelme.)

- A válaszra egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük.
- Egy másik megoldás, hogy mindegyik oszlopban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/oszlopösszegeket összegezzük.

# Egy példakérdés

**Példakérdés**

Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? (Az összeadás kommutativitása, asszociativitása miatt a kérdésnek van értelme.)

- A válaszra egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük.
- Egy másik megoldás, hogy mindegyik oszlopban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/oszlopösszegeket összegezzük.
- Nyilván mindkét eredmény az összes szám összegét adja ki.

# Egy példakérdés

**Példakérdés**

Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? (Az összeadás kommutativitása, asszociativitása miatt a kérdésnek van értelme.)

- A válaszra egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük.
- Egy másik megoldás, hogy mindegyik oszlopban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/oszlopösszegeket összegezzük.
- Nyilván mindkét eredmény az összes szám összegét adja ki. Azaz egy táblázatban a sorösszegek összege megegyezik az oszlopösszegek összegével.

# A példakérdés formálisan

# A példakérdés formálisan

- Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban ($n$ darab sor és $k$ darab oszlop) az $i$-edik sorban és $j$-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

# A példakérdés formálisan

- Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban ($n$ darab sor és $k$ darab oszlop) az $i$-edik sorban és $j$-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

- Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető.

# A példakérdés formálisan

- Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban ($n$ darab sor és $k$ darab oszlop) az $i$-edik sorban és $j$-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

- Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető.

- Az ártatlannak tűnő megállapítás meglepően mély állításokat igazol.

# A példakérdés formálisan

- Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban ($n$ darab sor és $k$ darab oszlop) az $i$-edik sorban és $j$-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

- Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető.
- Az ártatlannak tűnő megállapítás meglepően mély állításokat igazol.
- Egy speciális esete a fentieknek, amikor egy összeszámlálási feladatot kétféleképpen oldunk meg. A két eredménynek ugyanannak kell lennie.

# A példakérdés formálisan

- Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban ($n$ darab sor és $k$ darab oszlop) az $i$-edik sorban és $j$-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

- Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető.
- Az ártatlannak tűnő megállapítás meglepően mély állításokat igazol.
- Egy speciális esete a fentieknek, amikor egy összeszámlálási feladatot kétféleképpen oldunk meg. A két eredménynek ugyanannak kell lennie. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy *kettős összeszámlálást* végzünk.

# Példafeladat

# Példafeladat

## Feladat

Vegyük az $1, 2, \ldots, n$ számok összes/$n$! darab sorbaállítását. Mindegyik esetén számoljuk meg, hány olyan $i$ elem van, amely az $i$-edik helyen áll (azaz $\pi(i) = i$, az ilyen elemeket a $\pi$ sorbaállítás fixpontjainak nevezzük). Azaz minden sorbaállításhoz vegyük fixpontjainak számát. Igazoljuk, hogy az átlagos fixpont-szám éppen 1.

# Példafeladat

## Feladat

Vegyük az $1, 2, \ldots, n$ számok összes/$n$! darab sorbaállítását. Mindegyik esetén számoljuk meg, hány olyan $i$ elem van, amely az $i$-edik helyen áll (azaz $\pi(i) = i$, az ilyen elemeket a $\pi$ sorbaállítás fixpontjainak nevezzük). Azaz minden sorbaállításhoz vegyük fixpontjainak számát. Igazoljuk, hogy az átlagos fixpont-szám éppen 1.

## Példa

Az $1, 2, 3$ számoknak $3! = 6$ sorbállítása van: 123, 132, 213, 231, 312, 321. A fixpontok száma rendre: 3, 1, 1, 0, 0, 1. Az átlag valóban éppen $(3 + 1 + 1 + 1)/6 = 1$.

# Példafeladat: Megoldás

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot.

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak.

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont.

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont. Különben álljon 0.

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont. Különben álljon 0.
- Mennyi a táblázatban szereplő számok összege?

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont. Különben álljon 0.

- Mennyi a táblázatban szereplő számok összege? Másképpen: Hány olyan $(\pi, i)$ pár van, amelyre $\pi(i) = i$?

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont. Különben álljon 0.

- Mennyi a táblázatban szereplő számok összege? Másképpen: Hány olyan $(\pi, i)$ pár van, amelyre $\pi(i) = i$?

- Minden sorban a megfelelő sorbaállítás fixpontjainak számát adja az összegzés.

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont. Különben álljon 0.

- Mennyi a táblázatban szereplő számok összege? Másképpen: Hány olyan $(\pi, i)$ pár van, amelyre $\pi(i) = i$?

- Minden sorban a megfelelő sorbaállítás fixpontjainak számát adja az összegzés. A sorösszegek összege éppen az összes fixpontszám,

# Példafeladat: Megoldás

- A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy sorbaállításnak felel meg. Oszlopai a sorbaállított elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonosítottak. Az $\pi$ sorbaállításnak megfelelő sor és az $i$ elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz $i$ fixpont. Különben álljon 0.

- Mennyi a táblázatban szereplő számok összege? Másképpen: Hány olyan $(\pi, i)$ pár van, amelyre $\pi(i) = i$?

- Minden sorban a megfelelő sorbaállítás fixpontjainak számát adja az összegzés. A sorösszegek összege éppen az összes fixpontszám, az átlagos fixpontszám $n!$-szorosa.

# Példafeladat: Megoldás (folytatás)

# Példafeladat: Megoldás (folytatás)

- Az első oszlop elemeit összegezve azokat a $\pi$ sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$.

# Példafeladat: Megoldás (folytatás)

- Az első oszlop elemeit összegezve azokat a $\pi$ sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$.

- Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi/$n-1$ darab elemet ennyiféleképpen álíthatjuk sorba.

# Példafeladat: Megoldás (folytatás)

- Az első oszlop elemeit összegezve azokat a $\pi$ sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$.
- Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi/$n-1$ darab elemet ennyiféleképpen álíthatjuk sorba.
- Ugyanez az összeg lesz az öszes többi oszlopban is.

# Példafeladat: Megoldás (folytatás)

- Az első oszlop elemeit összegezve azokat a $\pi$ sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$.
- Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi/$n-1$ darab elemet ennyiféleképpen álíthatjuk sorba.
- Ugyanez az összeg lesz az öszes többi oszlopban is. Így az oszlopösszegek összege $n \cdot (n-1)! = n!$.

# Példafeladat: Megoldás (folytatás)

- Az első oszlop elemeit összegezve azokat a $\pi$ sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$.
- Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi/$n-1$ darab elemet ennyiféleképpen álíthatjuk sorba.
- Ugyanez az összeg lesz az öszes többi oszlopban is. Így az oszlopösszegek összege $n \cdot (n-1)! = n!$.
- A két eredmény összevetéséből adódik az állítás.

# Szünet

# Közepek

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$.

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v: v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk.

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek”.

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek". A számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek". A számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy számaink pozitívak.

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek”. A számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy számaink pozitívak. A mértani közép

$$G(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n},$$

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v: v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek". A számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy számaink pozitívak. A mértani közép

$$G(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n},$$

a harmonikus közép

$$H(v) = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}},$$

# Közepek

- Adott $n$ valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.
- További fontos paraméterek a „közepek”. A számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy számaink pozitívak. A mértani közép

$$G(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n},$$

a harmonikus közép

$$H(v) = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}},$$

négyzetes közép

$$Q(v) = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}}.$$

# Az alaptétel

# Az alaptétel

## Alaptétel

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

# Az alaptétel

**Alaptétel**

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.

# Az alaptétel

**Alaptétel**

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.
- Egy speciális részét kiemelem:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

# Az alaptétel

**Alaptétel**

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.
- Egy speciális részét kiemelem:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

- Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke.

# Az alaptétel

**Alaptétel**

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.
- Egy speciális részét kiemelem:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

- Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke. Igazolása például indirekten történhet.

# Az alaptétel

**Alaptétel**

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.
- Egy speciális részét kiemelem:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

- Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke. Igazolása például indirekten történhet.
- Tegyük fel, hogy $A(v) \leq \max(v)$ nem teljesül, azaz mindegyik $v_i$ kisebb mint $A(v)$.

# Az alaptétel

**Alaptétel**

Pozitív $v_i$ számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

- Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.
- Egy speciális részét kiemelem:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

- Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke. Igazolása például indirekten történhet.
- Tegyük fel, hogy $A(v) \leq \max(v)$ nem teljesül, azaz mindegyik $v_i$ kisebb mint $A(v)$. Az így kapott $n$ egyenlőtlenség összege ellentmondás (azonos irányban álló szigorú egyenlőtlenségek összegezhetők).

# A skatulyaelv: Előkészületek

# A skatulyaelv: Előkészületek

- A kombinatorikában a következő speciális eset nagyon fontos lesz.

# A skatulyaelv: Előkészületek

- A kombinatorikában a következő speciális eset nagyon fontos lesz.
- Adott $t$ tárgyunk és $s$ skatulyánk. A $t$ tárgyat osszuk szét a skatulyák között.

# A skatulyaelv: Előkészületek

- A kombinatorikában a következő speciális eset nagyon fontos lesz.

- Adott $t$ tárgyunk és $s$ skatulyánk. A $t$ tárgyat osszuk szét a skatulyák között.

- Az $i$-edik skatulyába került tárgyak száma legyen $v_i$. (Tehát $v_i$ egy 0 és $t$ közötti egész szám. Ha $v_i = 0$, akkor egy tárgyat se raktunk az $i$-edik skatulyába. Ha $v_i = t$, akkor mindegyik tárgyat az $i$-edik skatulyába raktuk.)

# A skatulyaelv: Előkészületek

- A kombinatorikában a következő speciális eset nagyon fontos lesz.

- Adott $t$ tárgyunk és $s$ skatulyánk. A $t$ tárgyat osszuk szét a skatulyák között.

- Az $i$-edik skatulyába került tárgyak száma legyen $v_i$. (Tehát $v_i$ egy 0 és $t$ közötti egész szám. Ha $v_i = 0$, akkor egy tárgyat se raktunk az $i$-edik skatulyába. Ha $v_i = t$, akkor mindegyik tárgyat az $i$-edik skatulyába raktuk.)

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_s}{s} = \frac{t}{s},$$

az átlagos skatulya-terheltség.

# A Skatulyaelv

# A Skatulyaelv

- A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

# A Skatulyaelv

- A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

HA $t$ tárgyat $s$ skatulyába osztunk szét,
AKKOR lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{t}{s}$ tárgy esik,
és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{t}{s}$ tárgy esik.

# A Skatulyaelv

- A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

HA $t$ tárgyat $s$ skatulyába osztunk szét,
AKKOR lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{t}{s}$ tárgy esik,
és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{t}{s}$ tárgy esik.

- A skatulya-elv fenti nagyon általános megfogalmazását gyakran speciális esetekben alkalmazzuk.

# A Skatulyaelv

• A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

HA $t$ tárgyat $s$ skatulyába osztunk szét,
AKKOR lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{t}{s}$ tárgy esik,
és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{t}{s}$ tárgy esik.

• A skatulya-elv fenti nagyon általános megfogalmazását gyakran speciális esetekben alkalmazzuk.
• Érdemes néhány speciális esetet külön megfogalmazni.

# Skatulyaelv: Speciális esetek

# Skatulyaelv: Speciális esetek

**Tétel**

Ha $n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.

# Skatulyaelv: Speciális esetek

**Tétel**

Ha $n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.

**Tétel**

Ha $\ell n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amelybe legalább $\ell+1$ tárgyat is tartalmaz.

# Skatulyaelv: Speciális esetek

**Tétel**

Ha $n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.

**Tétel**

Ha $\ell n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amelybe legalább $\ell+1$ tárgyat is tartalmaz.

**Tétel**

Ha $n-1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely üres marad.

# Skatulyaelv: Speciális esetek

**Tétel**

Ha $n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.

**Tétel**

Ha $\ell n+1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amelybe legalább $\ell+1$ tárgyat is tartalmaz.

**Tétel**

Ha $n-1$ tárgyat $n$ skatulyába osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely üres marad.

Az állításaink megint „triviálisak”. Mégis ügyes alkalmazással mély/nehéz eredményeket lehet elérni.

# Dirichlet egy tétele

# Dirichlet egy tétele

## Dirichlet-tétel

Legyen $\alpha$ irracionális szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok $p, q$ egész szám, amelyekre

$$|p\alpha - q| < \frac{1}{p}, \text{ azaz } \left|\alpha - \frac{q}{p}\right| \leq \frac{1}{p^2}.$$

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen $N$ egy tetszőleges pozitív egész.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen $N$ egy tetszőleges pozitív egész.
- Vegyük az $\{0\cdot\alpha\}, \{1\cdot\alpha\}, \{2\cdot\alpha\}, \ldots, \{(N-1)\cdot\alpha\}, \{N\cdot\alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0,1]$ intervallumban.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen $N$ egy tetszőleges pozitív egész.
- Vegyük az $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{(N-1) \cdot \alpha\}, \{N \cdot \alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0, 1]$ intervallumban.
- Ekkor $N$ különböző(!) számot kapunk a $(0, 1) = ]0, 1[$ intervallumban (miért?).

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen $N$ egy tetszőleges pozitív egész.
- Vegyük az $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{(N-1) \cdot \alpha\}, \{N \cdot \alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0, 1]$ intervallumban.
- Ekkor $N$ különböző(!) számot kapunk a $(0, 1) = ]0, 1[$ intervallumban (miért?).
- Ezek balról jobbra tekintve (ez nem szükségszerűen ugyanaz a sorrend mint ahogy kezdetben felsoroltuk őket) az intervallumunkat $N + 1$ részszakaszra osztják.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen $N$ egy tetszőleges pozitív egész.
- Vegyük az $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \ldots, \{(N-1) \cdot \alpha\}, \{N \cdot \alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0, 1]$ intervallumban.
- Ekkor $N$ különböző(!) számot kapunk a $(0, 1) = ]0, 1[$ intervallumban (miért?).
- Ezek balról jobbra tekintve (ez nem szükségszerűen ugyanaz a sorrend mint ahogy kezdetben felsoroltuk őket) az intervallumunkat $N + 1$ részszakaszra osztják.
- Az átlagos hossza a szakaszoknak $\frac{1}{N+1}$. Így lesz olyan két egymásutáni pont/szám amely legfeljebb $\frac{1}{N+1}$ közel van egymáshoz.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás

- Legyen $N$ egy tetszőleges pozitív egész.
- Vegyük az $\{0\cdot\alpha\}, \{1\cdot\alpha\}, \{2\cdot\alpha\}, \ldots, \{(N-1)\cdot\alpha\}, \{N\cdot\alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0,1]$ intervallumban.
- Ekkor $N$ különböző(!) számot kapunk a $(0,1) = ]0,1[$ intervallumban (miért?).
- Ezek balról jobbra tekintve (ez nem szükségszerűen ugyanaz a sorrend mint ahogy kezdetben felsoroltuk őket) az intervallumunkat $N+1$ részszakaszra osztják.
- Az átlagos hossza a szakaszoknak $\frac{1}{N+1}$. Így lesz olyan két egymásutáni pont/szám amely legfeljebb $\frac{1}{N+1}$ közel van egymáshoz.
- Azaz

$$0 < \{k_1\cdot\alpha\} - \{k_2\cdot\alpha\} \le \frac{1}{N+1},$$

(esetleg $0 < 1 - \{k_2\cdot\alpha\} \le 1/(N+1)$).

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas $\ell_1$, $\ell_2$ egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas $\ell_1$, $\ell_2$ egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas $\ell_1$, $\ell_2$ egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

- Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas $\ell_1$, $\ell_2$ egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

- Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$. Ekkor nyilván $p \neq 0$ és $|p| \leq N$.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas $\ell_1$, $\ell_2$ egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

- Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$. Ekkor nyilván $p \neq 0$ és $|p| \leq N$.
- Speciálisan

$$0 < p \cdot \alpha - q \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{|p|}.$$

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- Így alkalmas $\ell_1$, $\ell_2$ egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

- Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$. Ekkor nyilván $p \neq 0$ és $|p| \leq N$.
- Speciálisan

$$0 < p \cdot \alpha - q \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{|p|}.$$

- Azaz találtunk egy jó $(p, q)$ párt (másikat mint a triviális $(0, 0)$).

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő $(p, q)$ párhoz egy tetszőleges $N$ pozitív egész választásan alapult.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő $(p, q)$ párhoz egy tetszőleges $N$ pozitív egész választásan alapult.
- Ha már találtunk valahány jó $(p, q)$ párt, akkor vegyük

$$\delta(p, q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő $(p, q)$ párhoz egy tetszőleges $N$ pozitív egész választásan alapult.
- Ha már találtunk valahány jó $(p, q)$ párt, akkor vegyük

$$\delta(p, q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát.

- Válasszunk olyan $N$-et, hogy ennél a minimumnál kisebb legyen $\frac{1}{N+1}$.

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő $(p, q)$ párhoz egy tetszőleges $N$ pozitív egész választásan alapult.

- Ha már találtunk valahány jó $(p, q)$ párt, akkor vegyük

$$\delta(p, q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát.

- Válasszunk olyan $N$-et, hogy ennél a minimumnál kisebb legyen $\frac{1}{N+1}$.

- A fenti eljárást ezzel a $N$-nel megismételve biztos újabb (eddig meg nem talált) $(p, q)$ párt találunk. (Miért?)

# Dirichlet-tétel: Bizonyítás (folytatás)

- A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő $(p, q)$ párhoz egy tetszőleges $N$ pozitív egész választásan alapult.
- Ha már találtunk valahány jó $(p, q)$ párt, akkor vegyük

$$\delta(p, q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát.

- Válasszunk olyan $N$-et, hogy ennél a minimumnál kisebb legyen $\frac{1}{N+1}$.
- A fenti eljárást ezzel a $N$-nel megismételve biztos újabb (eddig meg nem talált) $(p, q)$ párt találunk. (Miért?)
- Ez igazolja az állítást.

# Geometriai skaulyaelv

# Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha $n$ skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több.

# Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha $n$ skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb $n$ tárgy helyezhető el.

# Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha $n$ skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb $n$ tárgy helyezhető el.
- Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást:

# Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha $n$ skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb $n$ tárgy helyezhető el.

- Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást: Egy legfeljebb $n$ területű alakzatba 1 területű alakzatokat helyezünk átfedés nélkül. Ekkor legfeljebb $n$ „számára van hely”.

# Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha $n$ skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb $n$ tárgy helyezhető el.

- Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást: Egy legfeljebb $n$ területű alakzatba 1 területű alakzatokat helyezünk átfedés nélkül. Ekkor legfeljebb $n$ „számára van hely”.

- Ezekután természetes kimondani a következő tételt:

# Geometriai skaulyaelv

- A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha $n$ skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb $n$ tárgy helyezhető el.
- Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást: Egy legfeljebb $n$ területű alakzatba 1 területű alakzatokat helyezünk átfedés nélkül. Ekkor legfeljebb $n$ „számára van hely”.
- Ezekután természetes kimondani a következő tételt:

**Tétel**

Egy adott $A$ területű alakzatba $A_1, A_2, \ldots, A_k$ területű alakzatokat pakolunk. Ha $A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \ell \cdot A$, akkor bárhogy végezzük is a pakolást, lesz olyan pont alakzatunkban, amelyet legalább $\ell + 1$ bepakolt alakzat lefed.

# Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

# Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

- A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom.

# Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

- A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása csak nagyon speciális esetekben történik meg a középiskolában.

# Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

- A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása csak nagyon speciális esetekben történik meg a középiskolában. Legtöbb speciális esetben alakzataink „szépek”. Például körök, háromszögek, téglalapok.

# Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

- A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása csak nagyon speciális esetekben történik meg a középiskolában. Legtöbb speciális esetben alakzataink „szépek”. Például körök, háromszögek, téglalapok.
- Ekkor a fenti tétel/elv középiskolás szemmel is jól érthető és nyilvánvaló.

# Geometriai skaulyaelv: Megjegyzések

- A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása csak nagyon speciális esetekben történik meg a középiskolában. Legtöbb speciális esetben alakzataink „szépek”. Például körök, háromszögek, téglalapok.
- Ekkor a fenti tétel/elv középiskolás szemmel is jól érthető és nyilvánvaló.
- Geometriai eredmények nyerhetők kombinatorikus gondolatokkal.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!