KOMBINATORIKA ElŐADÁS
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Síkgráfok

Előadó: Hajnal Péter 2014.

1. Gráfok lerajzolásai

Egy G gráf nagyon szemléletesen lerajzolható: G különböző csúcsait a sík különböző pontjainak feleltetjük meg. A v csúcshoz rendelt P_v pontra mint v (csúcs)pontja hívatkozunk. Az élek a két végpontjukat reprezentáló pontok között haladó folytonos görbék. (Ha valaki nem tanulta, nem tudja értelmezni ezt a fogalmat, akkor gondoljon véges sok végpontjukban kapcsolódó, de át nem metsző szakaszokból álló törött vonalra.) Az e élt reprezentáló görbe/geometriai objektumra mint az e él élgörbéjére hívatkozunk. Mindig feltesszük, hogy két különböző élgörbe véges sok közös ponttal rendelkezik.

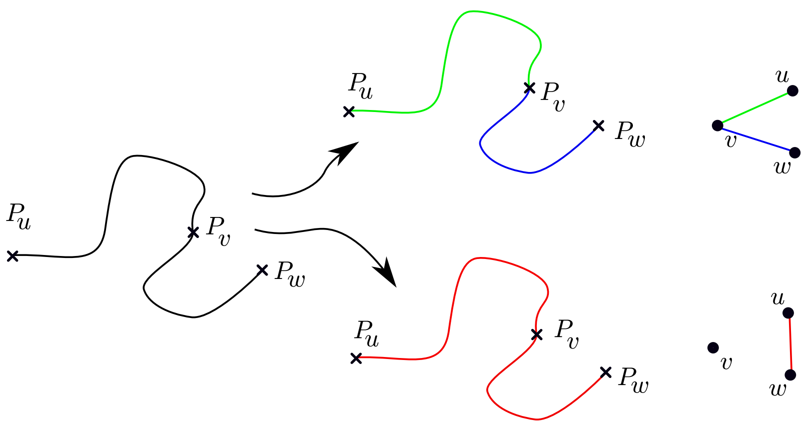
A pontok és élgörbék „láthatóvá teszik” a gráfokat. Pont úgy, ahogy a grafikonok a függvényeket (a hasonló nyelvi elnevezés nem véletlen); pont úgy, ahogy a Venn-diagramok a halmazok rendszerével kapcsolatos problémákat. Persze az ábrázolás megértéséhez el kell tudnunk „olvasni” a lerajzolt gráfot.

Az egyértelmű olvashatósághoz néhány megállapodás szükséges.

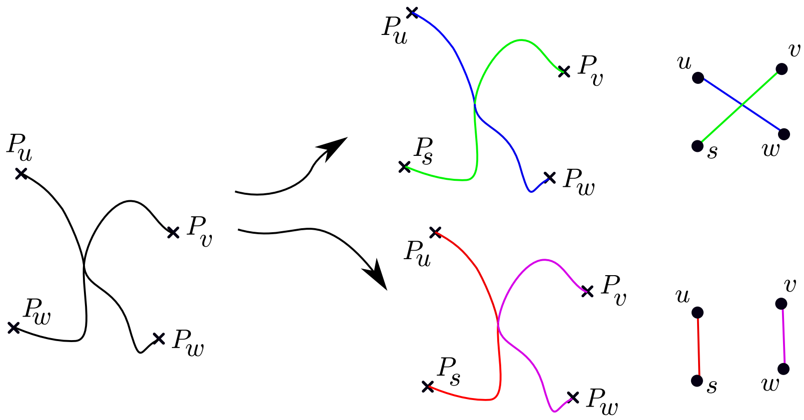
(1) Minden γ_e élgörbe csak a két összekötött csúcs csúcspontján halad át, további csúcspontokat nem érint.

(2) Ha két élgörbe besző pontjainál talákozik, akkor átmetszi egymást.

Ha nem tennénk az (1) megállapodást, akkor a következő kétértelmű olvasat lépne fel:



Ha nem tennénk a (2) megállapodást, akkor a következő kétértelmű olvasat lépne fel:



Mindkét esetben a megállapodásunk az első/felső olvasatot adja, ahol a két élgörbe zöld, illetve kék.

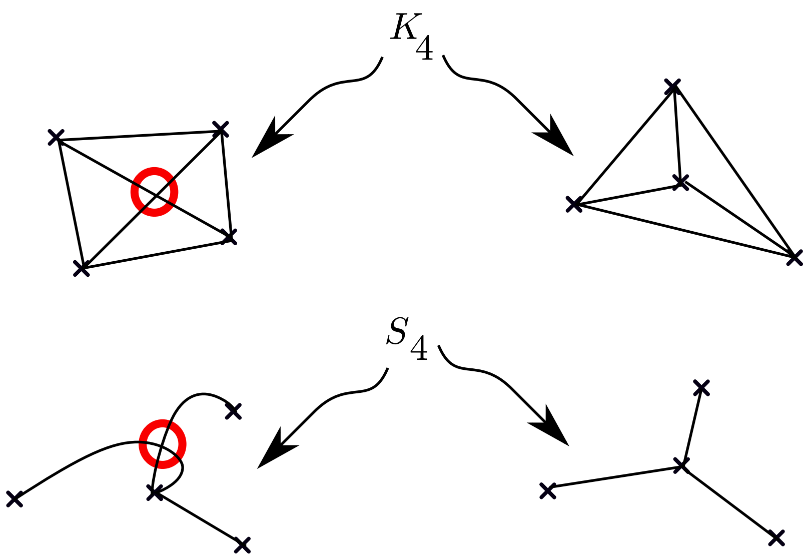
Ha egy lerajzolt gráfról beszélünk akkor azt (G, ρ) jelöléssel jelezzük. G egy gráf, ρ a csúcsokhoz pontok, az élekhez élgörbék rendelése a fenti módon.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy nem csak a síkra rajzolhatunk gráfokat. Gömbre és más felületekre is rajzolhatunk (sőt magasabb dimenzióba is léphetünk).

$\star$

Definíció. (G, ρ) egy szépen lerajzolt gráf (ρ a G szép lerajolása), ha semelyik két élgörbe nem metszi át egymást.

Példa. Az alábbi ábrán ugyanannak a gráfnak egy NEM szép illetve egy szép lerajzolását látjuk:



Megjegyzés. Megemlítjük, ha valaki ismeri a sztereografikus projekciót, akkor könnyen láthatja, hogy a szép síkra, illetve gömbre rajzolás lényegében ugyanaz. A szetreografikus projekció egy síkra rakott gömbfelületet északi sarkából vetíti le (az északi sark kivételével) a kiinduló síkra. Ha az északi nem egy csúcspont és nem halad át rajta élgörbe, akkor ez a vetítés egy szép gömbre rajzolásból szép síkra rajzolást készít. Inverze a fordított feladatot oldja meg.

Definíció. Egy gráf síkgráf ha lerajzolható szépen.

Első pillantásra azt gondolhatjuk, hogy esetleg néhány próbálkozás után minden gráf lerajzolható szépen, azaz minden gráf síkgráf. Ez nem igaz.

Mielőtt továbbhaladnánk megemlítünk egy mély és nehéz tételt. A megfogalmazása és bizonyítása is messze túlhalad ezen kurzus keretei közül. Intuitív hozzáállással a nem pontos kimondás értelmezhető, az állítás elhihető.

1. Tétel (Jordan—Schoenflies). *Legyen C egy gráfelméleti kör. Ekkor C lényegében egyféleképpen rajzolható le szépen a síkra. A kör élgörbéi egybeolvadnak egy záródó görbévé, ami a síkot egy korlátos és egy nem korlátos tartományra bontják (amelyeknek ez a záródó görbe közös határa).*

Egy n pontú kör egy szép lerajolása lehet az, hogy a csúcsokat egy szabályos n-szög csúcspontjaiba rakjuk, az élgörbék a köréírt kör megfelelő ívei lesznek. Nevezzük ezt standard lerajzolásnak. A tétel lényegében azt mondja, hogy minden szép lerajzolás megkapható úgy, hogy a standard lerajzolás síkját deformáljuk (egyszerre a pontokkal és élgörbékkel).

2. NEM síkgráfok

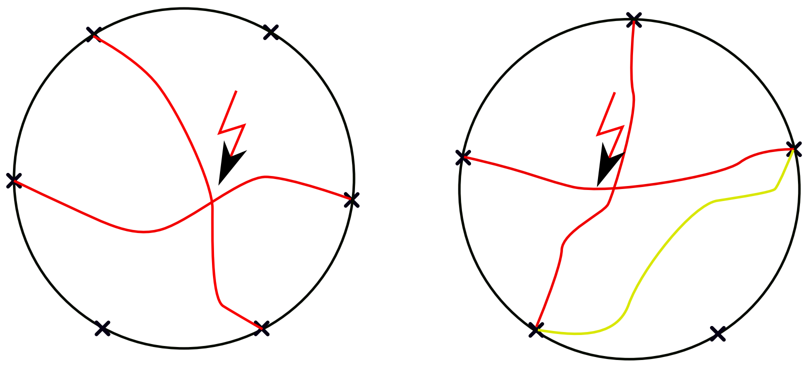
2. Tétel. *K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok*

$K_{3,3}$ egy teljes páros gráf két három-elemű színosztállyal (a teljesség azt jelenti, hogy az összes $3 \times 3 = 9$ lehetséges összekötés meg is valósul). A gráf nem síkgráfságát úgy szokás megfogalmazni, hogy ha adott három ház és három kút, akkor lehetetlen az összes, kilenc ház-kút utat megtervezni, hogy köztük ne legyen átmetszés Ezen szövegezés után a gráf egy másik használatos neve három-ház-három-kút gráf.

Bizonyítás. Mindkét esetben indirekt módon bizonyítjuk. Feltesszük, hogy gráfunk lerajzolható szépen a síkra. A bizonyítás további része „ellentmondás vadászat”.

Először vizsgáljuk $K_{3,3}$-at. Vegyük észre, hogy van benne Hamilton-kör (hat éllel). A hiányzó három él éppen a Hamilton-kör szemköztes csúcsait köti össze.

Tegyük fel, hogy gráfunkat szépen lerajzoljuk. Ebben ott lesz a Hamilton-kör szép lerajzolása is. Erről feltehető, hogy a standard lerajzolás. A hiányzó három élgörbe a lerajzolt kör belsejében vagy a külsejében halad. Skatulya elv alapján tudjuk, hogy kettő ugyanabban a tartományban halad. Ha szükséges, egy inverziót alkalmazva egy olyan szép lerajzolást kapunk, ahol két hiányzó élgörbe a körről négy pontot párosít úgy, hogy éppen a szemköztes pontok alkossanak párt. A körünk belsejében ez nem lehetséges átmetszés nélkül.



K_5 esetén hasonlóan érvelhetünk. Van Hamilton-körünk, amely lerajzolásáról feltehtejük, hogy geometriai kört alkot. A Hamilton-körön kívül öt él van (amelyek egy öt hosszú kört alkotnak). Feltehetjük, hogy közülük legalább három lyan, hogy élgörbéje a kör belsejében halad.

Egyszerű eset analízis mutatja, hogy bárhogy is válasszunk ki három élt a Hamilton-körön kívül fekvő öt él közül lesz köztük kettő, amelyeknek nincs közös végpontjuk és a geometriai körön lévő negy végpontjukat szemköztesen párosítják. Újra ellentmondáshoz jutottunk. ∎

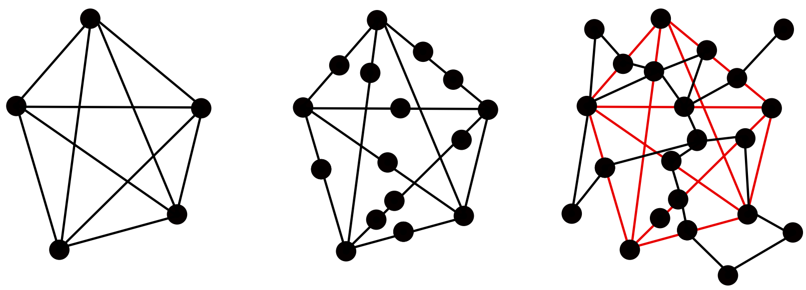
A fenti két példa nemcsak két véletlen példa nagyon fontos szerpük van.

Vannak-e más NEM síkgráfok? Persze. Ha egy gráfhoz csúcsokat és éleket adunk akkor szép lerajzolásuk több feltételt foglal magába, nehezebb lesz. Ha kiinduló gráfunk nem síkgráf, akkor bővítéssel kapott gráfunk sem lesz az. Így ha egy gráfnak $K_{3,3}$ vagy K_5 részgráfja, akkor nem síkgráf. Ha gráfunkban van öt elmeű klikk, akkor nem síkgráf.

$K_{3,3}$ és K_5 másképpen is „bonyolítható”, hogy nem síkgráfsága megmaradjon. Ha egy G síkgráf egy $e = uv$ élét egy uv úttal helyettesítjük, amely belső csúcsai új csúcsok, akkor G egy szép lerajzolásában a γ_e élgörbét feloszthatjuk az új csúcsokat reprezentáló pontokkal rész görbékre, amik az út élei reprezentálhatják. Ezen a módon az új gráf egy szép lerajzolását kapjuk. Természetesen az összes éllel megtehetjük ezt.

Definíció. Legyen G egy gráf. Minden $e = uv$ élére helyettesítsük egy P_e uv úttal, amely belső csúcsai páronként diszjunktak. A kapott $\widehat{G}$ gráfra azt mondjuk, hogy egy topologikus G gráf.

Ha $\widehat{G}$-t csúcsokkal, élekkel bővítjük, akkor a kapott gráfra azt mondjuk, hogy G-t tartalmazza topologikus részgráfként.



1. ábra. K_5, topologikus K_5, egy gráf K_5 topologikus részgráffal

A korábbi gondolatmenet szerint. ha G síkgráf, akkor egy topologikus G is síkgráf. Azaz ha egy gráf $K_{3,3}$-at vagy K_5-t tartalmaz topologikus részgráfként, akkor nem síkgráf. Az alábbimély tétel szerint $K_{3.3}$ és K_5 ezen módon generálja az összes példát nem síkgráfokra.

3. Tétel (Kuratowski tétele). *G akkor és csak akkor nem síkgráf, ha K_5 vagy $K_{3,3}$ topologikus részgráfja.*

3. Euler tétele síkgráfokra

4. Tétel (Euler tétele). *Legyen (G, ρ) egy összefüggő síkra rajzolt gráf. Ekkor ez kialakít tartományokat. Legyen $T(G, \rho)$ a kialakult tartományok halmaza. Ekkor*

$$|T(G, \rho)| - |E| + |V| = 2.$$

Bizonyítás. Minden összefüggő gráf magkapható egy feszítőfájából kiindulva, a már meglévő csúcsok között élek hozzáadásával. Így gondolunk lerajzolt gráfunkra és az élgörbék hozzáadogatását követő indukcióval bizonyítunk.

Kiindulásként egy n pontú fa esetére kell ellenőrizni a tételt. Ekkor $|V| = n$, $|E| = n - 1$ és $|T(G, \rho)| = 1$ (kör hiányában egyetlen tartomány lesz). A tétel állítása teljesül.

Az indukciós lépéshez nézzük meg, hogy mi történik, ha két meglévő pontot egy élgörbével összekötünk. $|V|$ nem változik, $|E|$ eggyel nő. Egy tartományban halad a görbe. Hozzá közel két oldalon egy-egy pont ehhez a tartományhoz tartozott. A feszítőfával az új él egy kört alkot, aminek lesz egy lerajzolása. Az előző két pontot ez a lerajzolt kör elválasztja. Az a tartomány, amelyben haladt élgörbénk feloszlott két részre. $|T(G, \rho)|$ is eggyel nő. A bizonyítandó egyenlőség öröklődik. ∎

A tétel egyenlősége átalakítva: $|T(G, \rho)| = |E| - |V| + 2$. Speciálisan egy összefüggő síkgráfot sokféleképpen lerajzolhatunk, de a tartományok száma mindig (az élszám és csúcsszám segítségével egyszerűen kifejezhető) közös érték lesz.

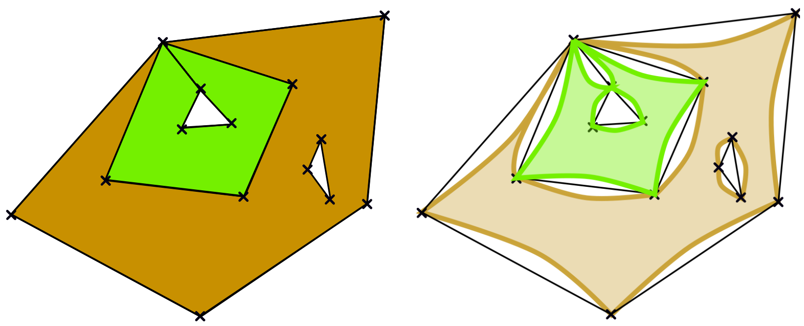
Egy tétel alkalmazhatóságát kényelmesebbé teszi, ha csak a benne szereplő síkgráf paramétereit használja és nem tartalmaz egy lerajzolásból kiolvasható mennyiségeket. célunk egy ilyen következmény igazolása.

Ehhez a célhoz jobban meg kell vizsgálni a taromány fogalmát.

Legyen $(G.\rho)$ egy szépen lerajzolt gráf. Legyen τ egy tartománya. A gráfra gondolhatunk úgy, mint egy kerítés felülről tekintett alaprajza. τ egy a kerítésekre nem eső pozíció, ahova odaképzelhetjük magunkat. Kezünket a kerítésre tehetjük és sétálhatunk. Ilyen módon az összes elérhető kerítés mellett elsétálhatunk.

A fogalom — bármennyire szemléletes is — veszélyes. Erre mutat rá az alábbi példa.

Példa. Az alábbi ábra bal oldalán egy szépen lerajzolt gráfot látunk, amelyben két tartományt kiemeltünk. Az egyik zöld, a másik narancs színnel van jelölve



Az ábra jobb oldalán látjuk a határ bejárását. Láthatók a problémák. Nem szükségszerű, hogy egy kört járjunk be. A zöld esetben az egyik él mindkét oldalán ugyanaz a tartomány szerepel. Ezen tartomány határának bejárásakor ezen az élen kétszer is áthaladtunk (mindkét oldalán végighúztuk a kezünket). A határ bejárása nem is vonal. Ezen határ hosszához ez az él kettőt adott hozzá. A piros esetben a határ nem összefüggő. Így a bejárás több (a példában kettő) fázisban történik.

Definíció. Legyen (G, ρ) egy szépen lerajzolt gráf és τ egy tartománya. τ a τ tartomány határa. $|\partial\tau|$ az a lépés szám, ahány lépés a fenti határ-bejáráshoz kellett.

Lássuk Euler-tételének egy fontos következményét.

5. Következmény. *Legyen G egy egyszerű síkgráf. Ekkor ha $|V| \geq 3$, akkor*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy G-hez már nem húzható él (a meglévő csúcsok között) egyszerű síkgráf maradjon. Belátható, hogy ezen feltétel mellett gráfunk összefüggő. Rajzoljuk le szépen ezt a gráfot.

Egyrészt felírhatjuk Euler tételét:

$$|T(G, \rho)| - |E| + |V| = 3.$$

Másrészt egy egyszerű, összefüggő, legalább három pontú gráfban minden tartomány határának hossza legalább három. Adjuk össze a tartományok határhosszát az összes tartományra. minden él kettővel járul hozzá ehhez az összeghez. Azaz a végeredmény $2|E|$. összefoglalva:

$$3|T(G, \rho)| \leq 2|E|.$$

Hárommal szorozva Euler tételének egyenlőségét majd kivonva az utóbbi egyenlőtlenség bal, illetve jobb oldalát a hapott egyenlóségből egy olyan egyenlótlenséghez jutunk, amelyben a $3|T(G.\rho)|$ tag kiesik. Rendezés után adódik a bizonyiútandó. ∎

Egy hasonló alkalmazás:

6. Következmény. *Legyen G egy egyszerű páros síkgráf. Ekkor ha $|V| \geq 3$, akkor*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

A bizonyítást nem végezzük el, az előző gondolatmenetet kell elismételni. A plusz ötlet annak felismerése, hogy páros gráf esetén egyszerűség, összefüggőség, legalább három csúcs azt is jelenti, hogy minden tartomány határa legalább négy hosszú. Azaz $4|T(G, \rho)| \leq 2|E|$.

Az utolsó előtti követkemény egyenlőtlenségének K_5, az utolsó követkemény egyenlőtlenségének $K_{3,3}$ nem tesz eleget. Ez egy újabb bizonyítás arra, hogy K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Az utolsó előtti követkézményből a dódik, hogy minden egyszerű síkgráfra $2|E| < 6|V|$. Speciálisan $2|E|/|V| < 6$. Azaz minden egyszerű síkgráfban az átlag fokszám kisebb mint 6. Spaciálisan kapjuk:

7. Tétel. *Minden egyszerű síkgráfban van olyan csúcs, amely foka legfeljebb öt.*