KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Binomiális együtthatók

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2014.

1. Polinomok, binomiális tétel

1. Feladat. *Találjunk ki egy feladatot, amelyre a válasz* $(m+1)^n$.

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden* n *pozitív egészre teljesül, hogy tetszőleges* m *számra*

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \ldots + \binom{n}{n}m^n.$$

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden* n *pozitív egészre teljesül, hogy*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

4. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az* $(x+y)(z+t)$ *betűs kifejezésben. A kapott monomok között lehet-e összevonni? Hány monomot kapunk a kifejtésben?*

Válaszoljuk meg a fenti kérdéseket

$$(a+b)(b+c+d)(e+f+g+h)(i+j)$$

kifejezés esetén is.

5. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az* $(1+x)(1+x)\ldots(1+x) = (1+x)^n$ *betűs kifejezésben. A kapott monomok között lehet-e összevonni? Hány* x^k *monomot kapunk a kifejtésben?*

6. Feladat. *Bontsuk fel a zárójeleket az* $(1-x)(1+x)(1-x)(1+x)\ldots(1-x)(1+x)$ *betűs kifejezésben (*$2n$ *tényező, felváltva* $1+x$ *és* $1-x$*-ek). Összevonás után mi lesz* x^k *együtthatója a szorzatban? Tudunk-e ennek kombinatorikus értelmet adni?*

7. Feladat. A *és* B *a következő játékot játssza: az első száz pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak* k *darabot és ha ezek összege páros, akkor* A *nyer, egyébként* B*. Milyen* k*-ra lesz egyenlő* A *és* B *nyerési esélye?*

8. Feladat. *Én és barátom a következő játékot játszuk: az elkövetkező lottóhúzásnál összeadjuk a kihúzott számokat és ha ezek összege páros, akkor én nyerek, egyébként barátom. Melyik lottót használjuk? A barátom rám bízta a döntést (ötös, hatos, skandináv). Melyiket válasszam?*

9. Feladat. *Bontsuk fel a záróje;leket az*

$$(1 + x^5 + x^{10})(1 + x^{10})(1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80})$$

szorzatban.

Pénztárcánkban két 5 *forintos, egy* 10 *forintos és négy* 20 *forintos van. Milyen összegeket tudunk kifizetni úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van? (Az azonos értékű érmék nem megkülönböztethetők.)*

Mi köze a fenti két feladatnak egymáshoz?

2. k-elemű részhalmazok összeszámlálása, Pascal-háromszög

10. Feladat. *Egy lottóhúzás (normál lottó) története az öt szám és kihúzásuk sorrendje. Egy lottóhúzás eredménye a kihúzott öt szám halmaza. (Mi a különbség a két fogalom között?)*

Hányféle történet lehet egy lottóhúzásnak? Hányféle történet vezet ugyanahhoz az eredményhez? Hányféle eredménye lehet egy lottóhúzásnak?

11. Feladat. *Hányféleképpen lehet n darab különböző tárgy közül k darabot kiválasztani, és a kiválasztottakat sorba állítani?*

Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

12. Feladat. *Hét különböző nagyságú almából és három különböző nagyságú barackból két csomagot készítünk. Ezt hány különböző módon tehetjük meg úgy, hogy mindkét csomagban öt gyümölcs és közöttük legalább egy barack legyen?*

13. Feladat. *Egy raktárban 20 öltöny van, amelyek közt* 9 *szövési hibákat tartalmaz, a többi hibátlan. Egy kereskedő kiválaszt 15 öltönyt. Hány olyan választási lehetősége van, hogy legfeljebb* 5 *legyen hibás?*

14. Feladat. *Öt párhuzamos egyenest 11 párhuzamos, az előzőkre merőleges egyenesek metszenek. Hány téglalapot határoznak meg az így kapott rács vonalai?*

15. Feladat. *Igazoljuk kombinatorikus úton a következő összefüggéseket:*

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$,

e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

f) $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$,

g) $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + n \cdot m + \binom{m}{2}$,

h) $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$.

16. Feladat. *Hányféleképpen olvasható ki a fenti karakter táblázatból, hogy SZÁMOL, ha az összeolvasott betűknek folyamatosan (egymás után mindig szomszédosak következnek) kell elhelyezkedni?*

$$
a)\ \begin{array}{cccccc}
S & Z & Á & M & O & L \\
Z & Á & M & O & L & \\
Á & M & O & L & & \\
M & O & L & & & \\
O & L & & & & \\
L & & & & &
\end{array}
\qquad
b)\ \begin{array}{cccc}
S & Z & Á & M \\
Z & Á & M & O \\
Á & M & O & L
\end{array}
\qquad
c)\ \begin{array}{cccc}
 & & O & L \\
 & Á & M & O \\
S & Z & Á & M \\
 & Á & M & O \\
 & & O & L
\end{array}
$$

17. Feladat. *Hányféleképpen juthatunk el egy sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha egyszerre csak felfelé vagy jobbra léphetünk egyet?*

Mi a válasz ha táblánk mérete $n \times n$-es? És ha $n \times m$-es?

18. Feladat. *a) Milyen n és k természetes számok esetén lesz egy számtani sorozat három szomszédos tagja*

$$\binom{n}{k-1},\ \binom{n}{k},\ \binom{n}{k+1}\ ?$$

b) Lehetséges-e, hogy $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$ egy számtani sorozat egymást követő elemei ($0 \le k < k+3 \le n$)?

19. Feladat. *Írjuk fel a Pascal-háromszög első 16 sorát és pirossal satírozzuk be azokat a pozíciókat, ahol páratlan szám áll.*

20. Feladat. *Igazoljuk, hogy $(1+x)^{2^n}$ kifejtésében 1 és x^{2^n} monomokon kívül mindegyik páros együtthatóval szerepel.*

21. Feladat. *A Pascal-háromszög n-edik sora csak páratlan számokat tartalmaz. Mit mondhatunk n-ről?*

22. Feladat. *Igazoljuk, hogy a lottóhuzásnak páros sokféle eredménye lehet.*

23. Feladat. *Egy n szintes panelház mindegyik szintjén két panel néz az utcára. Az utcára néző $2n$ darab panel részből k darabot pirosra színeznek. Hányféleképpen tehetik ezt meg?*

Hány lehetőség van, ha két színezést nem különböztetünk meg, ha egyiket megkaphatjuk a másikból a ház függőleges szimmetriatengelyére való tükrözéssel?

24. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

a) Igazoljuk, hogy $\binom{2n}{2k+1}$ páros.

b) Igazoljuk, hogy $\binom{2n+1}{2k+1}$, $\binom{2n+1}{2k}$ és $\binom{2n}{2k}$ ugyanolyan paritású mint $\binom{n}{k}$.

c) Határozzuk meg $\binom{2014}{1000}$ paritását.

d) A fenti feladatok alapján adjunk egy hatékony algoritmust $\binom{n}{k}$ paritásának kiszámolására.

25. Feladat. *Legyen p prímszám.*

a) Bizonyítsuk be, hogy $p|\binom{p}{i}$*, ha* $1 \le i \le p-1$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$.

c) Bizonyítsuk be, hogy $b, d < p$ *esetén* $\binom{pa+b}{pc+d} \equiv \binom{a}{c}\binom{b}{d} \pmod{p}$.

26. Feladat. *Egy 1001 lakosú városban megalakítják az összes 13 tagú klubot. Minden egyes klub elnököt választ a tagjai közül. Bizonyítsuk be, hogy vannak a városnak olyan lakói, akik különböző számú klubnak az elnökei.*

⋆ ⋆ ⋆

27. Feladat. *Hányféleképpen lehet* n *darab egyforma érmét* k *ember között szétosztani, ha mindenki legfeljebb egyet kaphat?*

Hányféleképpen lehet n *darab egyforma érmét* k *ember között szétosztani?*

28. Feladat. *Hány megoldása van a pozitív egész számok körében a*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{214} = 2014$$

egyenletnek?

Mi lesz a válasz, ha a természetes számok között számoljuk a megoldásokat?

29. Feladat. *Egy* 150 *cm hosszú centit (amit a boltban lehet kapni) a beosztásoknál elvágogatjuk úgy, hogy* 20 *részre essen szét. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*