KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Gráfok színezése

Gyakorlatvezetõ: Hajnal Péter 2020.

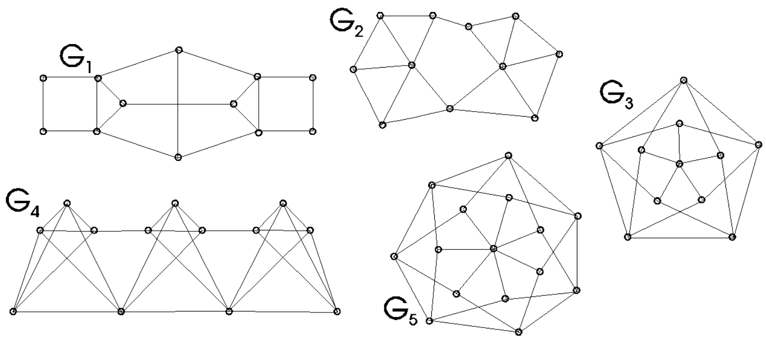
1. Feladat. *A sík pontjait kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz két pont, amelyek távolsága egységnyi, és amelyek azonos színűek lesznek.*

2. Feladat. *A sík pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetsző-leges színezés esetén lesz két pont, amelyek távolsága egységnyi, és amelyek azonos színűek.*

3. Feladat. *Színezzük ki a síkot hét színnel úgy, hogy egységnyi távolságú pontok különböző színűek legyenek.*

4. Feladat. *Az* $1, 2, \ldots, n$ *természetes számokat úgy akarjuk beosztani valahány osztályba, hogy egyik osztályban se legyen együtt egy szám és a kétszerese. Legalább hány osztályra van szükségünk?*

5. Feladat. *állapítsuk meg az alábbi ábrán látható gráfok kromatikus számait:*



6. Feladat. *Definiáljuk a következő egyszerű gráfot: A gráf csúcsai egy sakktábla mezői; két csúcsot összekötünk, ha az egyik által reprezentált mezőről egy*

a) huszár *b) király* *c) bástya*

szabályos lépéssel a másik csúcs által reprezentált mezőre léphet. Az egyes esetekben mi a kapott gráf kromatikus száma?

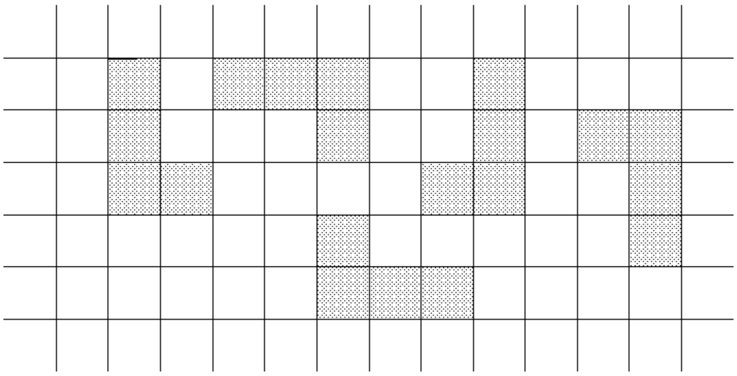
7. Feladat. *Az* $1, 2, \ldots, n$ *természetes számokat úgy akarjuk kiszínezni, hogy a relatív prímszámok különböző színt kapjanak. Legalább hány színre van szükségünk?*

8. Feladat. *Legalább hány csoportba kell beosztanunk az első száz pozitív egész számot, ha azt akarjuk, hogy egyetlen csoportban se legyen két olyan szám, amelyek egyike többszöröse a másiknak?*

9. Feladat. *Legalább hány szín kell egy végtelen négyzethálós papír négyzeteinek színezéséhez, ha azt akarjuk, hogy*

a) semelyik két, egymástól 6 távolságra lévő négyzet ne legyen ugyanolyan színű? (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk; két négyzet közti távolság az a minimális lépésszám, amivel az egyikről a másikra juthatunk, ha egy lépéssel egy mezőről egy tetszőleges szomszédos mezőre léphetünk.)

b) egy „L alak" által lefedett négy mező színe különböző legyen (egy L alak definíciója a következő ábráról leolvasható).



10. Feladat. *Egy egyenesen felveszünk* $2^n + 1$ *pontot. Az általuk meghatározott* $\binom{2^n+1}{2}$ *szakasz mindegyikére mint átmérőre egy kört rajzolunk. A körök mindegyikét kifestjük adott* n *szín valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy található két, egymást kívülről érintő kör, amelyek ugyanolyan színűek.*

Mi a helyzet, ha csupán 2^n *darab pontból indulunk ki?*

11. Feladat. *Egy egyenesen felveszünk* N *pontot, és az általuk meghatározott* $\binom{N}{2}$ *szakasz mindegyikére mint átmérőre kört rajzolunk.*

a) A köröket szeretnénk úgy kiszínezni, hogy ne legyen két olyan azonos színű kör, amelyek körlapja (a határpontokat is beleértve) diszjunkt. Mi a szükséges színek minimális száma?

Mi a szükséges színek minimális száma, ha a színezésre tett feltételt a következőkkel helyettesítjük:

b) Ne legyen két olyan azonos színű kör, hogy az egyik által meghatározott körlap része a másik körlapnak.

c) Ne legyen két olyan azonos színű, egymást érintő kör, amelyeknél az érintési pont mindkét körnek az egyenesen lévő, legjobban balra eső pontja.

d) Ne legyen két azonos színű metsző kör. (Két kör metsző, ha kerületüknek pontosan két közös pontja van.)

12. Feladat. *Egy körön felveszünk* N *pontot, és behúzzuk az általuk meghatározott* $\binom{N}{2}$ *zárt szakaszt.*

a) A szakaszokat kiszínezzük úgy, hogy ne legyen két azonos színű metsző szakasz. (Két szakasz metszi egymást, ha van közös belső pontjuk.) Határozzuk meg a szükséges színek minimális számát.

b) Mi lesz ez a szám, ha a színezésre azt kötjük ki, hogy ne legyen két azonos színű közös végponttal rendelkező szakasz?

13. Feladat. *(i) Bizonyítsuk be, ha egy G gráfban van k pont úgy, hogy mindegyik össze van kötve a másikkal, akkor $\chi(G) \geq k$.*

(ii) Egy G gráfban nincs $k+1$ pont úgy, hogy bármely kettő össze van kötve. Igaz-e, hogy a G gráf k színnel jól színezhető?

(iii) Egy G gráfban nincs háromszög (három pont úgy, hogy bármely kettő össze van kötve). Mit mondhatunk G kromatikus számáról?

14. Feladat. *Egy G gráfban nincs két olyan e és f él, amelyek végpontjai egy négyelemű halmazt alkotnak, és ezen a halmazon belül csak az e és az f él halad.*

Tudjuk, hogy G-ben nincs $k+1$ pont, amelyek mindegyike össze lenne kötve egymással. Adjunk becslést G kromatikus számára.

15. Feladat. *Legyen π a gráf pontjainak egy sorbaállítása. A pontokat ezen sorbaállítás szerinti sorrendben kiszínezzük a pozitív egész számokkal. Az első pont az 1 színt kapja. Az i-edik pont színe a szóba jövő minimális szám (azaz az a minimális szám, ami nem fordul elő a vizsgált csúcs már színezett szomszédai színeként). Legyen $\chi_{mohó,\pi}(G)$ a G gráf színezéséhez felhasznált színek száma.*

a) Bizonyítsuk be, hogy minden G gráf esetén van a gráf pontjainak olyan π sorbaállítása, hogy

$$\chi_{mohó,\pi}(G) = \chi(G).$$

b) Mit mondhatunk az eljárásról, ha π-t nem mi választjuk?

16. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú G gráf esetén pontjainak tetszőleges π sorbaállítására*

$$\chi_{mohó,\pi}(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\chi(G)}{2} \right\rfloor.$$

17. Feladat. *Egy gráfban minden pont foka legfeljebb D. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq D+1$.*

18. Feladat. *Határozzuk meg azokat a gráfokat, amelyek minden pontjának foka legfeljebb 2, és nincs jó színezése két színnel.*

19. Feladat. *Határozzuk meg azokat a gráfokat, amelyek minden pontjának foka legfeljebb 3, és nincs jó színezése három színnel.*

20. Feladat. *A síkon véges sok egységoldalú négyzetet helyezünk el úgy, hogy oldalaik a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. A sík bármely pontját legfeljebb két négyzetlap fedi. Mutassuk meg, hogy a négyzetlapok beoszthatók legfeljebb három csoportba úgy, hogy minden csoportban páronként közös pont nélküli négyzetlapok legyenek.*

21. Feladat. *Egy sakkedzésen minden játékos legfeljebb k pontot szerzett. (Döntetlenért fél pont, győzelemért egy pont jár.) Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

a) van olyan játékos, aki legfeljebb $2k$ mérkőzést játszott, *b) a játékosok elhelyezkedhetnek legfeljebb $2k+1$ teremben úgy, hogy az azonos terembe kerülő játékosok nem játszottak egymással.*

22. Feladat. *Húzzunk a síkon néhány egyenest. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező metszéspontok kiszínezhetők három színnel úgy, hogy ha két pont egy egyenesen van, és nincs köztük másik metszéspont, akkor különböző színűek legyenek.*

23. Feladat. *Húzzunk a síkon néhány egyenest. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Két tartomány szomszédos, ha van közös határoló szakaszuk.)*

24. Feladat. *A síkot néhány kör tartományokra osztja. Bizonyítsuk be, hogy a tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek.*

25. Feladat. *Egy országban kör alakú autópályákat építettek. Bizonyítsuk be, hogy az autópályák kereszteződéseiben létesíthetők kétszintű kereszteződések úgy, hogy tetszőleges autópályán körbehaladva a felső, illetve alsó szintek váltakozzanak.*

26. Feladat. *Ha egy síkgráf minden foka páros, akkor országai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy bármely két szomszédos ország különböző színű.*

27. Feladat. *Létezik-e olyan síkgráf, amely minden csúcsának foka páros, továbbá amelynek egy ötszögtartománya van, és az összes többi tartománya háromszög?*

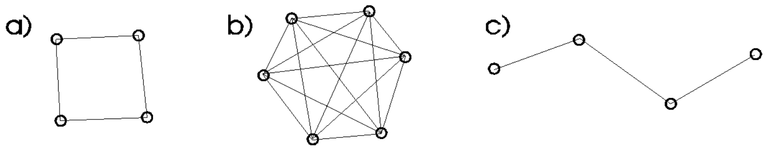
28. Feladat. *Adjunk meg olyan térképet, amelyben van négy olyan ország, amelyek közül bármely kettő szomszédos.*

29. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan térkép, amelyben lenne öt olyan ország, amelyek közül bármely kettő szomszédos.*

30. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkgráf kiszínezhető jól hat színnel.*

31. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkgráf kiszínezhető jól öt színnel.*

32. Feladat. *Határozzuk meg, hogy a következő gráfoknak az $\{1,2,\ldots,k\}$ színekkel hányféle jó színezése lehetséges.*



d) K_n,

e) P_n,

f) C_n.