Kombinatorika Zárthelyi Dolgozat I.

2014. március 17.

1. Feladat. *a) Definiáljuk egy H halmaz feletti M multihalmaz fogalmát.*

b) Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. Összesen hány gyümölcsünk is van? Hányféle módon vehetjük egy részét ennek? (Az egy fajta gyümölcsök megkülönböztethetetlenek. A lehetőségek között ott van, hogy elvehetjük mind, de az is, hogy egyet se veszünk el.)

c) A fenti feladatban szereplő gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (egyik csoport lehet üres is). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

2. Feladat. *a) Definiáljuk az $\binom{n}{k}$ számot (n és k két természetes szám).*

b) Legyen n és m két természetes szám. Fogalmazzunk meg egy kombinatorika feladatot, amelyre a válasz $\binom{n+m}{2}$.

c) Igazoljuk, hogy tetszőleges n, m természetes számokra

$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + n \cdot m + \binom{m}{2}.$$

Megoldásunk lehetőleg az legyen, hogy a b) pont alatt feltett kérdést kétféleképpen válaszoljuk meg. A második válaszunk a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát adja válaszként.

3. Feladat. *a) Definiáljuk mit értünk egy multhalmaz sorbaállításán.*

b) Egy mosógépben négy kék, két piros és hat barna zoknit mostunk ki. A mosógépből csak 11 zoknit vettünk ki és egy szárítókötélre kiakasztottuk azokat. Ezt hányféleképpen tehettük meg, ha az azonos színű zoknikat nem tudjuk megkülönböztetni?

4. Feladat. *Olyan $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ sorozatokat vizsgálunk, amelyek $n \geq 2$ esetén eleget tesznek az $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurzív összefüggésnek.*

a) Írjuk fel a sorozat első hat elemét, ha $a_0 = 2$ és $a_5 = 5$.

b) Keressünk mértani sorozatokat, amelyek kielégítik a kiinduló rekurziót.

c) Írjunk fel egy képletet az a) feladatban leírt sorozat általános tagjára. Megoldásunk tükrözze, hogy jöttünk rá a képletre.