KOMBINATORIKA GYAKORLAT

osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Párosítások gráfokban

Gyakorlatvezetõ: Hajnal Péter 2014.

1. Feladat. *n játékos egyfordulós sakkversenyt szeretne megszervezni (mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik) úgy, hogy egy nap egy versenyző csak egyszer játsszon. Mi az a lehető legrövidebb idő, amely alatt a bajnokság a fenti feltételek mellett megrendezhető?*

2. Feladat. *Egy társaságban mindenki három embert ismer. Bizonyítsuk be, hogy az ott lévő emberek száma páros.*

Igaz-e, hogy a fenti társaság tagjai párba állíthatók úgy, hogy mindenki ismerje a párját?

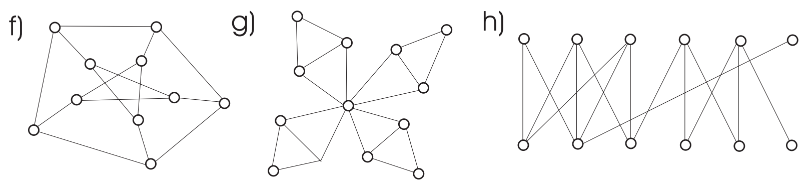
3. Feladat. *Egy matematikai lap n számú ($n \geq 2$) feladatot közöl. Ugyancsak n számú olvasó mindegyike két feladat megoldását küldi be oly módon, hogy az n számú feladat mindegyikére két különböző megoldás (összesen tehát $2n$ megoldás) érkezik be. A szerkesztő minden beküldőnek egy megoldását és egyszersmind az n feladat mindegyikének egy megoldását (összesen tehát n megoldást) akarja közölni lapjában. Lehetséges-e ez mindig?*

Bebizonyítandó, hogy ha az n számú megoldást a feltételeknek megfelelően k-féleképpen lehet kiválasztani, akkor $k = 2^\nu$, ahol ν egy pozitív egész számot jelent!

4. Feladat. *Egy mulatságon n hölgy és n úr vesz részt; minden hölgy két urat és minden úr két hölgyet ismer. A résztvevők úgy osztandók n párba (egy úr és egy hölgy alkotván egy párt), hogy csak ismerősök legyenek összepárosítva.*

5. Feladat. *Határozzuk meg a következő G gráfok esetén $\nu(G)$-t:*

a) K_n, b) C_n, c) P_n, d) S_n, e) $K_{n,m}$,



⋆

6. Feladat. *Egy $n \times n$-es táblázatot kitöltünk az alábbi módon:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

Milyen n-re lehet kiválasztani n elemet úgy, hogy minden sorból és oszlopból egy elem szerepeljen, és ezek mind különbözők legyenek.

7. Feladat. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy $m \times 2n$-es ($m > 1$) négyzethálót le lehet fedni 2×1-es téglalapokkal (dominókkal) két rétegben úgy, hogy egyetlen dominóra se kerüljön egy teljes dominó.*

b) Bizonyítsuk be, hogy egy $2m \times 2n$-es négyzetháló dominókkal való tetszőleges lefedésére rátehetünk egy másik lefedést úgy, hogy egyetlen dominóra se kerüljön egy teljes dominó.

8. Feladat. *Elhelyezhető-e véges sok 2×1-es dominó a végtelen négyzetrács bizonyos mezőin úgy, hogy ezeknek se közös élük, se közös csúcsuk ne legyen, és a megmaradó részt ne lehessen hézagtalanul lefedni 2×1-es dominókkal? (Minden egyes 2×1-es dominó két szomszédos mező lefedésére szolgál.)*

9. Feladat. *Egy végtelen négyzethálós papír néhány négyzetét befeketítjük (lehet végtelen sokat is). A befeketített négyzetek párokban vannak úgy, hogy egy párbeli két négyzet szomszédos, míg a különböző párbeli négyzeteknek még közös csúcsuk sincs.*

a) Bizonyítsuk be, hogy a maradék négyzetek lefedhetők 1×2-es téglalapokkal.

b) Tegyük fel, hogy a befeketítés $m \times n$-es téglalapokban történik úgy, hogy a különböző csoportokban lévő kis négyzeteknek még közös csúcsa sincs. Bizonyítsuk be, ha mn páros, akkor a maradék négyzetek lefedhetők 2×1-es téglalapokkal, míg ha mn páratlan, akkor ez nem szükségszerű.

⋆

10. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy összefüggő, egyszerű G gráfra $\nu(G) = 1$, akkor G egy csillag vagy egy háromszög.*

11. Feladat. *a) Legyen $M, N \subset E(G)$ két párosítás G-ből. Bizonyítsuk be, hogy $M \cup N$ pontdiszjunkt körökből és utakból áll.*

b) Legyen $M, N \subset E(G)$ két teljes párosítás G-ből. Bizonyítsuk be, hogy $M \cup N$ pontdiszjunkt körökből és élekből áll.

12. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G páros gráf csúcsai közül kijelölhetünk $\nu(G)$ darab csúcsot úgy, hogy az összes él ezek valamelyikét tartalmazza, de $\nu(G) - 1$ fenti tulajdonságú csúcs már nem jelölhető ki.*

13. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy G gráfra $\nu(G) = k$, akkor a G gráf $2k + 1$-színezhető.*

14. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy $2n$ pontú egyszerű G gráf minden pontjának legalább n a foka, akkor G-ben van teljes párosítás.*

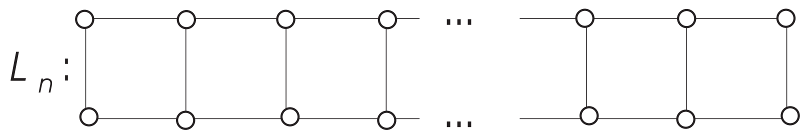
⋆

15. Feladat. *Hány teljes párosítás van a következő gráfokban?*

(i) K_n,

(ii) $K_{n,n}$,

(iii) L_n*, azaz a következő ábrán látható gráf (*L_n *pontjainak száma* $2n$*).*



16. Feladat. *Adjunk meg olyan gráfokat, amelyekben pontosan egy teljes párosítás van.*

17. Feladat. *Hányféleképpen lehet egy* $2n \times 2n$*-es sakktábla mezői közül kiválasztani* n *fehéret és* n *feketét úgy, hogy minden sorban és oszlopban egy kiválasztott mező legyen?*

18. Feladat. *Adott egy végtelen négyzethálós papír. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges* n*-re létezik olyan (nem feltétlenül konvex) sokszög, amelynek oldalai a rácsegyeneseken haladnak,* 2×1*-es és dominókkal lefedhető és a lehetséges lefedések száma éppen* n*.*

⋆

19. Feladat. *Egy páros gráfban (amelynél a két színosztály elemeit alsó, illetve felső pontoknak nevezzük) akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha ugyanannyi alsó és felső pontja van, és akárhogyan veszünk ki alsó pontokat, minden esetben legalább annyi szomszédja van, mint amennyi a kiválasztott pontok száma.*

20. Feladat. *Egy* $n \times n$*-es mátrix minden eleme nemnegatív, és minden sorában, illetve minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy a mátrixból kiválasztható* n *darab nem 0 elem úgy, hogy minden sorból, illetve oszlopból egy elemet választunk ki.*

21. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy reguláris páros gráfban mindig van teljes párosítás.*

22. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy* r*-reguláris páros gráf élei kiszínezhetők* r *színnel úgy, hogy tetszőleges pontba befutó élek különböző színűek legyenek.*

23. Feladat. *Egy szigeten* n *házaspár lakik. Mindegyik házaspár egyik tagja vadász, a másik pedig földművelő. A Vadászati Minisztérium a szigetet* n *egyenlő, egyenként* A *területű vadászati területre osztotta. Ettől függetlenül a Földművelési Minisztérium a szigeten* n *darab egyenlő földművelési területet jelölt ki. A Házasságügyi Minisztérium ragaszkodik ahhoz, hogy egy házaspár egy-egy tagjához rendelt vadászati, illetve földművelési terület közel legyen egymáshoz. Mindenki nagy meglepetésére a Kiutalási Minisztérium olyan elosztást tud találni, hogy minden házaspár esetén a két kijelölt földnek legyen közös része. A Vallási Minisztérium ezt a tényt csodának kiáltja ki.*

a) Mutassuk meg, hogy szó sincs csodáról. Bizonyítsuk be, van olyan, csak n*-től függő* δ_n *szám, hogy bárhogyan is osztja fel a szigetet a Vadászati és a Földművelési Minisztérium, a Kiutalási Minisztérium eloszthatja a földeket úgy, hogy mindegyik pár két területének legalább* $\delta_n A$ *közös területe legyen.*

b) Határozzuk meg δ_n maximális értékét.

⋆

24. Feladat. *Az expedíció útra készen áll, néhány csomagot még el kellene helyezniük az útiládákban. Sokat bajlódnak, mert a parancsnok nem engedi, hogy hozzányúljanak az előző napokban ládákba rakott dolgokhoz. A próbálkozások során kiderül, hogy bármely csomag egy láda kivételével, bármely ládában elfér; továbbá bármelyik ládában elhelyezhető valamelyik csomag.*

a) Sikerülhet-e minden csomagot magukkal vinniük, ha a ládák és a csomagok száma egyenlő?

b) Adjunk egy eljárást, amellyel a csomagolás véghezvihető.

25. Feladat. *Egy konferencián száz résztvevő van. Mindegyik több nyelvet ismer. Bárhogyan is választunk ki három résztvevőt, ezek egymás között elboldogulnak tolmács nélkül. Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők ötven kétágyas szobába elhelyezhetők úgy, hogy az egyes szobákba kerülők beszéljenek közös nyelvet.*

26. Feladat. *Legyen $\nu_{Mohó,\pi}(G)$ a mohó algoritmus által megtalált független élhalmaz számossága. Igazoljuk, hogy ekkor a pontok tetszőleges π sorbaállítása esetén*

$$\nu(G) \geq \nu_{Mohó,\pi}(G) \geq \frac{\nu(G)}{2}.$$

27. Feladat. *Egy 6×6-os sakktáblára néhány dominót helyeztünk úgy, hogy mindegyik pontosan két szomszédos mezőt fed le. Bizonyítsuk be, ha 14 mező lefedetlen, akkor legalább még egy dominó a táblára helyezhető a többi elmozdítása nélkül.*

28. Feladat. *Egy $n \times n$-es sakktáblára 2×1-es dominókat szeretnénk lerakni úgy, hogy egy dominó két mezőt fedjen le. Célunk az, hogy minél több dominót tudjunk elhelyezni. Teljesen véletlenül rakjuk le a dominókat addig, amíg el nem akadunk. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $n^2/3$ mező marad lefedetlen.*