KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Alapelvek

Gyakorlatvezetõ: Hajnal Péter 2014.

1. Feladat. *Egy kirándulásra készülünk és a hátizsákunkba pakolunk. Otthon három szelet csokink van: egy Boci, egy Milka és egy Twix. Valamennyit beleteszünk a hátizsákunkba (esetleg egyet se, esetleg mindet). Soroljuk fel a lehetőségeinket.*

2. Feladat. *(folytatás) Hány lehetőségünk van az előző feladat helyzetében, ha öt fajta csokoládénk van otthon (mindegyikből egy-egy szelet)?*

Egy barátunkkal/barátnőnkkel megyünk kirándulni. Tudjuk, hogy ő nem pakol csokoládét. Hogy erre felkészüljünk páros sok csokoládészeletet szeretnénk elvinni. Hány lehetőség van az elvivendő csokoládészeletek összeállítására?

3. Feladat. *(folytatás) A kirándulásra egy gyümölcskosarat is viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van. Ebből kell összeállítanunk a kosarat. Az egyforma gyümölcsök teljesen egyformák. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár? (Ismét számoljuk azt a lehetőséget is, amikor nem viszünk semmit sem.)*

4. Feladat. *Hány totó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztos legyen* $13+1$*-es találatunk?*

5. Feladat. *Az* $\{1, 2, \dots, 9, 10\}$ *halmaznak hány részhalmaza van? Ezek közül hány elemszáma páros? Ezek közül hány olyan van, amelynek elemeit összeadva páros számot kapunk?*

6. Feladat. *Legyen* k *és* ℓ *két természetes szám. Igazoljuk, hogy tetszőleges* a, b *pozitív egész esetén*

a) $a^k \cdot a^\ell = a^{k+\ell}$,

b) $(a^k)^\ell = a^{k\ell}$,

c) $a^k \cdot b^k = (ab)^k$.

Érvelésünk legyen kombinatorikus. Azaz tűzzünk ki egy összeszámlálási problémát, amelyre kétféle érveléssel tudunk válaszolni. Egyik érvelés a bal, a másik a jobb oldali kifejezést adja válaszként.

7. Feladat. *Az* $\{1, 2, \dots, 9, 10\}$ *halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot? Hány részhalmaz tartalmaz páros sok páratlan számot? Hány részhalmaz lesz olyan, hogy páros és páratlan értékű elemeinek száma ugyanolyan paritású?*

8. Feladat. *Ha M egy egész számokból álló véges halmaz, akkor jelöljük $S(M)$-mel azt az összeget, amelyet úgy kapunk, hogy M elemeit csökkenő sorrendbe rendezzük, és a tagokat felváltva pozitív és negatív előjellel látjuk el. Például*

$$S(\{1,2,5,6,9\}) = 9 - 6 + 5 - 2 + 1 = 7, \qquad S(\{3\}) = 3.$$

Mekkora az $S(M)$ összegek összege, ha M befutja az $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ halmaz összes nemüres részhalmazát?

9. Feladat. *Legyen H és H' két n elemű halmaz. Igazoljuk, hogy H-nak és H'-nek ugyanannyi részhalmaza van.*

10. Feladat. *Legyen R_n egy n elemű halmaz részhalmazainak száma. Így R_{n+1} egy $n+1$ elemű halmaz részhalmazainak száma. Mi a kapcsolat R_{n+1} és R_n között? Válaszunkat indokoljuk.*

11. Feladat. *Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?*

12. Feladat. *n különböző csokoládészeletet két csoportba osztunk. Hányféle módon tehetjük ezt meg?*

13. Feladat. *Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. Hányféle módon vehetjük egy részét ennek?*

14. Feladat. *A fenti feladatban szereplő gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (egyik csoport lehet üres is). Hányféle módon tehetjük ezt meg?*

15. Feladat. *n ismerősünknek szeretnénk képeslapokat küldeni. A bolt, ahol megvesszük ezeket k-féle képeslapot tart (mindegyik fajtából elég van).*

a) Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik ismerósünknek egy lapot küldünk?

b) Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha ragaszkodunk ahhoz, hogy ismerőseink különböző lapokat kapjanak?

c) Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik ismerősünknek két-két lapot küldünk úgy, hogy mindegyiknek küldött két lap különböző legyen?

16. Feladat. *n pózna áll az út mentén. k fajta színből van festékünk. Mindegyik póznát ki kell színeznünk valamelyik színnel. Hányféleképpen tehető ez meg?*

Hány lehetőségünk van, ha semelyik két szomszédos póznát nem akarjuk ugyanarra a színre színezni.

17. Feladat. *n pózna áll egy kör alakú út mentén. A póznák egy szabályos n-szög csúcsaiben helyezkednek el. k fajta színből van festékünk. Mindegyik póznát ki kell színeznünk valamelyik színnel. Hányféleképpen tehető ez meg?*

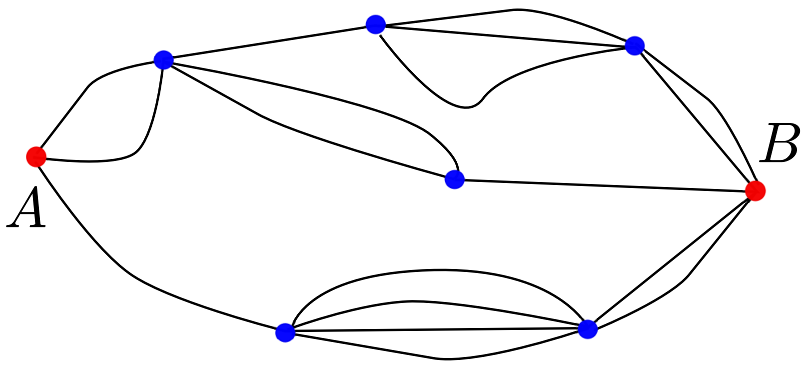
Tegyük fel, hogy n prímszám. Mi a helyzet, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg? Azaz ekkor hány különböző lehetőségünk van?

18. Feladat (Kis Fermat-tétel). *Igazoljuk, hogy p prímszámra, tetszőleges a pozitív esetén $p|a^p - a$.*

19. Feladat. *A standard magyar rendszám három betűt tartalmaz az angol ábécéből, amit három számjegy követ. Hány standard rendszám lehetséges Magyarországon?*

20. Feladat. *Legyen* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ *egy pozitív egész. Hány pozitív osztója van* n*-nek?*

21. Feladat. *Az alábbi térképpel leírt területen a jelzett utakon haladva* A*-ból* B*-be kell eljutnunk.*



1. ábra.

Hány lehetőségünk van, ha nem térhetünk vissza egy már elért csomópontba?