Kombinatorikai fogalomtár

A • jelzi egy definíció kezdetét. •⋆ különösen fontos definíció kezdetét jelzi. A ◦ magyarázat, elnevezés, olvasat, példa kezdete. Ezeket nem kell a megfelelő definícióhoz leírni. Leírása általában túlmagyarázást, félrebeszélést jelent. A leírtak nem egy „szentírás". Sokféle megfogalmazás lehet. Vigyázzunk azonban arra, hogy szavaink súllyal bírnak. Én csak a leírtakat tudom figyelembe venni. Kihagyott, elírt jelzők a definíciókat értelmetlenné, hamissá tehetik. Ha valaki több módon ki tudja fejezni magát, akkor azt írja le, amelyik számára a legtermészetesebb, kézenfekvő. Több helyes definíció megadása nem jelent több pontot. Két helyes és egy helytelen definíció megadása egyértelművé teszi, hogy a hallgató nem érti a fogalmat.

Összeszámlálási alapfogalmak

- ⋆ Egy $f : A \to B$ leképezés **bijekció**, illetve **párbaállító leképezés**, ha f az A halmaz különböző elemeihez különböző elemeket rendel és B minden eleme előáll képként.
  - ◦ $f(a) = b \in B$ elemet $a \in A$ párjának nevezzük. a a b elem párja.
- ⋆ **I. kombinatorikus alapelv:** Két halmaz akkor és csak akkor azonos elemszámú ha van köztük párbaállító leképezés.
- $[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{1, 2\}$, ..., $[n] = \{1, 2, \ldots, n\} = \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$, ... **standard véges** halmazok.
- H halmaz **véges**, ha valamelyik standard véges halmazzal párbaállítható.
- Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **halmazok páronként diszjunktak**, ha mindegyik elem legfeljebb egyiknek eleme.
  - ◦ Alternatív módon: semelyik kettőnek sincs közös eleme.
- ⋆ **II. kombinatorikus alapelv:** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt halmazok esetén
$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$
- Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **halmazok Descartes-szorzata** az a halmaz, amely pontosan azokat az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elem n-eseket tartalmazza, amelyekre $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$. A Descartes-szorzat jelölése $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.
- ⋆ **III. kombinatorikus alapelv:** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok esetén
$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$
- Egy H halmaz esetén $\binom{H}{k}$ azt a halmazt jelöli, amely elemei pontosan H -nak k-elemű részhalmazai.
- ⋆ $\binom{n}{k}$ egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazainak száma.
- ⋆ Egy M **multihalmaz** a H halmaz felett, ha
$$M : H \to \mathbb{N}.$$
  - ◦ $M(h)$ a h elem multiplicitása az M multihalmazban. Például egy molekula egy multihalmaz a periódusos rendszer elemei felett. H_2O multihalmazban/molekulában H/hidrogén 2 multiplictással szerepel, O/oxigén 1 multiplictással szerepel. Fe/vas multiplictása 0. Például egy szó betűkészlete multihalmaz az ábécé elemei felett. A $Mississippi$ szóbetűkészletében M multiplictása 1, w multiplictása 0, i multiplicitása 4. Egy pozitív egész prímtényezős felbontása egy multihalmaz a prímszámok $\mathbb{P}$ halmaza felett. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ felbontásban 2 multiplicitása 3, 7-é 1, 17-é 0.
- Legyen M egy multihalmaz a H halmaz felett. Az M **multihalmaz elemszáma**
$$\sum_{h:h\in H} M(h).$$
- M és N multihalmaz (a H halmaz felett). M **rész-multihalmaza** N-nek, ha $M \le N$, azaz minden $h \in H$ elemre $M(h) \le N(h)$.

- $\star$ $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ a k elemű multihalmazok száma egy n elemű halmaz felett.
- $\star$ Egy H n-elemű **halmaz sorbaállítása** egy $\pi : [n] = \{1, 2, \dots, n\} \to H$ bijekció.
  - $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ a sor pozíciói, H elemei a sorbaállított objektumok. $\pi(i) = h$ jelentése: „az i-edik pozícióba a h elem került”.
- $\star$ Egy H feletti n-elemű M **multihalmaz sorbaállítása** egy $\pi : [n] = \{1, 2, \dots, n\} \to H$ függvény, amelyre teljesül, hogy
$$|\{i \in [n] : \pi(i) = h\}| = M(h).$$
  - A formula jelentése: „azon pozíciók száma, ahova egy h elem kerül éppen annyi mint a h elem multiplicitása M-ben (ahányszor előfordul h az M-ben)”. π egy függvény, a korábbi függvényeinkről sokszor feltettük, hogy bijekció. Itt NEM, π bijekciónak titulálása sértés. A fogalom meg nem értését jelenti (mint máskor a bijektív tulajdonság fel nem tüntetése). Egy tanárnak ezen kis különbségeket éreznie kell, hogy meggyőzően taníthasson.
- $\star$ Egy H **halmaz permutációja** egy $\pi : H \to H$ bijekció.
- $\star$ Egy H **halmaz körökbe állítása** H elemeinek diszjunkt nem üres osztályokba sorolása és minden osztályon belül az elemek egy körszerű elrendezése (jobb oldali és baloldali szomszédok kijelölése, hogy egy kör alakú asztal melletti ülésrend alakuljon ki).
  - Egy H halmaz körökbe állítása esetén $h \mapsto$ „h jobb szomszédja” egy permutációja a H halmaznak. Megfodítva egy permutáció esetén $h \in H$ jobb oldalábra állítva $\pi(h)$-t, majd annak jobbjára állítva $\pi(\pi(h))$-t, és így tovább, kialakul egy kör. Ezt minden elemre megtéve H egy körökbe állítását kapjuk. Azaz a permutációk és a körökbe állítások ugyanazok. Ha egy permutációra mint körökbe állításra tekintünk, akkor a köröket úgy hívjuk, hogy a **permutáció ciklusai**.
- Nyúlpárok szaporodásának következő szabályait rögzítjük: Egy újszülött pár egy hónapig nő és ivaréretté válik. A második hónapban egy új nyúlpárnak ad életet és ez így történik minden további hónapban. Természetesen minden leszármazott ugyanezen biológiai szabály szerint éli életét.

  A $t = 0$ idő pontban kapunk egy újszülött nyúlpárt. A továbbiakban nyulaink nem halnak meg, újabb nyulat nem kapunk. Jelölje F_n az n-edik hónapban a nyúlpáraink számát ($F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 2$). Az $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat a **Fibonacci-sorozat**. Elemei a **Fibonacci-számok**.
- Egy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat eleget tesz egy **rekurzív szabálynak/rekurziónak**, ha minden elemének értéke az amit a szabály előír a korábbi értékek függvényében.
- A **lineáris rekurzió** egy olyan rekurzió, amelyhez létezik egy k természetes szám és k darab szám/együttható úgy, hogy a rekurzív szabály „ha az aktuális pozíció előtt van legalább k tag, akkor az előző k tagot rendre súlyozd az adott együtthatókkal és a súlyozott elemeket add össze”.
  - Például $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Ekkor $k = 2$, azaz a sorozat minden tagja (a harmadiktól kezdve) az előző kettőből kiszámolható úgy, hogy az előző háromszorosát és a másod előző -2-szeresét összeadjuk. Például $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$. Ekkor $k = 3$, azaz a sorozat minden tagja (a negyediktől kezdve) az előző háromból kiszámolható úgy, hogy az előző háromszorosát, a másod előző 0-szorosát és a harmad előző -2-szeresét összeadjuk.
  - Ha adott egy lineáris rekurzió (egy konkrét k értékkel) és adott a sorozat első k tagja, akkor ezen információ elég a sorozat leírására. A fenti információ definiál egy sorozatot: **lineáris rekurzióval definiált sorozat**. Az első k tag felírása, majd a szabály ismételt alkalmazása tetszőleges elem egyértelmű meghatározását lehetővé teszi.
- Az $F_0 = F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ha $n \geq 2$) lineáris rekurzió által definiált sorozat a **Finonacci-sorozat**.
  - A fenti rekurzív leírás és a korábbi nyulas összeszámlálási feladatra adott válaszként való definíció természetesen ugyanazt a sorozatot írja le.

Gráfelmélet

- $\star$ Egy **egyszerű gráf** egy $G = (V, E)$ pár, ahol V egy véges csúcshalmaz, amely elemeit csúcsoknak/pontoknak nevezzük, E pedig G élhalmaza: bizonyos csúcspárok, amelyeket éleknek nevezünk.
  - Jelöléssel $E \subseteq \binom{V}{2}$.

- $\star$ Egy **gráf** egy $G = (V, E, I)$ hármas, ahol V egy véges csúcshalmaz, E egy véges élhalmaz, I pedig egy illeszkedési reláció V és E között (egy $e \in E$ élre illeszkedő $v \in V$ csúcsok az e él végpontjai), amelyre teljesül, hogy minden élnek kettő (esetleg egybeeső) végpontja van.
  - Egy e él *összeköti* két végpontját. Egy e él két végpontja *szomszédos*. Egy v csúcsnak egy u csúcs szomszédja, ha van olyan él, amely két végpontja u és v.
- Egy e él **hurokél**. ha két végpontja egybeesik.
- e és f élek **párhuzamos élek**, ha e két végpontja megegyezik f két végpontjával.
  - Az egyszerű gráfok és a hurokélek, párhuzamos élek nélküli gráfok azonosíthatók (ennek megfelelően egyként kezeljük őket).
- G és H két egyszerű gráf **izomorf**, ha van olyan $\alpha : V(G) \to V(H)$ izomorfizmus, hogy $x, y \in V(G)$ akkor és csak akkor szomszédos, ha $\alpha(x), \alpha(y) \in V(H)$ szomszédos.
  - Az izomorfizmus jelölése: $G \simeq H$.
- $\star$ Egy G gráf v csúcsanak **foka**

$$|\{e \in E : \ e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő NEM-hurokél}\}| + 2|\{e \in E : \ e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő hurokél}\}|.$$

  - Egy G gráfbeli v csúcs fokát $d(v)$ vagy $d_G(V)$-vel (annak megfelelően, hogy az alapgráfot szeretnénk-e hangsúlyozni).
  - Ha G egy hurokélmentes gráf, akkor egy csúcsának foka a v-re illeszkedő élek száma.
  - Ha G egy egyszerű gráf, akkor egy csúcsának foka a szomszédai száma.
- $\star$ Egy **séta** a G gráfban egy

$$\mathcal{S} : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$$

  sorozat, ahol (1): $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ csúcsok, $e_1, \dots, e_\ell$ élek, továbbá (2): e_i két végpontja v_{i-1} és v_i minden $i = 1, 2, \dots . \ell$ esetén.
- A fenti $\mathcal{S}$ **séta hossza** ℓ, azaz a séta élsorozatának hossza.
  - A fenti $\mathcal{S}$ séta hossza megkapható úgy is, hogy a séta csúcssorozatának hosszából levonunk egyet. Egy séta hossza lehet 0 is.
  - A fenti $\mathcal{S}$ séta kiinduló csúcsa v_0, végső csúcsa v_ℓ. Azt mondjuk $\mathcal{S}$ egy $v_0 v_\ell$ séta. Azt mondjuk $\mathcal{S}$ v_0-ból v_ℓ-be vezet. Azt mondjuk $\mathcal{S}$ séta összeköti v_0-t és v_ℓ-t
- $\star$ Egy **sétálás** esetén van egy $t = 0, 1, 2, \dots, \ell$ idő paraméter. $t = 0$ időpillanatban egy v_0 csúcsban állunk. az i-edik időpillanatban ($i = 0, 1, \dots, \ell - 1$) a v_i csúcsban állunk és választunk egy v_i-re illeszkedő e_{i+1} élt. Az $i + 1$ idő pillanatra áthaladunk az e_{i+1} élen (a sétálás egy lépése). Ekkor az e_{i+1} él v_i melletti, másik végpontjába kerülünk; ez lesz v_{i+1}.
  - Nyilván minden séta felfogható egy sétálásnak és egy sétálás meghatároz egy sétát. Ugyanarról szól a két fogalom két szemlélet szerint: a statikus és a dinamikus szerint.
- $\star$ Egy G gráfban az **elérhetőségi reláció** egy reláció a csúcsok között. u és v csúcsok elérhetőségi relációban állnak (jelölésben $u \sim v$) ha u-ból elsétálhatunk v-be.
- $\star$ Egy gráf akkor és csak akkor gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el tudunk sétálni.
- $\star$ Egy **gráf komponenseit** úgy kapjuk meg, hogy vesszük az elérhetőségi reláció egy ekvivalenciaosztályát és a köztük lévő éleket.
  - Egy gráf akkor összefüggő, ha egy komponense van.
- $\star$ Egy séta **vonal**, ha élsorozatában nincs ismétlődés.
- Egy **mohó vonal növelés** olyan sétálás, ahol minden lépésnél olyan élt választunk, amelyen korábban nem haladtunk át.
- $\star$ Egy séta **út**, ha csúcssorozatában nincs ismétlődés.
- Egy **mohó út növelés** olyan sétálás, ahol minden lépésnél olyan élt választunk ami eddig nem látogatott csúcsba vezet.
- Egy séta **záródó**, ha kezdő és végső csúcsa megegyezik.
- $\star$ Egy $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ séta **kör**, ha $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}$ egy út ($\ell \geq 1$), e_ℓ egy új (eddig nem szereplő) él, és $v_\ell = v_0$.
  - A definíció szerint minden körben lennie kell élnek (séta, vonal, út esetén ez nem szükségszerű). $v_\ell = v_0$ miatt egy kör NEM út. A záródó út egy önellentmondás, ha hossza legalább 1. Az 0 hosszú

út záródó, de nem kör, mert nincs éle. Ha egy élen oda-vissza lépünk, akkor egy kettő hosszú záródó sétát kapunk. Ez nem kör, mert a záródást okozó él nem új él, hanem egy eddig szereplő él.

- Egy gráf **fa**, ha összefüggő és körmentes gráf.
  - ○ A fák alternatív módokon is definiálhatók. Ezek ismerete szükséges is. A fa definiálásánál azonban csak egyet írjunk csak le. Néhány alternatív definíció: (i) T fa, ha összefüggő, de bármely élét elhagyva összefüggősége megszűnik. (ii) T fa, ha nincs benne kör, de bármely két meglévő csúcsát egy új éllel összekötve keletkezik benne kör. (iii) T fa, ha bármely két csúcsa között pontosan egy út van.
- ⋆ Ha G-ből $\widetilde{G}$-t úgy kapjuk, hogy G csúcsait, éleit (a köztük lévő illeszkedéssel) megtartjuk és egy u új csúcsot és egy e új élt hozzáadunk, amely e él egyik végpontja u a másik G egy csúcsa, akkor azt mondjuk, hogy $\widetilde{G}$-t G-ből **ághajtás operációval** kaptuk.
- Egy fa egy csúcsa **levél**, ha foka 1.
- ⋆ Egy **gyökeres fa** egy (T, r) pár, ahol T fa és r egy gyökérnek nevezett kitüntetett csúcs.
- ⋆ Egy gyökeres fában x **csúcs fia** egy olyan y csúcs, ami szomszédja neki és a gyökértől messzebb van mint x (a gyökérbe vezető egyetlen út y-ból hosszabb mint x-ből). Ekkor azt is mondjuk, hogy x az y **csúcs apja**.
  - ○ Minden nem-gyökér csúcsnak van apja és ez egyértelmű. Legalább egy csúcs van, amelynek nincs fia (persze sok is lehet). Olyan csúcsok is lehetnek, amelyeknek sok fiúk van.
- Egy **gyökeres fában egy levél** olyan csúcs, amelynek nincs fia.
- Egy G gráfban egy e **él elhagyásával/törlésével nyert** $G-e$ **gráf**, az a gráf amely csúcsai G csúcsai, élei $E(G) - \{e\}$ és minden élének ugyanaz a két végpontja mint G-ben.
- Egy G gráfban egy v **csúcs elhagyásával/törlésével nyert** $G - v$ **gráf**, az a gráf amely csúcsai $V(G) - \{v\}$ elemei, élei $E(G)$ v-re nem illeszkedő elemei és minden élének ugyanaz a két végpontja mint G-ben.
- Az R gráf a G **gráf részgráfja**, ha csúcsok és élek elhagyásával megkapható G-ből.
- Az R gráf a G **gráf feszített részgráfja**, ha csúcsok elhagyásával megkapható G-ből.
- Az R gráf a G **gráf feszítő részgráfja**, ha élek elhagyásával megkapható G-ből.
- ⋆ Egy G **gráf feszítőfája** egy olyan fa részgráf, amely G összes csúcsát tartalmazza.
- ⋆ Egy **Euler-vonal** olyan vonal, amely minden csúcsot és élt meglátogat.
  - ○ Azaz egy séta Euler-vonal, ha minden élen pontosan egyszer halad át és minden csúcsot meglátogat.
- ⋆ Egy út **Hamilton-út**, ha csúcssorozata az összes csúcsot tartalmazza.
- ⋆ Egy kör **Hamilton-kör**, ha csúcssorozata az összes csúcsot tartalmazza.
- ⋆ A G **gráf egy (csúcs)színezése** egy $c : V(G) \to P$ függvény, ahol P-re mint paletta, elemeire mint színekre hívatkozunk.
- ⋆ Egy G gráf egy c színezése **jó színezés**, ha minden élre a két végpontjához c különböző színeket rendel.
- ⋆ G **gráf kromatikus száma** az a minimális szám, amekkora méretű palettával jól kiszínezhető.
- ⋆ Egy $K \subset V$ csúcshalmaz **klikk egy gráfban**, ha K bármely két különböző eleme szomszédos.
- Egy $F \subset V$ egy **független csúcshalmaz egy gráfban**, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F-beli.
- ⋆ Egy $M \subset E$ élhalmaz **párosítás**, ha azon pontok száma, amelyek valamelyik M-beli élre illeszkednek $2|M|$.
- ⋆ Egy $L \subset V$ csúcshalmaz **lefogó (csúcs)halmaz**, ha miden élnek legalább az egyik végpontja L-beli.
- ⋆ Egy gráf lerajozlása **szép**, ha élgörbéi nem metszik át egymást.
- ⋆ Egy gráf **síkgráf**, ha van szép lerajzolása.
- Egy szépen larjzolt G gráf G^* **duálisa** egy szépen lerajzolt gráf, amelyet a következő módon kapunk: Minden tartományban felveszünk egy duális csúcsot („fővárost”), minden él belsejében felveszünk egy „határátkelőt”. A határátkelőkből a két oldalon lévő egy-egy tartomány fővárosába két görbét vezetünk, ami az él két oldalán lévő fővárost összekötő duális él élgörbéjévé olvad össze. Az egyes tartományokban a fővárosból a határátkelőkhoz vezető „fél” élgörbéket úgy rajzoljuk meg, hogy ne messék át egymást.
- ⋆ Egy **irányított gráf** $\overrightarrow{G} = (V, E, K, B)$, ahol V egy véges csúcshalmaz, E egy éges élhalmaz, K és B egy-egy illeszkedési reláció a csúcsok és élek között. Ha egy e él és v csúcs K szerint illeszkedik, akkor azt mondjuk, hogy e kifut a v csúcsból. Ha egy e él és v csúcs B szerint illeszkedik, akkor azt mondjuk,

hogy e befut a v csúcsba. Irányított gráf esetén K-ról és B-ről feltesszük, hogy minden élre pontosan egy csúcs illeszkedik.

  - Egy irányított gráfra úgy gondolhatunk, hogy lerajzolunk egy gráfot és minden élét egy nyílfej kirakásával irányítjuk. A két végpont szimmetriája megbomlik. Az egyik végpontba az él befut, a másikból kifut.

- Egy **irányított séta** a $\overrightarrow{G}$ gráfban egy

$$\mathcal{S} : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$$

sorozat, ahol (1): $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ csúcsok, $e_1, \ldots, e_\ell$ élek, továbbá (2): e_i kifut v_{i-1}-ből és befut v_i-be minden $i = 1, 2, \ldots \ell$ esetén.
- Egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráf v csúcsanak **kifoka** a vele K relációban álló élek száma. Egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráf v csúcsanak **befoka** a vele B relációban álló élek száma.
- * Egy G gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba vannak sorolva (esetleg két osztályba vannak sorolhatók) úgy, hogy minden élenek egyik végpontja az egyik, a másik végpontja a másik osztályba essen.
- K_n az n pontú **teljes gráfot** jelöli, azaz azt az egyszerű gráfot, amelyben bármely két különöző pont összekötött.
- P_n az n pontú **útgráfot** jelöli, azaz azt az egyszerű gráfot, amely csúcshalmaza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és v_i, v_j pontosan akkor összekötött, ha $|i - j| = 1$.
- C_n az n pontú **körgráfot** jelöli, azaz azt a gráfot, amely csúcshalmaza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, élhalmaza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és e_i két végpontja v_i, v_{i+1} (ha $i = 1, 2, \ldots, n-1$), továbbá e_n két végpontja v_1 és v_n.