**KOMBINATORIKA ElŐADÁS**

osztatlan matematika tanár hallgatók számára

# Fák

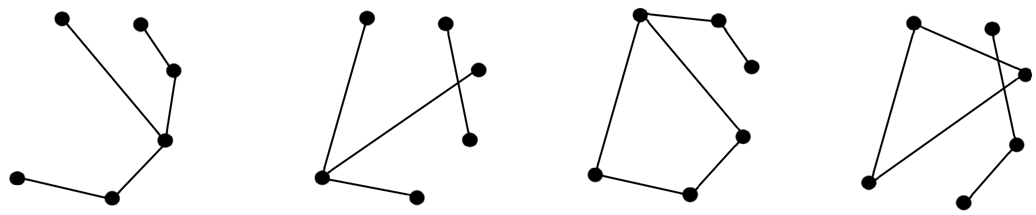
*Előadó: Hajnal Pter* 2014.

A fákat gyakorlaton, feladatokon keresztül ismertük meg. Tudásuk azonban fontos elméleti anyag. Az alábbiakban összefoglaljuk a fontosabb eredményeket.

## 1. A fák alapfogalma

**Definíció.** Egy $F$ gráf fa/fagráf, ha összefüggő és körmentes.

**Példa.**



$G$ $H$ $I$ $J$

$G$ egy FA. A hallgató ellenőrizze összefüggőségét és azt, hogy nem tartalmaz kört.

$H$-ban nincs kör, de nem összefüggő. Így NEM fa.

$I$ öszefüggő, de van benne kör. Így NEM fa.

$J$ nem összefüggő és kör is van benne. Így NEM fa.

## 2. A fák mint minimális összefüggő gráfok

Legyen $G$ egy gráf és $e = xy$ egy éle. Két lehetőség van:

(a) $e$-t nem tartalmazza egyetlen kör sem.

(b) $e$ egy gráfbeli $C$ kör egy éle.

A két lehetőség közötti különbséget különösen kiemeli a $G - e$ gráf vizsgálata.
**(a)** Az $e$ él biztosítja, hogy a $G$ gráfban $x$-ből $y$ elérhető. Ezt az $x, e, y$ séta ($x$-ből indulva az $e$ keresztül (egy lépéssel) $y$-ba sétáltunk) mutatja.

Az (a) eset azt mondja más út nem is lehetséges: Ha az $e$-n indulunk el, akkor a követett út az előző séta lenne. Ha nem $e$-n indulunk el és egy $P$ úttal $y$-ba jutnánk, akkor ez az út $e$-vel folytatva visszatérne $x$-be (ezzel út mivolta megszünne) és egy kört kapnánk az $e$ élen keresztül, ami (a) alapján nem lehet.

Tehát a $G - e$ gráfban (a $G$ gráfból elhagyjuk az $e$ élt) nem marad $x$-ből $y$-ba vezető út. Azaz $x$-ből $y$ elérhetősége megszűnik.

Tehát $G$-ben és $G-e$-ben (két gráf ugyanazon a csúcshalmazon) az elérhetőség reláció más. Természetsen a $G-e$-beli elérhetőség egyben $G$-beli elérhetőséget is jelent. Fordítva azonban nem igaz.
**(b)** Belátjuk, hogy ekkor $G$-ben és $G-e$-ben ugyanaz az elérhetőség reláció. Nyilván, ha két csúcs $G-e$-ben elérhető, akkor $G$-ben is. Másképpen: Ha két csúcs $G$-ben nem elérhető, akkor $G-e$-ben sem. Állításunk érdemi része: Ha két csúcs $G$-ben elérhető, akkor $G-e$-ben is. Azaz az $e$ él elhagyása nem szüntetheti meg a $G$-beli lehetőséget. Legyen $P$ egy út, ami $x$ és $y$ csúcsok elérhetőségét $G$-ben igazolja. Ugyanez az út igazolja az elérhetőéget $G-e$-ben is, ha utunk nem halad át $e$-n. Tegyük fel, hogy $P$ áthalad $e$-n. Ekkor $P$ nem egy út $G-e$-ben. Egy alternatív elérhetőséget kell felmutatnunk. A (b) lehetőség által garantált kör ad erre lehetőséget. A kör áthalad $e$-n, így tartalmazza az $x$ és $y$ csúcsokat. Ez a két csúcs két ívre, gráfelméleti útra bontja a kört. Az egyik ív/út egy hosszú, csak az $e$ élt tartalmazza. A másik ív/út nem halad át $e$-n. Így ez az út $G-e$-ben is „ott van”. Az eredeti $P$ utunknak egyetlen lépése „hibázik” $G-e$-ben. Ezt a lépést helyettesíthetjük a körünkből származó másik ívvel. Így kapunk egy sétát (nem szükségszerűen utat) $x$-ből $y$-ba, ami igazolja az elérhetőséget.

**1. Következmény.** *A következők ekvivalensek:*

*(i) $F$ fa,*

*(ii) $F$ összefüggő és bármelyik élét elhagyva nem összefüggő gráfhoz jutunk.*

**Bizonyítás.** (i)$\Rightarrow$(ii) A bizonyítandó összefüggőség a feltételek között is ott van. Csak azt kell látnunk, hogy tetszőleges élt elhagyva megszűnik az eredeti „bárhonnan bárhová” elérhetőségi reláció. Ez viszont következik a fentiekből hiszen tetszőleges élt véve azon nem haladhat át kör (egyáltalán nem lévén kör gráfunkban).

(ii)$\Leftarrow$(i) A bizonyítandó összefüggőség a faltételek között is ott van. Csak azt kell látnunk, hogy nincs kör a gráfban. Ez is következik a fentiekből hiszen kör létezése esetén bármelyik élet elvéve is gráfunkban az elérhetőségi reláció nem váltona. Speciálisan az összefüggőség megmaradna. ■

A második tulajdonság egy alternatív leírása a fáknak. Ennek olvasata lehet: a fák minimális összefüggő gráfok (a csúcshalmazukat rögzítve, az élhalmazukként tekintve a lehető legkisebbek).

# 3. A fák mint maximális körmentes gráfok

**2. Tétel.** *A következők ekvivalensek:*

*(i) $F$ fa,*

*(ii) $F$ körmentes, de bármely két meglévő csúcsát új éllel összekötve kör keletkezik.*

Ha a két összekötött csúcs egybeesik, akkor egy hurokélet adunk gráfunkhoz. A kör megjelenése nyilvánvaló. Ha a két összekötött csúcs az eredeti gráfban szomszédos, akkor egy meglévő él mellé húzunk be egy párhuzamos párt. Ismét nyilvánvaló a megjelenő kör. Az (ii)-ben leírt tulajdonság „akkor érdekes”, ha két nem szomszédos csúcsot kötünk össze az új éllel.

**Bizonyítás.** (i)$\Rightarrow$(ii) A bizonyítandó körmentesség a feltételek között is ott van. Csak azt kell látnunk, hogy tetszőleges élt behúzva kör keletkezik. Legyen $x$ és $y$ a két csúcs, amit az új $e$ éllel összekötünk. $F$ összefüggő, azaz van benne $xy$ út. Ezt az $e$ éllel folytatva egy kört kapunk. Az állítást igazoltuk.

(i)$\Leftarrow$(ii) A bizonyítandó körmentesség a feltételek között is ott van. Csak azt kell látnunk, hogy gráfunk összefüggő, azaz tetszőleges $x$ és $y$ csúcsok között létezni kell útnak. Ehhez adjunk hozzá gráfunkhoz egy új $xy$ élt. Legyen $C$ a keletkezett kör. Ebben az új élen kívüli élek egy $F$-beli $xy$ utat adnak. ■

A második tulajdonság egy alternatív leírása a fáknak. Ennek olvasata lehet: a fák maximális körmentes gráfok (a csúcshalmazukat rögzítve, az élhalmazukként tekintve a lehető legnagyobbak).

# 4. Fák mint gráfok, amelyekben az úttal való összekötés egyértelmű

Egy kör bármely két pontja között kétféle módon is „mutatja”, hogy elérhetőek. A kör két íve, két különböző utat ad tetszőlegesen választott két pontja között.

**3. Tétel.** *A következők ekvivalensek:*

*(i) $F$ fa,*

*(ii) $F$ bármely két csúcsa között pontosan egy út létezik.*

**Bizonyítás.** (i)$\Rightarrow$(ii) Az összefüggőség garantálja, hogy bármély két csúcs között vezet út. Azt kell kizárnunk, hogy létezhessen két út is. Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Tegyük fel, hogy van ellenpélda: $x$ és $y$ csúcsok, köztük $P_1$ és $P_2$ két különböző út.

$P_1$ és $P_2$ nem szükségszerűen alkot kört $x$-en és $y$-on keresztül. A vadászott ellentmonddás azonban valóban $F$ körmentességével lesz. Trükkös módon találjuk meg az ellentmondást adó kört: Tegyük fel, hogy ellenpéldánkat úgy választottuk meg, hogy $P_1$ hossza és $P_2$ hossza a lehető legkisebb legyen. Ekkor $P_1$ és $P_2$ valóban egy kört alkot (ahogy korábban kizártuk). Ha a két út belső pontok mentén összefutna/„összegubancolódna” (ahogy korábban „megfélemlítésként” előrevetítettük), akkor ellenpéldánk az összefutás csúcsát felhasználva rövidíthető lenne (hogyan?).

(ii)$\Rightarrow$(i) $F$ összefüggősége nyilvánvaló. Belátjuk, hogy egyik élén sem halad át kör (így nem lehet benne kör). Valóban egy $e = xy$ élen áthaladó kör két $xy$ út létezését adná. ■

# 5. Ághajtás és fák

**Definíció.** Legyen $G$ egy tetszőleges gráf. Azt mondjuk, hogy $G$-ből $G'$ ághajtás operációval keletkezett, ha $V(G') = V(G)\dot\cup\{u\}$, $E(G') = E(G)\dot\cup\{e\}$. A $G$-beli élek két végpontja ugyanaz $G'$-ben is, míg $e$ egyik végpontja $u$, másik $V(G)$-beli „régi” csúcs.

Tehát egyetlen új csúcs kerül be a $G$ gráfba, amely fokszáma 1. Ezt a fokot az egyetlen új él adja, ami $u$-t egy $V(G)$-beli csúccsal köti össze.

**4. Lemma.** *Tegyük fel, hogy $G'$-t ághajtással kaptuk meg $G$-ből. Ekkor*

*(i) $G$ akkor és csak akkor összefüggő, ha $G'$ az.*

*(ii) $G$ akkor és csak akkor körmentes, ha $G'$ az.*

**Bizonyítás.** (i) Ha $G$ összefüggő, akkor $G'$ régi csúcsai között is bárhonnan bárhová eljuthatunk. Az új csúcsból is lejuthatunk bárhová úgy, hogy az új élen átlépve $G$-be kerülünk, ahol tetszőleges célcsúcsba eljuthatunk.

Ha $G'$ összefüggő, akko $G$ bármely két csúcs között van út. Ez az út a közbüső csúcsok fokáról mutatja, hogy legalább 2. Így az új csúcs nem lehet rajta egy úton. A $G'$-beli összekötő utak $G$-ben is ott vannak a régi csúcsok között.

(ii) Ha $G'$ körmentes, akkor része $G$ is az. Ha $G$ körmentes, akkor $G'$-ben sem lehet kör. Valóban: Hiszen egy csúcson áthaladó kör annak fokáról mutatja, hogy legalább 2. Speciálisan az új $u$ csúcson nem halad át kör. Csak régi csúcsokon áthaladó kör $G$-beli kör lenne. ■

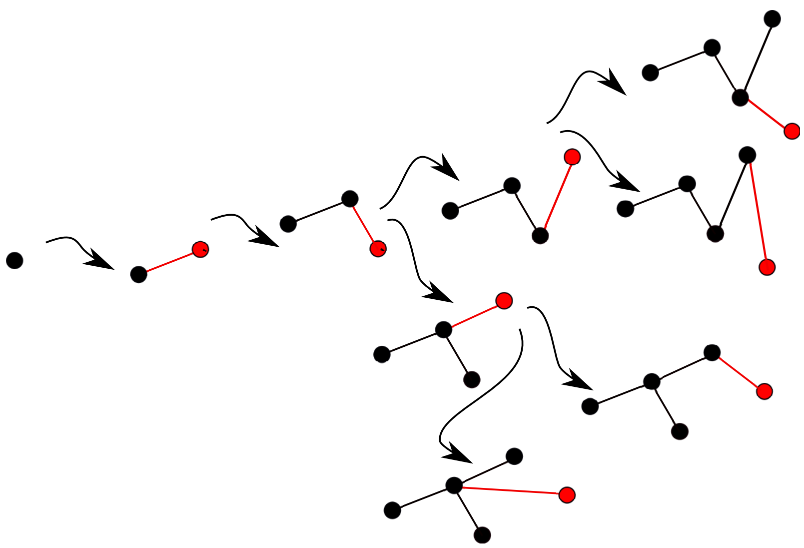
Speciálisan kapjuk, hogy fából ághajtással kapott gráf is fa. Így ághajtások ismételgetésével kapott gráf is fa lesz. Egyetlen fából példák sorát tudjuk elkészíteni. Legyen $T_0$ az egy csúcsból és 0 élből álló fa. Ez fa (az egyetlen egy pontú fa).

**Definíció.** $G$ ághajtásokkal felépíthető, ha $T_0$-ból megkapható ághajtások ismétlésével.

Összefoglalva eddigi ismereteinket:

**5. Lemma.** *Ha $G$ ághajtásokkal felépíthető, akkor fa.*

A lemma ismételgetésével rengeteg példát kapunk fákra. Az alábbi ábra csak fákat tartalmaz:



Célunk az, hogy belássuk, hogy ez egy „univerzális” módszer a fák megkapására. Ennek igazolásához egy lemmára lesz szükségünk.

**6. Lemma.** *Legyen $G$ egy gráf, amelyben minden csúcs foka legalább 2. Ekkor $G$ tartalmaz kört.*

**Bizonyítás.** Legyen $x$ egy tetszőleges csúcs. Kezdjünk el sétálni úgy, hogy sose lépjünk vissza az utolsónak bejárt élen. Ez mindig megtehető, hiszen gráfunk minden foka legalább 2. Szükségszerűen lesz ismétlődés a meglátogatott csúcsok között. Vegyünk két ismétlődő csúcsot, amelyek között nincs más csúcs-ismétlődés. Sétánk ezen része kör. ■

**7. Következmény.** *Legyen $T$ egy legalább két pontú fa. Ekkor van $T$-ben legalább két olyan csúcs, amely foka* 1.

**Bizonyítás.** Ha $T$-nek legalább két csúcsa van, akkor az összefüggőség miatt minden csúcs foka legalább 1. Ha nem lenne 1 fokú csúcs, akkor minden csúcs foka legalább kettő lenne. Ez ellentmond annak, hogy egyrészt gráfunk körmentes (mert fa), másrészt az előző lemma állítása szerint kört kell tartalmaznia.

A második 1 fokú csúcs meglátásához tegyük fel, hogy csak egy darab 1 fokú csúcsunk van. Az előző bizonyítást ismérterljük meg, de ebből az 1 fokú csúcsból indítsuk vissza nem lépő sétánkat. Ha csak a kiinduló csúcs az 1 fokú, akkor most sincs probléma a folytatással, így a csúcsismétlés szükségszerű, az ellentmondást jelentő kör most is megjelenik. ■

Egy fában egy 1 fokú csúcsot *levélnek* nevezünk. Az elóző állítás szerint minden legalább két csúcsú fában legalább két levél van.

**Észrevétel.** Legyen $T$ egy fa és $x$ egy levele. Ekkor $T - x$ is fa.

Valóban $T - x$-ből $T$ ághajtással nyerhető, így fa mivoltuk ekvivalens. $T$-ből $T - x$-re való áttérést nevezhetjük levél lecsípésnek vagy ágtörésnek

Ismételgetve az ötletet kapjuk, hogy minden fa levél lecsípésekkel lebontható az egy 1 pontú fává, azaz $T_0$-á.

Eljárásunk megfordítása adja az alábbi tétel eddig hiányzó irányát:

**8. Tétel.** *Egy $T$ gráf akkor és csak akkor fa, ha $T_0$-ból felépíthető ághajtásokkal.*

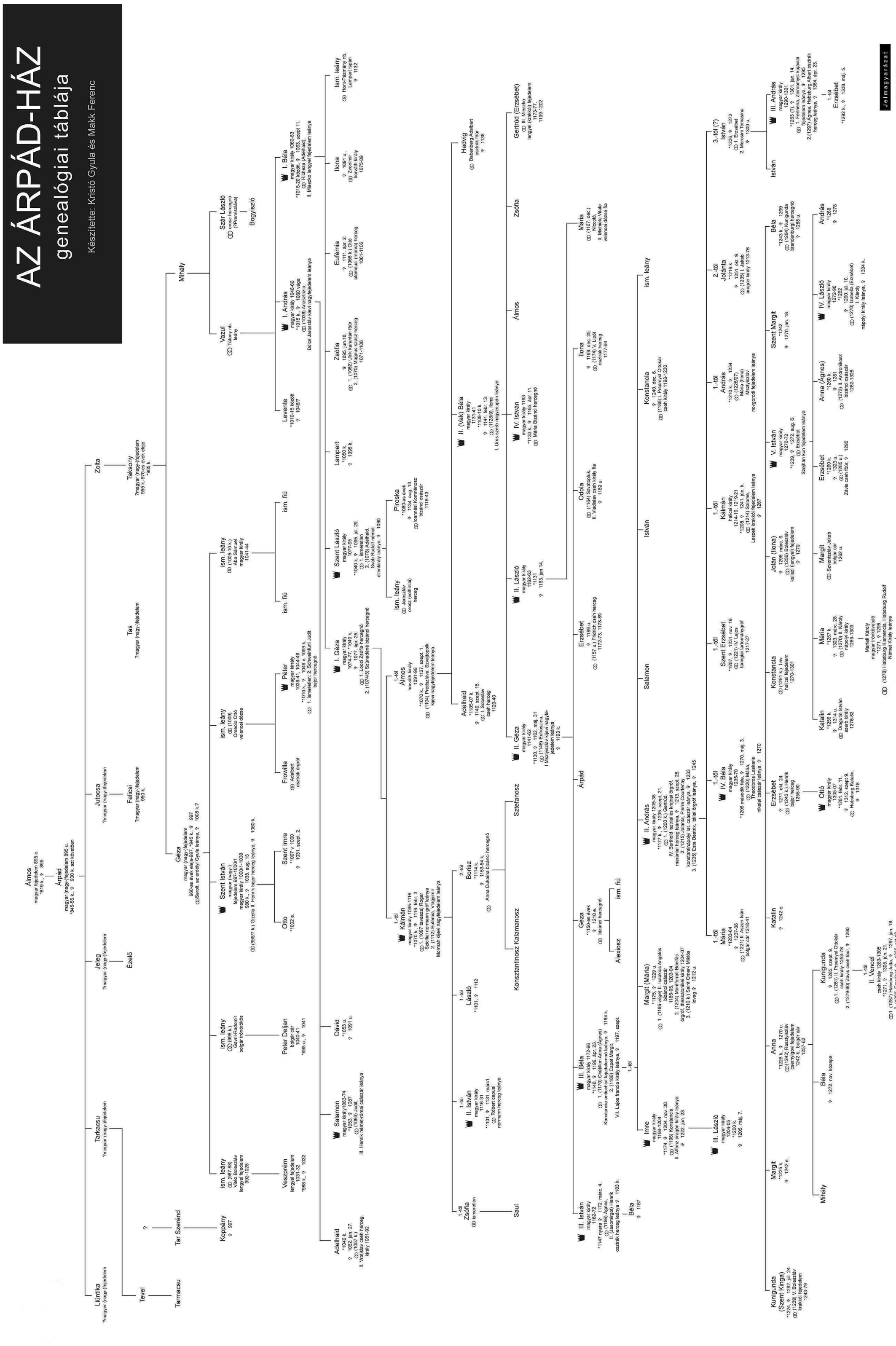
# 6. Gyökeres fák

Egy gyökeres fa egy $T$ fagráf egy $r$ kitüntetett csúccsal, amit gyökérnek nevezünk. A külön elnevezés kissé meglepő. A fa fogalmától egyetlen kis eltétés van, egy speciális csúcs. Ez azonban jelentős nyelvi lehetőségeket ad. Gyökeres fák esetén kifejező képességünk, ábrázolási módunk sokkal erősebb lesz.

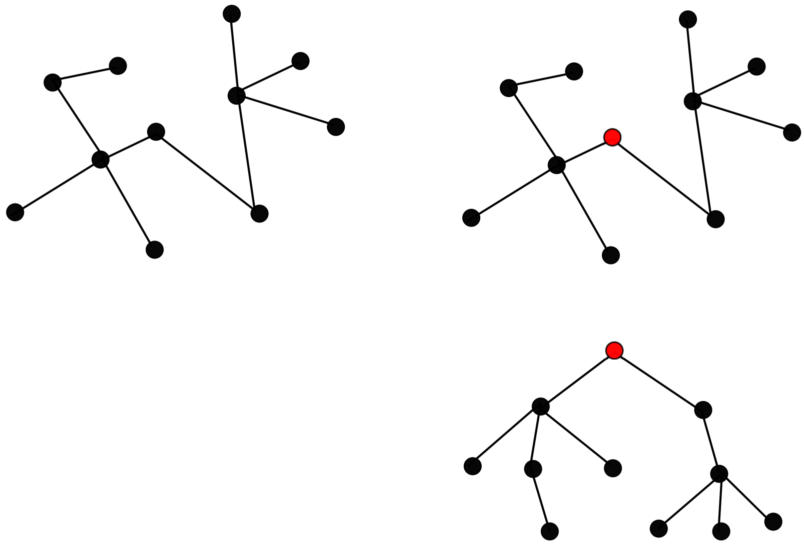
Legyen $(T, r)$ egy gyökeres fa.

Tudjuk, hogy minden csúcshoz pontosan egy út vezet a gyökérből. Legyen $\mathcal{G}_i$ azon csúcsok halmaza, amelyhez a gyökérből pontosan $i$ hosszú út vezet. Ezek a pontok halmaza a fánk $i$-edik generációja. $\mathcal{G}_0 = \{r\}$. Minden él által összkötött két csúcs olyan, hogy generációjuk 1-ben különbözik. Azt mondjuk, hogy az összekötött csúcsok között apa-fia reláció van. Amelyik generációja 1-gyel kisebb az az apa, a fia az amelyik generációja az 1-gyel nagyobb.

Gyökeres fák lerajzolásánál a csúcsok vízszintes egyenesekre kerülnek. A legfelső egyenes indexe 0, erre kerül a 0-adik generáció egyetlen eleme, a gyökér. A további egyenesek indexe fentől lefelé eggyel nő. Az $i$ indexű egyenesre kerülnek az $i$-edik generáció csúcsai. Ahogy az $i-1$ generáció sorakozott úgy kerülnek sorban az egyes $i-1$-es generációbelí csúcsok fiai blokkokban az $i$ indexű egyenesre. Ez a lerajzolás természetes Az Árpád-ház tagjait is így ábrázolják a történészek. Ebben a házban a fa eredete/gyökere Árpád személye.




Egy mesterséges példa



Néhány apróságra felhívjuk a figyelmet. Egy gyökeres fában egy csúcs levél, ha nincs fia. Ez és a fabeli levél fogalaom nagyon szoros kapcsolatban van, de mégis különböző.

Legyen $T_0$ az egy pontú 0 élű fa. Ebben nincs levél. Ha azonban mint $(T_0, r)$ gyökeres fának ($r$ az egyetlen csúcs) tekintjük, akkor ez a csúcs levél lesz. Másrészt legyen $T$ egy fa és $\ell$ egy levele. Ekkor $(T, \ell)$ gyökeres fában $\ell$ nem lesz levél, ha $T$-nek legalább két csúcsa van.

⋆

Láttuk, hogy minden fa felépíthető ághajtásokkal. Ennek bizonyítása az volt, hogy levél lecsípésekkel lebontottuk egy csúcsára. Ezen eljárás minden lépésében egy levelet kellett választanunk, majd lecsípnünk azt. Azt is tudjuk, hogy a levél választásának mindig kell, hogy legyen legalább két alternatívája. Azaz, ha kinéztünk egy tetszőleges $r$ csúcsot minden csípésnél választhatunk úgy, hogy ne $r$-et csípjuk le. Azaz $r$ maradjon utoljára.

Azaz minden gyökeres $(T, r)$ fa felépíthető a gyökérből ághajtásokkal. Azaz a gyökeres fák úgy építhetők fel, hogy kiindulunk a gyökérből majd sorba bővítjük a fát úgy, hogy egy meglévő csúcs egy új fiút ad a fának. Pont úgy, ahogy az Árpár-ház is nőtt.

# 7. Alaptételek

**9. Tétel.** *Egy $n$ pontú fának $n-1$ éle van.*

**Bizonyítás.** Fánkat építsük fel ághajtások segíségével. Azt kell igazolni, hogy a felépítés során végig eggyel több csúcsunk van mint élünk.

Az építkezés elején ez nyilvánvaló: 1 csúcs és 0 él van a gráfunkban.

Minden ághajtás 1-gyel növeli a csúcsok és ugyancsak 1-gyel növeli az élek számát. Azaz a csúcsok és élek száma közötti különbség nem változik az építkezés során. Ebből az állítás adódik. ■

Egy másik talán „kombinatorikusabb” bizonyítás lehet a következő.

**Bizonyítás.** Jelöljünk ki egy tetszőleges csúcsot $r$ gyökérnek. Ez a csúcshalmaz, élhalmaz számosságára nem hat ki. így elég gyökeres fákra igazolni a tételt. $E$ az élek halmaza, legyen $V^*$ a nem-gyökér csúcsok halmaza (amiről tudjuk, hogy $n-1$ elemű). A tételt egy $V^* \to E$ bijekcióval igazoljuk. Minden csúcshoz rendeljük hozzá az apjához vezető élt. Ez bijekció lesz: az inverze minden élhez a gyökértől távolabbi végpontját rendeli. ■

**10. Következmény.** *Egy $c$ komponensű körmentes $n$ pontú gráfnak $n-c$ éle van.*

**Bizonyítás.** Valóban. Vegyük gráfunk komponenseit. Ezek fák lesznek (összefüggőek, hiszen komponensek; körmentesek, hiszen eredeti gráfunk körmentes).

A komponensek csúcsszámai legyenek $n_1, n_2, \ldots$. Élszámát megkapjuk, ha komponenseiből az élszámokat összeadjuk. Ezek az élszámok az előző tétel szerint $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots$ Ennek összegzéséhez adjuk össza az $n_i$-ket (a komponensek csúcsszámait): az eredmény az összes csúcs száma, $n$. Továbbá adjuk össze a $-1$-eket: az eredmény $-c$. A teljes összeg $n-c$. ■

**11. Tétel.** *Egy összefüggő $G$ gráfnak van olyan részgráfja, ami az összes csúcsot tartalmazza és fa. Egy nem összefüggő gráfnak ilyen részgráfja nem lehet.*

Az összes csúcsot tartalmazó részgráfok csak élek elhagyásával nyerhetők $G$-ből. Az ilyen részgráfokat feszítő részgráfoknak nevezzük. A tétel által garantált részgráf $G$ egy feszítőfája. A tétel azt mondja, hogy pontosan az összefüggő gráfoknak van feszítőfája.

**Bizonyítás.** Egy összefüggő feszítő gráf igazolja a kiinduló gráf összefüggőségét is. Azaz nem összefüggő gráfnak nem lehet összefüggő feszítő részgráfja, így feszítőfája sem.

Ha összefüggő a gráfunk, akkor sorban vizsgáljuk meg összes élét: ha elhagyjuk az aktuális gráfból, akkor megszűnik-e az összefüggóség? Ha igen, akkor ne hagyjuk el. Ha nem, akkor hagyjuk el. Azaz törekedjünk az élek elhagyására, de „nagyon vigyázzunk": gráfunk maradjon összefüggő. Algoritmusunk kiszámol egy feszítő részgráfot. Ez az összes csúcsot tartalmazza, összefüggő lesz. Sőt bármely élét elhagyva megszűnik összefüggősége (miért?). Azaz egy feszítőfához jutottunk. A tétel bizonyított. ■

**12. Tétel.** *Egy legalább két pontú összefüggő gráfban mindig található egy csúcs, amit elhagyva összefüggő marad a gráf.*

**Bizonyítás.** Könnyű látni, hogy elég fákra igazolni a tételt. Valóban, ha fákra tudnánk, akkor $G$ egy $T$ feszítőfájában megtalálva egy jó $x$ csúcsot, az $G-x$-ről igazolna az összefüggőget. Valójában $T-x$ a $G-x$ gráf egy feszítőfája lenne.

Fákra egyszerű az állítás: bármelyik levele igazolja a tételt ■