

KOMBINATORIKA EIŐADÁS
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Bevezetés

Előadó: Hajnal Péter

2014.

A kombinatorika kurzus első fele összeszámlálásokkal foglalkozik (míg második fél a gráfelméletet tárgyalja). Az összeszámlálási problémák alapkérdése, hogy határozzuk meg, hogy adott véges halmaznak hány eleme van. Sokszor nem is egy halmazról van szó. A kérdésben szerepel egy paraméter, például: hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak. (Itt egy H_n halmazsorozatról van szó és ennek elemszámaira kérdezzük rá.)

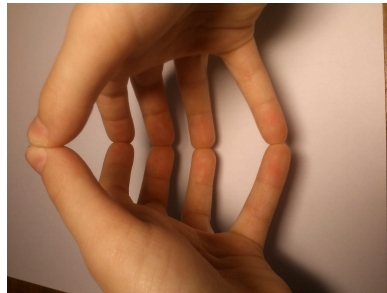
Az első rész az összeszámlálás kombinatorikus alapelveit tárgyalja.

1. Kombinatorikus alapelvek

Három alapelvet ismertetünk. Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza. Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat. Mindig feltesszük, hogy VÉGES halmazokkal dolgozunk, de erről később még szó lesz.

I.

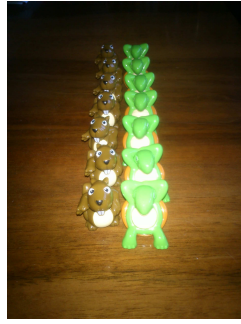
A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



1. ábra.

A képen egy kislány teszi össze bal, illetve jobb kezének ujjait. Ő már tud számolni, de ennélkül is látja (ahogy a számolni nem tudók is), hogy bal és jobb kezén ugyanannyi új van.

A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.



2. ábra.

Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy. Párok alakulnak ki a két fajta figurák között. Ismét számolás nélkül tudhatjuk, hogy a két fajtából ugyanannyi darabunk van.

A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.



3. ábra.

Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak. Tehát ugyanannyi balos cipő van a képen mint jobbos. A pontos számuk meghatározása egy számolás, összetettebb mint az egy pillanat alatt látható „azonos elemszámúság”.

A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja



4. ábra.

Ez alapján mindenki számolás nélkül tudja, hogy a csoportban ugyanannyi fiú van mint lány.

Meg is van az első alapelvünk.

HA két halmaz elemeit párokba tudjuk állítani,
AKKOR a két halmaz azonos elemszámú.

Azért pontosítsunk. Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk? Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonóni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”. Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja. Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú, egy balos cipőnek jobbos, egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj. A és B halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \rightarrow B$ és egy $\psi : B \rightarrow A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli. Az is nyilvánvaló, hogy a párom párja én vagyok. Matematikai írásmóddal, ha $x \in A$, akkor x párjának ($\varphi(x) \in B$ -nek) párja ($\psi(\varphi(x)) \in A$) x , azaz $\psi(\varphi(x)) = x$ bármi legyen is az $x \in A$ elem. Illetve hasonlóan ha $y \in B$, akkor y párjának ($\psi(y) \in A$ -nak) párja ($\varphi(\psi(y)) \in B$) y , azaz $\varphi(\psi(y)) = y$ minden $y \in B$ elemre.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ egy párbaállító leképezés A -ból B -be, illetve ψ egy párbaállító leképezés B -ből A -be.

Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz φ meghatározza ψ -t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhöz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le, hogy ezen leképezés párbaállító. Nyilván különböző fiúkhöz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lánynak kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként. Ezen két tulajdonsággal szokták leírni a párbaállító leképezéseket. Ha „valamit” mindenki számára egyértelműen leírunk, akkor azt mondjuk hogy ezt a „valamit” definiáljuk. A leírás a „valami” definíciója.

Definíció. Egy $\varphi : A \rightarrow B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

$$(I) \quad a \neq a' \text{ esetén } \varphi(a) \neq \varphi(a'),$$

$$(S) \quad \text{tetszőleges } b \in B \text{ esetén alkalmas } a \in A \text{ elemere } \varphi(a) = b.$$

A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a φ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés. Néha csak azt írjuk φ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk φ leképezés *ráképezés*.

A mai világban gyakoriak az idegen kifejezések használata. Az egy-egy értelmű φ leképezésre azt mondjuk *injekció*, φ *injektív*. A ráképezés φ leképezésre azt mondjuk *szürjekció*, φ *szürjektív*. Tehát $\varphi : A \rightarrow B$ leképezés párbaállító az A és B halmazok közt ha injektív és szürjektív is, idegen szóval *bijektív*. Azaz a leképezések párbaállító tulajdonságának egy másik neve a *bijekció*. Nyelvet tanultunk, a matematika nyelvét.

A matematikusok a jelöléseiket is próbálják ügyesen választani. Először talán szokatlan jelölések hosszú használat után természetessé válnak. A legtöbb jelölés

hosszú évszázadok alatt végletesedik. $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképezés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először φ -t, majd ψ -t végezzük el. Az elsöre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$ -t az x helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$ -et vizsgáljuk, akkor így x -et először a „közelebbi” függvénybe helyettesítjük, majd az eredményt a távolabbiba.

Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a φ függvény által felvett értékeken ψ értelmezett. Speciálisan beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \rightarrow B$ és $\psi : B \rightarrow A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \rightarrow A$ és $\varphi \circ \psi : B \rightarrow B$. Ha $\varphi : A \rightarrow B$ és $\psi : B \rightarrow C$, ahol A, B, C három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes. Az amikor először φ -t, majd ψ -t alkalmazzuk. Azaz ekkor $\psi \circ \varphi$ egy jól definiált leképezés.

Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \rightarrow B$ és $\psi : B \rightarrow A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli. A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik A -n, a másik B -n értelmezett. Ha egy $H \rightarrow H$ függvény minden $h \in H$ elemhez h -t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a H -n értelmezett *identitás* függvény, jele id_H . Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \rightarrow B$ és $\psi : B \rightarrow A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi(x)$ is identitás, DE $\psi \circ \varphi = \text{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \text{id}_B$. Ha két függvénynek ilyen viszonya van, akkor azt mondjuk, hogy egymás inverzei.

Definíció. $\varphi : A \rightarrow B$ és $\psi : B \rightarrow A$ leképezések egymás inverzei, ha $\psi \circ \varphi = \text{id}_A$ és $\varphi \circ \psi = \text{id}_B$.

A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképezéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

1. Tétel. $\varphi : A \rightarrow B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképezés.

Tehát ha fiúk egy A halmazából lányok egy B halmazába történő leképezés párbaállító leképezés ($a \mapsto a$ párja), akkor van a lányok halmazából a fiúk halmazába menő leképezés ($b \mapsto b$ párja), hogy mindenki ($A \cup B$ minden elemére) párjának párja önmaga. Továbbá fordítva is igaz: ha fiúk egy A halmazából lányok egy B halmazába történő leképezéshez ($a \mapsto a$ párja) van a lányok halmazából a fiúk halmazába menő leképezés ($b \mapsto b$ párja), úgy hogy mindenki párjának párja önmaga, akkor a kiinduló leképezés párbaállító.

Két halmaz között leírt leképezésről gyakran úgy a legegyszerűbb belátni, hogy bijekció, hogy megadjuk inverzét. Azaz leírjuk, hogy x párja ismeretében, hogyan mondható meg, hogy mely x elemről van szó.

★

Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \rightarrow B$ leképezés akkor állítja párba az A és B halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés. Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképezésünk egy-egyértelmű (ránaképezést nem tudjuk). Az alábbi képen két fajta Kinder játékokat raktunk egymás mellé.



5. ábra.

A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök T halmazából van egy „párja” leképezés a mókuszok M halmazába. Ez nem ráképezés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképezésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképezés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképezés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókuszok vannak többen).

A következő tételt mondhatjuk ki:

2. Tétel. *Legyenek A és B véges halmazok. Ha $\varphi : A \rightarrow B$ leképezés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.*

A figyelmes olvasó észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek. Mi is ez? Miért is van szükségünk erre a feltételre?

★

Az első alapelv bármilyen két halmazra teljesül. Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz. A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

Ennek ellenére a negatív egészekhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon párnélküli pozitív egész. Például ha x párja $-x+1$, akkor a negatív számok egyikének sem lesz párja az 1. Ha pedig a negatív egész, x párjának $-2x$ -et nevezzük ki, akkor minden páratlan pozitív egész olyan lesz, mint a korábbi képünkön az utolsó két mókus. Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”. Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

Akkor jó lenne tisztázni, hogy mik a véges halmazok? Néhány példa véges halmazra:

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \dots$$

A fenti példánk nyilván végtelen, minden n természetes számra $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ a fenti sorozat egy eleme. Erre a halmazra van is egy jelölés: $[n]$. Azaz $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ($[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$). Ezeket standard véges halmazoknak nevezzük.

Definíció. Egy H halmaz véges, ha elemei párba állíthatók egy standard véges halmaz elemeivel.

Ha H elemei és $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ elemeit párba állítjuk, akkor azt mondjuk, hogy H egy n elemű halmaz. Azt is mondhatjuk, hogy egy H halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt. Azaz bijekciót létesítettünk ujjaink és egy standard véges halmaz között. Ismét egy óvodás tanulmányt formalizáltunk a matematika nyelvén.

II

Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?



6. ábra.

A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv. Számoljuk meg az áfonyát: 5 darab. Ribizli: 4 darab, fekete ribizli: 3 darab. Összesen $5 + 4 + 3$ erdei gyümölcs van a képen.

A megszámlandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámlolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

Az új alapelv kimondása előtt vezessünk be egy fogalmat. Két halmazra azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs közös elemük. Ha több halmazunk van úgy, hogy mindegyik elemük csak egyetlen egyhez tartozik hozzá, azaz bármelyik kettő diszjunkt, akkor azt mondjuk, hogy halmazaink páronként diszjunktak.

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

Formulával:

Ha az A_1, A_2, \dots, A_k páronként diszjunktak, akkor $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$.

Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor összeszámlandó elemeinket két (A és B) közös elem nélküli halmazba osztjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján az összeadás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

III

Nagynak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.



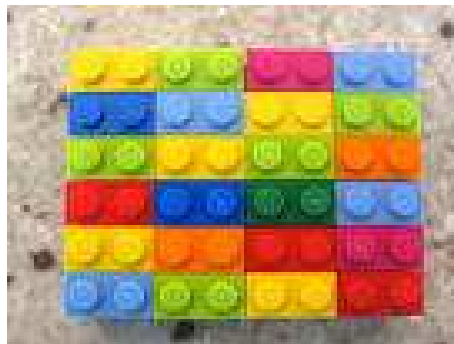
7. ábra.

Hányat is? Az első sorban négy, a másodikban is, a harmadikban is. Összesen $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.) A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye. A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le. Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet. A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó. Hasonlóan, ha csak a helyet írjuk le, nem tudjuk melyik muffinról is beszélünk. Ezek csak egy „komponensek” az összeszámolandó objektumok leírásában.

★

Kis fiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szeretne volna rakni ezt. Hány lego darab felhasználásával tehetné ezt meg?



8. ábra.

6 sor mindegyikében 4 pozíció. A (sor, pozíció) párokra a lehetőségek száma, ami a látott lego darabok száma $6 \cdot 4 = 24$.

★

Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkal.



9. ábra.

Hány hallgató számára van ülőhely a teremben? A válasz nyilvánvaló: $4 \cdot 10 = 40$.

★

Olga kollégiumi szobájának ablakából kinézve az alábbi képet látja:



10. ábra.

Hány ablakot lát? A ház öt szintes és mindegyiken nyolc ablak van (egy kicsi és hét nagy). Összesen $5 \cdot 8 = 40$ ablakot lát Olga, ha kinéz az ablakán.

★

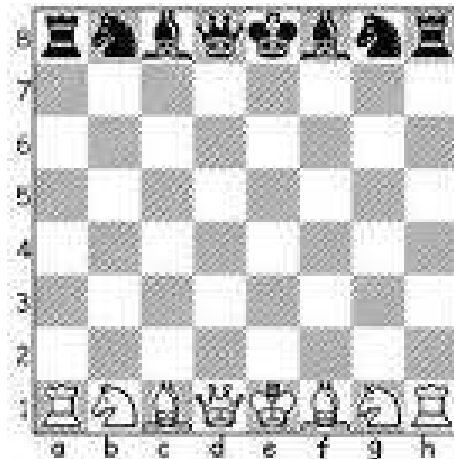
Hány mező van a sakktáblán?



11. ábra.

A mezők 8 sorba és 8 oszlopba vannak rendezve. A mezők pontosan azonosíthatók, ha megadjuk melyik sorban és melyik oszlopban van a leírandó mezőnk.

A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva a, b, c, d, e, f, g, h „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:



12. ábra.

Egy mező például az $a1$: az első mező a legalsó sorban. Vagy $e3$: az ötödik mező az alúlról számított harmadik sorban.

A mezők ugyanannyian vannak mint a betű-szám párok, ahol a betű az angol ábécé első nyolc betűje közül kerül ki és a szám a pozitív egészek első nyolc elemének egyike.

A matematikusok erre egy külön jelölést vezettek be. Az ilyen párok a kétféle lehetőséget adó halmazok Descartes-szorzata, vagy egyszerűen (halmazelméleti) szorzata. A fenti „koordináta-rendszer” párjai az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazt alkotják. Ahogy a sík geometria koordináta párjainak halmazára a jelölés $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, röviden \mathbb{R}^2 .

Definíció. A és B halmazok Descartes szorzata $A \times B$ pontosan az (a, b) párokat tartalmazza, ahola $a \in A$ és $b \in B$ tetszőleges elemek.

A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében. Például három tényezős Descartes-szorzat hármassokat,

három hosszú koordináta sorokat tartalmaz, ahol a megfelelő koordináták a megfelelő halmazból jönnek.

Definíció. Az A_1, A_2, \dots, A_k halmazok $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ Descartes-szorzata (a_1, a_2, \dots, a_k) elem k -asokat tartalmaz, ahol az i -edik elem/koordináta/komponens az i -edik halmazból kerül ki, azaz $a_i \in A_i$ minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ indexre.

★

Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:



13. ábra.

Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámlalható objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság). Mindegyik egymástól függetlenül; három értéket vehet fel. A válasz $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

Halmazok szorzatának elemszáma
a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

Formulával:

Az A_1, A_2, \dots, A_k halmazok esetén
 $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$

Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor két (A és B) tényezők van:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján a szorzás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

★

Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

A második alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat A -val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja A_i , ahol az i értékei az $1, 2, \dots, k$ sorozaton „futnak át”. Szerepelt egy összeg is, amely általános tagja az $|A_i|$ elemszám, ahol az i értékei az $1, 2, \dots, k$ sorozaton „futnak át”. A középiskolai $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k / |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$ jelölésből ki kell találni a sémát, az általános tagot és az indexek futását. Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} A_i, \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq k} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^k A_i, \quad \text{illetve} \quad \sum_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} |A_i|, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq k} |A_i|, \quad \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k / |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

$$\prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} A_i, \quad \prod_{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq k} A_i, \quad \prod_{i=1}^k A_i, \quad \text{illetve} \quad \prod_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} |A_i|, \quad \prod_{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq k} |A_i|, \quad \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Σ az összeg/szumma görög nevének kezdőbetűje. Π a szorzat/produktum görög nevének kezdőbetűje.